Revista Colombiana de Estadística
Volumen 25 (2002) N^{o} 1, páginas 15 *a* 30

SISTEMAS ALEATORIOS RAMIFICADOS PRIMERA PARTE*

LILIANA BLANCO.**
MYRIAM MUÑOZ.***

Resumen

En este artículo, el cual es de carácter divulgativo y está basado en el trabajo de Fernández, B. [4], consideraremos un tipo especial de sistema de partículas en el espacio euclidiano d-dimensional $\mathbb{R}^d$, sujeto en su evolución a través del tiempo a migración, reproducción e inmigración de partículas. El objetivo central es estudiar el comportamiento asintótico del sistema.

1. Introducción

Los sistemas infinitos de partículas son modelos matemáticos de fenómenos que se presentan en el campo de la física, la biología y otras ciencias. Ellos son útiles pues ofrecen aproximaciones para sistemas finitos muy grandes que ocurren en la realidad tales como la descripción de las colonias de bacterias o la descripción del crecimiento de tumores cancerosos.

Entre los trabajos realizados en ésta área se destacan los de Martin-Löf [9], Gorostiza, L.G. & Kaplan, N. [7], Dawson, D.A. [2], Gorostiza, L.G. [8] y Fernández, B. & Gorostiza, L.G. [5].

*Con el patrocinio del DIB

**Profesora Asociada, Departamento de Estadística; Universidad Nacional de Colombia; e-mail: igmantil@ciencias.ciencias.unal.edu.co

***Profesora Asociada, Departamento de Matemáticas; Universidad Nacional de Colombia; e-mail: halil@tutopia.com

En este artículo, el cual es de carácter divulgativo y está basado en el trabajo de Fernández, B. [4], consideraremos un tipo especial de sistema de partículas en el espacio euclidiano d-dimensional $\mathbb{R}^d$, sujeto en su evolución a través del tiempo a migración, reproducción e inmigración de partículas. El objetivo central es estudiar el comportamiento asintótico del sistema.

Para lograr el objetivo hemos dividido el artículo en dos partes: En la primera se darán los conceptos y resultados generales necesarios para la presentación del modelo, y en la segunda, se hará la aplicación de dicha teoría general en la descripción y análisis del sistema de partículas objeto del estudio.

Consideramos el espacio $S(\mathbb{R}^d)$ de las funciones $\phi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ infinitamente diferenciables, para las cuales, para todo $p = 0, 1, 2, \dots$

$$\|\phi\|_p = \max_{0\le|k|\le p} \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \prod_{j=1}^{d} (1 + |x_j|)^p |D^k\phi(x)| < \infty, \tag{1}$$

donde $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, $k = (k_1, \dots, k_d) \in \mathbb{N}_0^d$ $(\mathbb{N}_0^d = \mathbb{N} \cup \{0\})$, $|k| = k_1 + \cdots + k_d$ y $D^k = \frac{\partial^{|k|}}{\partial x_1^{k_1} \cdots \partial x_d^{k_d}}$.

La ecuación (1) define una norma en $S(\mathbb{R}^d)$ para cada p y este sistema de normas define en dicho espacio una topología de espacio vectorial topológico localmente convexo. Así mismo se define otro sistema de normas equivalentes

$$|||\phi|||_p^2 = \sum_{|k|=0}^{p} \int_{\mathbb{R}^d} \prod_{j=1}^{d} (1 + |x_j|)^p |D^k\phi(x)|^2 dx, \tag{2}$$

las cuales inducen la misma topología, y con esta topología $S(\mathbb{R}^d)$ es metrizable, separable y completo. Definimos como $S_p(\mathbb{R}^d)$ al completado de $S(\mathbb{R}^d)$ respecto de la norma $|||\cdot|||_p$. Si $n < m$, $S_m(\mathbb{R}^d) \subseteq S_n(\mathbb{R}^d)$ y $S(\mathbb{R}^d) = \bigcap_{n=0}^{\infty} S_n(\mathbb{R}^d)$. Sean $S'_n(\mathbb{R}^d)$ y $S'(\mathbb{R}^d)$ los espacios duales de $S_n(\mathbb{R}^d)$ y $S(\mathbb{R}^d)$ respectivamente, a $S'(\mathbb{R}^d)$ se le conoce como el espacio de distribuciones temperadas de Schwartz. El espacio $S'_n(\mathbb{R}^d)$ es un espacio de Hilbert, con norma

$$\|F\|_{-n} = \sup_{|||\phi|||_n=1} |\langle F, \phi\rangle|,$$

donde $F \in S'_n(\mathbb{R}^d)$, $\phi \in S_n(\mathbb{R}^d)$ y $\langle F, \phi\rangle = F(\phi)$.

Consideramos $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$ (la σ-álgebra de Borel). El espacio $M^+(\mathbb{R}^d)$ de las medidas μ de Radon en $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d))$, es decir, las medidas que son finitas para conjuntos compactos. Para $f \in C_K(\mathbb{R}^d)$, la familia de funciones continuas con soporte compacto, definimos

$$\langle \mu, f\rangle := \int_{\mathbb{R}^d} f(x) d\mu(x).$$

Una sucesión $(\mu_n)_n$ de medidas de Radon se dice que converge vagamente a una medida de Radon μ, si $\langle \mu_n, f\rangle \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \langle \mu, f\rangle$ para cada $f \in C_K(\mathbb{R}^d)$. Se dice que una medida μ es temperada si existe p tal que

$$\langle \mu, (1+|x|^2)^{-p}\rangle < \infty.$$

El espacio $M^+(\mathbb{R}^d)$ con la topología de la convergencia vaga es un espacio metrizable, separable y completo, es decir, es un espacio polaco.

El espacio de las medidas temperadas se caracteriza por (ver [6]):

$$M_T^+(\mathbb{R}^d) = M^+(\mathbb{R}^d) \cap S'(\mathbb{R}^d).$$

Definición 1.1. Sean $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ un espacio de probabilidad y E un espacio topológico con σ-álgebra de Borel $\mathfrak{B}$ (es decir la σ-álgebra generada por los conjuntos abiertos de E). Una aplicación $X : \Omega \to E$ es un elemento aleatorio o una variable aleatoria (v.a.) sobre Ω con valores en $\mathfrak{E}$, si para todo $B \in \mathfrak{E}$, $X^{-1}(B) \in \mathfrak{F}$.

Si X es una v.a., la distribución P_X de X, es una probabilidad sobre $(E, \mathfrak{E})$ y está definida por $P_X(A) := P(X^{-1}(A))$ para todo $A \in \mathfrak{E}$.

Con esta definición podemos observar que cualquier medida de probabilidad sobre un espacio topológico es la distribución de alguna v.a. sobre algún espacio de probabilidad.

Definición 1.2. Una medida de probabilidad μ en $(\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d))$ se llama gaussiana, si su función característica

$$\hat{\mu}(y) := \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle y,x\rangle}\mu(dx)$$

está dada por

$$\hat{\mu}(y) = e^{i\langle y,m_\mu\rangle - \frac{1}{2}\langle Q_\mu y,y\rangle}, \quad y \in \mathbb{R}^d,$$

donde m_μ es el vector medio y $Q_\mu : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ es un operador lineal positivo llamado operador de covarianza (su matriz respecto a la base canónica se llama la matriz de covarianza), $\langle\cdot,\cdot\rangle$ denota el producto interno.

Además se tiene que:

$$\langle y, m_\mu\rangle = \int_{\mathbb{R}^d} \langle x, y\rangle \mu(dx), \quad y \in \mathbb{R}^d$$

y que

$$\langle Q_\mu y, y\rangle = \int_{\mathbb{R}^d} [\langle y, x\rangle - \langle y, m_\mu\rangle][\langle z, x\rangle - \langle z, m_\mu\rangle]\mu(dx).$$

Definición 1.3. Una medida gaussiana μ en $(\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d))$ se llama estándar, si es absolutamente continua respecto a la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^d$ y su función de densidad está dada por

$$\rho(x) = \frac{e^{-\|x\|^2/2}}{(2\pi)^{d/2}},$$

entonces, si μ es una medida gaussiana estándar en $(\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d))$, su función característica viene dada por

$$\hat{\mu}(x) = e^{-\|x\|^2/2},$$

por lo que μ tiene valor medio cero y operador de covarianza $Q = I$, con I la identidad.

2. Variables aleatorias en $S'(\mathbb{R}^d)$

Consideramos el espacio de las distribuciones temperadas $S'(\mathbb{R}^d)$ con la topolo-
gía fuerte y denotemos por $\mathfrak{B}(S')$ a la σ-álgebra de Borel de $S'(\mathbb{R}^d)$.

Sea $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ un espacio de probabilidad. Sea $X : \Omega \to S'(\mathbb{R}^d)$ una variable aleatoria, entonces a cada $w \in \Omega$ se le está asociando un funcional lineal continuo $X(w)$ tal que $X(w)(\phi) = \langle X(w), \phi\rangle := \langle X, \phi\rangle(w)$, $\phi \in S(\mathbb{R}^d)$. Si $d = 1$, decimos que X es una v.a. generalizada y si $d > 1$ decimos que X es un campo aleatorio generalizado. X puede verse como un sistema de v.a. reales sobre el espacio de probabilidad mencionado,

$$\{\langle X, \phi\rangle, \phi \in S(\mathbb{R}^d)\},$$

con espacio de parámetros $S(\mathbb{R}^d)$, tales que para cada w, $\langle X, \phi\rangle(w)$ es continua y lineal en ϕ.

Definición 2.1. Sea $X = \{\langle X, \phi\rangle, \phi \in S(\mathbb{R}^d)\}$ una v.a. con valores en $S'(\mathbb{R}^d)$ definida sobre $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$. El funcional característico de X se define como

$$C_X(\phi) := E\left(e^{i\langle X, \phi\rangle}\right), \quad \phi \in S(\mathbb{R}^d),$$

es una función a valor complejo definida sobre $S(\mathbb{R}^d)$.

Observaciones.

C-1. $C_X(\phi)$ es definida positiva, esto es,

$$\sum_{j,k}^{n} a_j \bar{a}_k C_X(\phi_j - \phi_k) \geq 0, \quad n \in \mathbb{N}, a_j \in \mathbb{C}, \phi_j, \phi_k \in S(\mathbb{R}^d).$$

C-2. $C_X(0) = 1$.

C-3. $C_X(\phi)$ es continua en $\phi = 0$.

Definición 2.2. Sea μ una medida de probabilidad sobre $(S'(\mathbb{R}^d), \mathfrak{B}(S'))$, se define el funcional característico de μ como

$$C_\mu(\phi) := \int_{S'(\mathbb{R}^d)} e^{i\langle x,\phi\rangle}\mu(dx), \quad \phi \in S(\mathbb{R}^d).$$

Definición 2.3. Un funcional con valores complejos $C(\phi)$, $\phi \in S(\mathbb{R}^d)$, se llama un funcional característico si $C(\phi) = C_\mu(\phi)$ para alguna medida de probabilidad μ.

Si X es una v.a. con valores en $S'(\mathbb{R}^d)$ y P es su distribución, $C_X = C_P$.

La correspondencia $\mu \to C_\mu$ es 1-1, es decir, si $C_\mu = C_\nu$, entonces $\mu = \nu$ (ver [4]).

Teorema 2.4 (Bochner-Minlos). *Un funcional a valores complejos $C(\phi)$, $\phi \in S(\mathbb{R}^d)$ es un funcional característico si existe una v.a. X tal que $C(\phi) = C_X(\phi)$ y satisface las condiciones C-1, C-2, C-3 de las observaciones.*

Para la demostración ver [4].

El teorema anterior nos permite probar la existencia de una medida de probabilidad μ tal que su funcional característico está dado por

$$C_\mu(\phi) = e^{-1/2\|\phi\|^2}, \quad \phi \in S(\mathbb{R}^d).$$

Si X, Y son dos v.a. con valores en $S'(\mathbb{R}^d)$ definidas sobre el mismo espacio de probabilidad, entonces la variable aleatoria $aX + bY$ en $S'(\mathbb{R}^d)$ está definida por

$$(aX + bY) = \{a\langle X,\phi\rangle + b\langle Y,\phi\rangle, \phi \in S(\mathbb{R}^d)\}.$$

La derivada X' de una v.a. en $S'(\mathbb{R})$ está definida por

$$X'(w) = \{-\langle X,\phi'\rangle(w), \phi \in S(\mathbb{R})\},$$

donde ϕ' es la derivada de ϕ.

Notemos que la derivada de un proceso ordinario no necesariamente existe, o si existe no necesariamente es del mismo tipo del proceso, en cambio la derivada de una v.a. con valores en $S'(\mathbb{R}^d)$ siempre existe y es una v.a. con valores en $S'(\mathbb{R}^d)$.

Definición 2.5. Si X es una v.a. con valores en $S'(\mathbb{R}^d)$. A cada $\phi \in S(\mathbb{R}^d)$ le corresponde la v.a. real $\langle X, \phi\rangle$. Si cada una de estas variables tiene media $m_X(\phi)$, continua en ϕ, entonces $m_X(\cdot)$ es un funcional lineal continuo definido en $S(\mathbb{R}^d)$ llamado la media de la v.a X.

Si la media de la v.a. $\langle X, \phi\rangle\langle X, \psi\rangle$ existe para toda ϕ y ψ en $S(\mathbb{R}^d)$, y es continua en ambas funciones, llamamos a esta media el funcional de covarianza de X y lo denotamos por $K_X(\phi, \psi)$.

$K_X(\phi, \psi)$ es un funcional bilineal positivo definido.

Definición 2.6. Sea X una v.a. con valores en $S'(\mathbb{R}^d)$. Decimos que X es gaussiana si su funcional característico está dado por

$$C_X(\phi) = \exp\left(im_X(\phi) - \frac{1}{2}K_X(\phi, \phi)\right), \quad \phi \in S(\mathbb{R}^d).$$

3. Procesos estocásticos con valores en $S'(\mathbb{R}^d)$

Definición 3.1. Un proceso estocástico $X = \{X_t, t \geq 0\}$ con valores en $S'(\mathbb{R}^d)$ es una colección de v.a. X_t definidas sobre un espacio de probabilidad completo $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ y con valores en $(S'(\mathbb{R}^d), \mathfrak{F}(S'))$.

Definición 3.2. Un proceso estocástico $X = \{X_t, t \geq 0\}$ con valores en $S'(\mathbb{R}^d)$ se llama gaussiano si la familia de v.a. reales $\{\langle X_t, \phi\rangle, t \geq 0, \phi \in S(\mathbb{R}^d)\}$ forma un sistema gaussiano, es decir, si para toda colección finita $t_1, \ldots, t_m$ en $[0, \infty)$ y $\phi_1, \ldots, \phi_m \in S(\mathbb{R}^d)$, el vector aleatorio

$$(\langle X_{t_1}, \phi_1\rangle, \cdots, \langle X_{t_m}, \phi_m\rangle)$$

tiene distribución gaussiana en $\mathbb{R}^m$.

Dos procesos estocásticos $X = \{X_t, t \geq 0\}$ y $Y = \{Y_t, t \geq 0\}$ definidos sobre el mismo espacio de probabilidad y con valores en $S'(\mathbb{R}^d)$ son versiones uno del otro si

$$P(X_t = Y_t) = 1 \quad \text{para todo} \quad t \geq 0.$$

4. Convergencia débil

Sea E un espacio topológico y $\mathfrak{E}$ la σ-álgebra de Borel de E. Estudiaremos las medidas de probabilidad en $\mathfrak{E}$.

Definición 4.1. Sea $(P_n)_n$ una sucesión de medidas de probabilidad en $\mathfrak{S}$ y sea P una medida de probabilidad en $\mathfrak{S}$, decimos que P_n converge débilmente a P, denotado por $P_n \Rightarrow P$, si para toda función real, acotada y continua en S, $\int_S f dP_n \to \int_S f dP$.

Definición 4.2. Sean $X, (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ variables aleatorias con valores en $(E, \mathfrak{E})$. La sucesión $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en distribución hacia X, se denota por $X_n \underset{n\to\infty}{\overset{d}{\to}} X$, si $P_{X_n} \Rightarrow P_X$. Escribimos también $X_n \Rightarrow P$ si $P = P_X$.

Teorema 4.3. *Sea E un espacio topológico completamente regular y P y Q medidas de probabilidad sobre $\mathfrak{E}$ (la σ-álgebra de Borel sobre E). Entonces P y Q coinciden si y sólo si*

$$\int f dP = \int f dQ,$$

para todo f continua y acotada sobre E.

Con esto observamos que los valores de $\int f dP$ para toda $f \in C(S)$ determinan completamente los valores de $P(A)$, $A \in \mathfrak{S}$.

Los siguientes teoremas y corolarios se pueden ver en [1].

Teorema 4.4. *$P_n \Rightarrow P$ si y sólo si cada subsucesión $(P_{n'})_{n'}$ de $(P_n)_n$ contiene una subsucesión $(P_{n''})_{n''}$ tal que $P_{n''} \Rightarrow P$.*

Sean $(E, \mathfrak{E})$ y $(E', \mathfrak{E}')$ dos espacios topológicos completamente regulares y $h : E \to E'$ una aplicación medible (respecto de las σ-álgebras de Borel de E y E' respectivamente). Dada una medida de probabilidad P en $(E, \mathfrak{E})$ consideramos la probabilidad transportada P_h definida por $P_h(A') = P(h^{-1}(A'))$, para toda $A' \in \mathfrak{E}'$. Sea h una función continua. Dada f una función continua y acotada definida en E', $P_n \Rightarrow P$ implica que

$$\int (f \circ h) dP_n \to \int (f \circ h) dP.$$

Por lo anterior y por el teorema de la medida transportada obtenemos

$$\int f(y)(P_n)_h(dy) \to \int f(y) P_h(dy).$$

A continuación vamos a debilitar las condiciones, sobre h, suponiendo que h es medible y dando condiciones para D_h, el conjunto de discontinuidades de h.

Teorema 4.5. *Si $P_n \Rightarrow P$ y $P(D_h) = 0$, entonces $(P_n)_h \Rightarrow P_h$, cuando h es medible.*

Si $h : E \to E$ es medible y X es una variable aleatoria de E, entonces $h(X)$ es una variable aleatoria de E. Por lo tanto,

Corolario 4.6. *Si $X_n \xrightarrow{d} X$ y $P(X \in D_h) = 0$, entonces $h(X_n) \xrightarrow{d} h(X)$.*

4.1. Convergencia débil en $S'(\mathbb{R}^d)$

Primero introduciremos algunas definiciones y resultados necesarios para el desarrollo de esta sección.

Definición 4.7. Sean H_1 y H_2 dos espacios de Hilbert y sea A un operador lineal, $A : H_1 \to H_2$. A se dice compacto si la imagen por A de un conjunto acotado tiene clausura compacta.

Un operador A compacto puede ser representado por $A = UT$, donde $T : H_1 \to H_1$ es un operador compacto positivo definido y $U : H_1 \to H_2$ es una isometría. De acuerdo a esta representación, A se puede escribir como:

$$Ax = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (x, e_n)_1 h_n, \tag{3}$$

donde e_n, h_n son elementos de conjuntos ortonormales en H_1 y H_2 respectivamente, (x, e_n) es el producto interno en H_1 y $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ son los valores propios del operador T, tales que $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$. Recíprocamente, toda serie como en (3) define un operador compacto.

Definición 4.8. Un operador compacto $A : H_1 \to H_2$ se llama nuclear si en (3)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n < \infty.$$

El operador se llama de Hilbert-Schmidt si en (3)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 < \infty.$$

Se sabe que todo operador nuclear es el producto de dos operadores de Hilbert-Schmidt (ver [4]).

Si se define en un espacio vectorial E un sistema contable $\{\|\cdot\|_n, n \in \mathbb{N}\}$ de normas de Hilbert (normas que provienen de productos escalares), las cuales son compatibles en el siguiente sentido: Si $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de elementos de E que converge a cero en la norma $\|\cdot\|_m$ y es una sucesión fundamental en la norma $\|\cdot\|_n$, entonces converge también a cero en esta última norma. En E se puede definir una topología inducida por la métrica $d(x, y)$ definida como

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{\|x - y\|_n}{1 + \|x - y\|_n} \qquad x, y \in E.$$

Definición 4.9. Un espacio vectorial E con la topología inducida por un sistema de normas compatibles $\{\|\cdot\|_n, n \in \mathbb{N}\}$ se dice que es un espacio de Hilbert contable si es completo respecto de esta topología. Denotamos por E_n el completado de E respecto de la norma $\|\cdot\|_n$ y por x_n a los elementos de E_n (son elementos de E en el completado E_n).

Supongamos que μ_n y μ son medidas de probabilidad en $(\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}^d)$ con funciones características $\hat{\mu}_n$ y $\hat{\mu}$ respectivamente, el teorema de continuidad de Lévy se da como sigue (ver [4]):

Teorema 4.10 (Lévy). *$\mu_n \Rightarrow \mu$ si y sólo si $\hat{\mu}_n(t) \to \hat{\mu}(t)$ para cada t.*

Existe una extensión del teorema de Lévy (ver [4])para variable aleatorias en el espacio E', el dual de un espacio de Hilbert contable nuclear, como es el caso de los espacios $S(\mathbb{R}^d)$ y $S'(\mathbb{R}^d)$:

Teorema 4.11. *Sean μ_n y μ medidas de probabilidad sobre $S'(\mathbb{R}^d)$, el dual fuerte del espacio contable nuclear $S(\mathbb{R}^d)$ y sean $\hat{\mu}_n$ y $\hat{\mu}$ las funciones características de μ_n y de μ respectivamente. Entonces $\mu_n \Rightarrow \mu$ si y sólo si $\hat{\mu}_n(\phi) \to \hat{\mu}(\phi)$ para cada $\phi \in E$.*

4.2. Convergencia débil en $D([0,\infty), S'(\mathbb{R}^d))$

Sea $D_{S'}[\infty] := D([0,\infty), S'(\mathbb{R}^d))$ el espacio de todas las funciones definidas en $[0,\infty)$ con valores en $S'(\mathbb{R}^d)$ que son continuas por la derecha y tienen límites por la izquierda en la topología fuerte de $S'(\mathbb{R}^d)$.

Primero definimos una topología en este espacio de funciones. Dado un espacio topológico E se denota por $D_E := D([0,1], E)$ al espacio de todas las funciones del intervalo $[0,1]$ en E continuas por la derecha con límites por la izquierda. Sea Γ la clase de todas las funciones continuas estrictamente crecientes del intervalo $[0,1]$ sobre sí mismo. En $D_{\mathbb{R}}$ se define la métrica

$$d(x,y) = \inf_{\gamma\in\Gamma}\left\{\sup_{t\in[0,1]}|x(t)-y(\gamma(t))| + \sup_{\substack{s,t\in[0,1]\\ s\neq t}}\left|\log\frac{\gamma(t)-\gamma(s)}{t-s}\right|\right\}.$$

El espacio $D_{\mathbb{R}}$ con la topología inducida por esta métrica es un espacio métrico separable y completo y esta topología se le llama la topología de Skorohod.

Denotamos por $D_{\mathbb{R}}[\infty] := D([0,\infty),\mathbb{R})$. Análogamente en $D_{S'_p}$, con la topología $\|\cdot\|_{-p}$ sobre S'_p definimos la topología de Skorohod inducida por la métrica

$$d_p(x,y) = \inf_{\gamma\in\Gamma}\left\{\sup_{t\in[0,1]}\|x(t)-y(\gamma(t))\|_{-p} + \sup_{\substack{s,t\in[0,1]\\ s\neq t}}\left|\log\frac{\gamma(t)-\gamma(s)}{t-s}\right|\right\}.$$

Igualmente $D_{S'_p}$ con esta topología es un espacio métrico completo y separable. Sea $\{\|\cdot\|_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ la familia de seminormas definidas por

$$\|F\|_\lambda = \sup_{\phi \in \lambda} |\langle F, \phi \rangle|,$$

donde Λ es la familia de todos los subconjuntos acotados de $S(\mathbb{R}^d)$, que definen la topología fuerte en $S'(\mathbb{R}^d)$ y consideramos las siguientes semimétricas:

$$d_\lambda(x,y) = \inf_{\gamma \in \Gamma} \left\{ \sup_{t \in [0,1]} \|x(t) - y(\gamma(t))\|_\lambda + \sup_{\substack{s,t \in [0,1] \\ s \neq t}} \left| \log \frac{\gamma(t) - \gamma(s)}{t - s} \right| \right\}.$$

Sea $D_{S'_p} := D([0,1], S'_p(\mathbb{R}^d))$. $D_{S'} = \bigcup_{p=1}^\infty D_{S'_p}$, esta igualdad se entiende como igualdad de conjuntos. Con esta topología $D_{S'}$ es un espacio topológico completamente regular (ver [4]). $D_{S'}[\infty] = \bigcup_{p=1}^\infty D_{S'_p}(\infty)$ es completamente regular, $D_\mathbb{R}[\infty]$ y $D_{S'_p}[\infty]$ son espacios métricos separables y completos.

Sea $x : [0,1] \to S'(\mathbb{R}^d)$ una función. Supongamos que $x_t \to x_s$ cuando $t \to s$. Por definición de la topología fuerte, para toda $\lambda \in \Lambda$, $\|x_t - x_s\|_\lambda \to 0$ cuando $t \to s$. Si $\phi \in S(\mathbb{R}^d)$, $\lambda = \{\phi\} \in \Lambda$, entonces

$$\|x_t - x_s\|_{\{\phi\}} = \sup_{\phi \in \{\phi\}} |\langle x_t - x_s, \phi \rangle| = |\langle x_t, \phi \rangle - \langle x_s, \phi \rangle|,$$

es decir,

$$|\langle x_t, \phi \rangle - \langle x_s, \phi \rangle| \to 0, \text{cuando} \quad t \to s.$$

Sea $\phi \in S(\mathbb{R}^d)$, definimos la función $\Pi_\phi : D_{S'} \to D_\mathbb{R}$ por

$$\Pi_\phi(x) = \langle x, \phi \rangle.$$

Esta función Π_ϕ es continua en x.

Lema 4.12. *Sea $\Phi = \{\phi_i, i \in \mathbb{N}\}$ un conjunto denso numerable de $S(\mathbb{R}^d)$. Entonces para cada probabilidad P sobre $D_{S'}$ existe un conjunto denso $T_P \subseteq [0,1]$ tal que para $\phi_1, \ldots, \phi_k \in \Phi$ y $t_{i_1}, \ldots, t_{i_k} \in T_P$, la aplicación*

$$\Pi^{t_{i_1}, \ldots, t_{i_k}}_{\phi_1, \ldots, \phi_k} : D_{S'} \to \mathbb{R}^m$$

definida por

$$\Pi^{t_{i_1}, \ldots, t_{i_k}}_{\phi_1, \ldots, \phi_k}(x) = ((\langle x(t_1), \phi_1 \rangle, \cdots, ((\langle x(t_m), \phi_m \rangle)$$

es continua excepto en un conjunto de medida cero.

Demostración. Acá hay una composición de dos funciones

$$\Pi_{\phi_1,\ldots,\phi_k} : D_{S'} \to (D_{\mathbb{R}})^k$$

definida por

$$\Pi_{\phi_1,\ldots,\phi_k}(x) = (\langle x, \phi_1\rangle, \cdots, \langle x, \phi_k\rangle) \in (D_{\mathbb{R}})^k$$

y

$$\Pi^{t_1,\ldots,t_k} : (D_{\mathbb{R}})^k \to \mathbb{R}^k$$

definida por

$$\Pi^{t_1,\ldots,t_k}(x^{(1)}, \ldots, x^{(k)}) = (\langle x^{(1)}(t_1)\rangle, \cdots, \langle x^{(k)}(t_k)\rangle) \in \mathbb{R}^k$$

para obtener

$$\Pi^{t_1,\ldots,t_k}_{\phi_1,\ldots,\phi_k} = \Pi^{t_1,\ldots,t_k} \circ \Pi_{\phi_1,\ldots,\phi_k}.$$

La aplicación $\Pi^{t_1,\ldots,t_k}_{\phi_1,\ldots,\phi_k}$ es continua si y sólo si $\Pi^{t_i}_{\phi_i}$ es continua para cada i y como ésta última es la composición de las funciones Π_{ϕ_i} y Π^{t_i} y la primera se sabe que es continua, basta probar que la segunda es continua. Pero es claro que la aplicación Π^t es continua si y sólo si para cada $x \in D_{\mathbb{R}}$, x es continua en t.

Sea $\phi \in S(\mathbb{R}^d)$, para una medida de probabilidad P sobre $D_{S'}$, sea T^{ϕ}_P el conjunto de las $t \in [0,1]$ para las cuales $\Pi^t : \Pi_\phi D_{S'} \to \mathbb{R}$ es continua excepto en un conjunto de medida P igual a cero se tiene que T^{ϕ}_P es denso (ver [4]). Sea

$$T_P = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} T^{\phi_i}_P, \quad \Phi = \{\phi_i, i \in \mathbb{N}\}.$$

T_P es denso y para $t_1, \ldots, t_k \in T_P$ y $\phi_1, \ldots, \phi_k \in \Phi$ la aplicación $\Pi^{t_1,\ldots,t_k}_{\phi_1,\ldots,\phi_k}$ es continua excepto en un conjunto de medida P igual a cero. Además $\Pi^{t_1,\ldots,t_k}_{\phi_1,\ldots,\phi_k}$ es medible para toda $t_1, \ldots, t_k \in [0,1]$ y $\phi_1, \ldots, \phi_k$ en $S(\mathbb{R}^d)$, ya que Π^t es medible y Π_ϕ es continua. $\square$

Sean $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^m)$, $t_i \in T \subseteq [0,1]$, $\phi_i \in \Phi$ y $m \in \mathbb{N}$, sea $\mathfrak{B}_0(D_{S'})$ la colección de los conjuntos de la forma

$$\{x \in D_{S'} : (\langle x_{t_1}, \phi_1\rangle, \cdots, \langle x_{t_k}, \phi_k\rangle) \in A\}$$

llamados cilindros finito dimensionales, donde Φ es un subconjunto denso en $S(\mathbb{R}^d)$, T es un subconjunto denso en $[0,1]$ y $1 \in T$. Entonces $\sigma(\mathfrak{B}_0) = D_{S'}$. Todos los resultados obtenidos anteriormente se pueden demostrar también para $D_{S'}[\infty]$.

Definición 4.13. Sea P una medida de probabilidad sobre $D_{S'}[\infty]$. A las medidas

$$\{P\left(\Pi^{t_1,\ldots,t_k}_{\phi_1,\ldots,\phi_k}\right)^{-1}, \quad t_1,\ldots,t_n \in [0,\infty), \quad \phi_1,\ldots,\phi_k \in S(\mathbb{R}^d), m \in \mathbb{N}\}$$

las llamamos distribuciones finito dimensionales de P.

Definición 4.14. Sea $X = \{X_t, t \in [0,\infty)\}$ un proceso estocástico con valores en $S'(\mathbb{R}^d)$, cuyas trayectorias muestrales pertenecen a $D_{S'}[\infty]$. Para arbitrarios $\phi_1,\ldots,\phi_m \in S(\mathbb{R}^d)$ y $t_1,\ldots,t_m \in [0,\infty)$, se considera el vector aleatorio $(\langle X_{t_1},\phi_1\rangle,\ldots,\langle X_{t_m},\phi_m\rangle \in \mathbb{R}^m$. Las distribuciones finito dimensionales de X son las distribuciones finito dimensionales de estos vectores aleatorios.

Notemos que si $X = \{X_t, t \in [0,\infty)\}$ y $Y = \{Y_t, t \in [0,\infty)\}$ son dos procesos estocásticos con trayectorias muestrales en $D_{S'}[\infty]$, cuyas distribuciones finito dimensionales de X y Y coinciden, entonces, X y Y tienen la misma distribución.

Como una consecuencia del teorema 4.5 y de la proposición 4.12 tenemos el siguiente resultado.

Proposición 4.15. *Sean $\{X^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y X procesos estocásticos con trayectorias en $S'(\mathbb{R}^d)$, tales que $X^n \xrightarrow{d} X$. Entonces, si $\Phi = \{\phi_i, i \in \mathbb{N}\}$ es un conjunto denso en $S(\mathbb{R}^d)$ y P es la distribución de X, entonces existe un conjunto denso $T_P \subseteq [0,\infty)$ tal que, si $\phi_1,\ldots,\phi_m \in \Phi$ y $t_1,\ldots,t_m \in T_P$,*

$$(\langle X^n_{t_1},\phi_1\rangle,\ldots,\langle X^n_{t_m},\phi_m\rangle \xrightarrow{d} (\langle X_{t_1},\phi_1\rangle,\ldots,\langle X_{t_m},\phi_m\rangle$$

excepto en un conjunto de medida cero.

La convergencia débil de las distribuciones finito dimensionales no es una condición suficiente para la convergencia débil, sin embargo adicionándole la condición que definiremos a continuación se tiene el recíproco.

Definición 4.16. Sea Π una familia de medidas de probabilidad sobre un espacio topológico completamente regular $(E,\mathfrak{E})$. Se dice que Π es secuencialmente relativamente compacta si cada sucesión de elementos de Π contiene una subsucesión débilmente convergente (si para cada sucesión $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ existe una subsucesión $\{P_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ y una medida de probabilidad Q, no necesariamente en Π tal que $P_{n_k} \Rightarrow Q$) .

A continuación daremos algunos resultados, los cuales son generalización de los teoremas de convergencia débil, encontrados en [1], que nos permitirán demostrar la convergencia débil para procesos estocásticos con valores en $S'(\mathbb{R}^d)$.

Proposición 4.17. *Sea $\{X^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de procesos estocásticos en $D_{S'}[\infty]$, $\Phi=\{\phi_n, n\in\mathbb{N}\}$ un conjunto denso en $S(\mathbb{R}^d)$ y T un conjunto denso en $[0,\infty)$. Si las distribuciones P^n de X^n forman una familia relativamente compacta y para cualquier escogencia $\phi_1,\dots,\phi_m\in\Phi$, $t_1,\dots,t_m\in T$, $m\in\mathbb{N}$, las distribuciones del vector aleatorio*

$$(\langle X^n_{t_1},\phi_1\rangle,\dots,\langle X^n_{t_m},\phi_m\rangle)$$

convergen débilmente a una distribución de probabilidad en $\mathbb{R}^m$, entonces existe un único proceso X en $D_{S'}[\infty]$ tal que $X^n \xrightarrow{d} X$.

Proposición 4.18. *Sea $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de medidas de probabilidad sobre $D_{S'}[\infty]$. Supongamos que para cada $\phi\in S(\mathbb{R}^d)$ la sucesión $\{P_n\phi_\phi^{-1}\}_{n\in\mathbb{N}}$ es relativamente compacta en $D_{\mathbb{R}}[\infty]$. Entonces la sucesión $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es relativamente compacta en $D_{S'}[\infty]$.*

Estos resultados trasladan el problema de la compacidad relativa en $D_{S'}[\infty]$ a la compacidad relativa en $D_{\mathbb{R}}[\infty]$, el cual es un espacio polaco.

Proposición 4.19. *Sea $\{X^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de procesos estocásticos en $D_{S'}[\infty]$. Supongamos que para cada $\phi\in S(\mathbb{R}^d)$ la sucesión de distribuciones de $\langle X^n,\phi\rangle$ es relativamente compacta en $D_{\mathbb{R}}[\infty]$. Entonces la sucesión de distribuciones de X^n en $D_{S'}[\infty]$ es relativamente compacta en $D_{S'}[\infty]$.*

Teorema 4.20. *Sea $\{X^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de procesos estocásticos en $D_{S'}[\infty]$, $\mathfrak{F}^n_{t,\phi}=\sigma(\langle X^n_s,\phi\rangle,\ s\le t)$, $\Phi=\{\phi_i, i\in\mathbb{N}\}$ un conjunto denso en $S(\mathbb{R}^d)$ y $T\subseteq[0,\infty)$ denso. Entonces, si para cada escogencia $\phi_1,\dots,\phi_m\in\Phi$, $t_1,\dots,t_m\in T$ y $m\in\mathbb{N}$ el vector aleatorio*

$$(\langle X^n_{t_1},\phi_1\rangle,\dots,\langle X^n_{t_m},\phi_m\rangle)$$

converge en distribución a alguna distribución de probabilidad en $\mathbb{R}^m$, y existe $\beta>0$ tal que para $\tau,\delta>0$ existen variables aleatorias $\gamma^\tau_{n,\phi}(\delta)\ge 0$ tales que

$$E\left[\left|\langle X^n_{t+\delta},\phi\rangle-\langle X^n_t,\phi\rangle\right|^\beta \middle| \mathfrak{F}^n_{t,\phi}\right]\le E\left[\gamma^\tau_{n,\phi}(\delta)\middle|\mathfrak{F}^n_{t,\phi}\right],\quad 0\le t\le\tau, \tag{4}$$

y

$$\lim_{\delta\to 0}\limsup_{n\to\infty} E\left[\gamma^\tau_{n,\phi}(\delta)\right]=0, \tag{5}$$

existe un único proceso X en $D_{S'}[\infty]$ tal que

$$X^n \xrightarrow{d} X.$$

Las demostraciones se pueden ver en [4].

Las condiciones (4) y (5) implican la compacidad relativa de $\{X^n\}$. En la siguiente proposición se demuestra cómo verificarlas.

Proposición 4.21. *Sea* $X = \{X_t, t \geq 0\}$ *un proceso en* $D_{\mathbb{R}}[\infty]$ *y sea* $\{\mathfrak{F}_t, t \geq 0\}$ *una filtración tal que* X_t *es adaptado a* $\mathfrak{F}_t$*. Si existen procesos adaptados* $\{\theta_t^{(1)}, t \geq 0\}$ *y* $\{\theta_t^{(2)}, t \geq 0\}$ *tales que*

$$M_t = X_t - \int_0^t \theta_t^{(1)}(s)ds, \qquad t \geq 0$$

es una martingala cuadrado integrable con proceso creciente (en la descomposición de Doob-Meyer)

$$\int_0^t \theta_t^{(2)}(s)ds, \qquad t \geq 0,$$

entonces para cada $\tau > 0$ *y* $\delta > 0$ *existe una v.a.* $\gamma_\tau(\delta) \geq 0$ *tal que*

$$E\left((X_{t+\delta} - X_t)^2 | \mathfrak{F}_t\right) \leq E\left(\gamma_\tau(\delta) | \mathfrak{F}_t\right), \quad 0 \leq t \leq \tau.$$

Una tal v.a. es

$$\gamma_\tau(\delta) = 2\left[\delta \sup_{0 \leq t \leq \tau+\delta} \theta_t^{(2)} + \delta^2 \sup_{0 \leq t \leq \tau+\delta} \left(\theta_t^{(1)}\right)^2\right].$$

($\theta_t^{(2)}$ *debe ser no negativa).*

Demostración.

$$\begin{aligned}
&E\left((X_{t+\delta} - X_t)^2 | \mathfrak{F}_t\right) \\
&= E\left[\left(X_{t+\delta} - \int_0^{t+\delta} \theta_s^{(1)} ds - \left(X_t - \int_0^t \theta_s^{(1)} ds - \int_t^{t+\delta} \theta_s^{(1)} ds\right)\right)^2 \Big| \mathfrak{F}_t\right] \\
&\leq 2E\left[(M_{t+\delta} - M_t)^2 | \mathfrak{F}_t\right] + 2E\left[\left(\int_t^{t+\delta} 1 \cdot \theta_s^{(1)} ds\right)^2 \Big| \mathfrak{F}_t\right] \\
&\leq 2E\left[(M_{t+\delta} - M_t)^2 \Big| \mathfrak{F}_t\right] + 2E\left[\int_t^{t+\delta} 1 \cdot ds \int_t^{t+\delta} \left|\theta_s^{(1)}\right|^2 ds | \mathfrak{F}_t\right] \\
(6) \quad &= 2E\left[(M_{t+\delta} - M_t)^2 \Big| \mathfrak{F}_t\right] + 2E\left[\delta \int_t^{t+\delta} |\theta_s^{(1)}|^2 ds \Big| \mathfrak{F}_t\right].
\end{aligned}$$

Por otra parte

$$\begin{aligned}
E\left[(M_{t+\delta}\right. &\left. -M_t)^2|\mathfrak{F}_t\right] = E\left[M_{t+\delta} - 2M_tM_{t+\delta} + M_t^2|\mathfrak{F}_t\right]\\
&= E[M_{t+\delta}|\mathfrak{F}_t] - 2M_tE[M_{t+\delta}|\mathfrak{F}_t] + M_t^2\\
&= E[M_{t+\delta}^2|\mathfrak{F}_t] - M_t^2 = E[M_{t+\delta}^2 - M_t^2|\mathfrak{F}_t]\\
&= E\left[M_{t+\delta}^2 - \int_0^{t+\delta}\theta_s^{(2)}ds - \left(M_t^2 - \int_0^t \theta_s^{(2)}ds\right) + \int_t^{t+\delta}\theta_s^{(2)}ds\Big|\mathfrak{F}_t\right]\\
&= E\left[\int_t^{t+\delta}\theta_s^{(2)}ds\Big|\mathfrak{F}_t\right]. \qquad (7)
\end{aligned}$$

reemplazando (7) en (6) se obtiene

$$\begin{aligned}
&E\left((X_{t+\delta} - X_t)^2|\mathfrak{F}_t\right)\\
&\leq 2E\left[\int_t^{t+\delta}\theta_s^{(2)}ds\Big|\mathfrak{F}_t\right] + 2E\left[\delta\int_t^{t+\delta}\left(\theta_s^{(1)}\right)^2 ds\Big|\mathfrak{F}_t\right]\\
&\leq 2E\left[\int_t^{t+\delta}\sup_{0\leq s\leq\tau+\delta}\theta_s^{(2)}ds\Big|\mathfrak{F}_t\right] + 2E\left[\delta\int_t^{t+\delta}\sup_{0\leq s\leq\tau+\delta}\left(\theta_s^{(1)}\right)^2 ds\Big|\mathfrak{F}_t\right]\\
&=\leq 2E\left[\delta\sup_{0\leq s\leq\tau+\delta}\theta_s^{(2)}ds\Big|\mathfrak{F}_t\right] + 2E\left[\delta^2\sup_{0\leq s\leq\tau+\delta}\left(\theta_s^{(1)}\right)^2 ds\Big|\mathfrak{F}_t\right].
\end{aligned}$$

□

Bibliografía

[1] Billingsley, P *Convergence in Probability Measures*, Wiley, New York, (1968).

[2] Dawson D.A. y Gorostiza, L.G. Limit theorems for supercritical branching random fields. *Math. Nach. Vol. 118* (1984).

[3] Doob, J.L. *Stochastic Processes*, Wiley, New York, (1962).

[4] Fernández, B. Teoremas límites de alta densidad para campos aleatorios ramificados, *Sociedad Matemática Mexicana*, Ciudad de México, (1986).

[5] Fernández, B. Gorostiza, L.G. A criterium of convergence of generalized process and an application to a supercritical branching particle system. *Can. J. Math.* Vol. 43 (5), (1991.

[6] Gelfand, I.M. & Vilenkin, N,V. *Generalized Funktions*, Vol 4, Academic Press. New York. (1966).

[7] Gorostiza, L.G, Kaplan, N. Invariance principle for branching random motions. *Bol. Soc. Mat. Mex.* 25 (1980).

[8] Gorostiza, L.G. Limit theorems for supercritical branching random fields with inmigration *Adv. Appl. Math.* 9 (1988).

[9] Martin-Löf, Limit theorems for the motion of a Poisson system of independent Markovian particles with high density, *Z. Wahrs. Ver. Geb*, Vol 34, (1976).