

## CARTA DE CONTROL R CON INTERVALOS DE MUESTREO VARIABLES

ANA LUCIA MORENO CORTÉS<sup>1</sup>  
JOSÉ ALBERTO VARGAS NAVAS<sup>2</sup>

---

**Resumen.** La carta de control R usada para monitorear la variabilidad de un proceso, se basa en los rangos calculados a partir de muestras seleccionadas en tiempos igualmente espaciados. En este artículo se modifica la carta R usual, permitiendo que los intervalos entre las muestras puedan ser variables. La idea es que el intervalo de tiempo entre las muestras  $i$  e  $i + 1$  sea corto, si el rango de la  $i$ -ésima muestra da indicación de un posible cambio en la variabilidad del proceso, y largo en caso contrario. Comparaciones entre cartas de control R con intervalos de muestreo fijos (FSI) e intervalos de muestreo variables (VSI) muestran que estas últimas detectan más rápido cambios en la variabilidad de un proceso.

*Palabras Claves:* Cartas de control R, intervalos de muestreo variables, tiempo promedio para señal.

### 1. Introducción

Las cartas de control son instrumentos de control estadístico que permiten identificar en qué momento una determinada característica de calidad de un producto presenta un patrón inestable. Dos cartas de control utilizadas para determinar si la variabilidad de un proceso se encuentra o no bajo control son las cartas R y S. En estas cartas se calculan los rangos y las desviaciones estándar de muestras tomadas del proceso y se ubican en un gráfico que consta de una línea central ubicada sobre el valor objetivo y dos límites de control ubicados generalmente a una distancia  $3\sigma$  del valor objetivo.

---

(1) Estadística. Universidad Nacional de Colombia; e161262@matematicas.unal.edu.co  
(2) Profesor Asociado, Departamento de Estadística, Universidad Nacional de Colombia; e-mail: avargas@matematicas.unal.edu.co.

La práctica usual en una carta de control es tomar muestras del proceso a intervalos de tiempo de longitud fija (FSI), por ejemplo, cada hora. Reynolds, Amin, Arnold y Nachlas (1988), modifican esta práctica en la carta  $\bar{X}$  Shehart, a una en la cual los intervalos de muestreo o tiempos entre la toma de las muestras no sean fijos, sino que varían dependiendo de lo que se observe en el comportamiento de las muestras. En este artículo se utiliza la metodología de Reynold, Amin, Arnold y Nachlas (1988), para construir una carta de control R con intervalos de muestreo variables.

El proceso de control propuesto es permitir que el tiempo hasta la próxima muestra dependa de lo que se observa en la muestra actual y así poder aprovechar de una mejor forma la información brindada por los rangos.

En la sección 2 se presenta una revisión de literatura y se definen las propiedades de las cartas de control con VSI. La sección 3 explica la forma de construcción de la carta de control R propuesta. En la sección 4 se presenta la metodología del trabajo, mientras que en la sección 5 se muestran los resultados encontrados. Finalmente, en la sección 6 se presentan algunas conclusiones.

## 2. Revisión de literatura

Reynolds, Amin, Arnold y Nachals (1988) construyen las cartas de control  $\bar{X}$  con intervalos de muestreo variables utilizando los límites tradicionales  $3\sigma$  para datos normales estándar, y demuestran numéricamente que únicamente dos intervalos de muestreo son necesarios. Las longitudes de estos intervalos son  $d_1 = 0.1 \cdot L$  y  $d_2 = 1.9 \cdot L$ , donde  $L$  es la longitud del intervalo de muestreo para la carta de control tradicional con FSI.

Como las propiedades de una carta de control son determinadas por el tiempo que toma la carta en producir una señal de fuera de control, Reynolds, Amin y Nachlas (1988) consideran necesario definir nuevas cantidades para la carta con VSI, ya que en estas cartas el tiempo para señal no es múltiplo constante del número de muestras para señal, como sí sucede en la carta con FSI. Por tanto, para la carta con VSI es necesario medir el número de muestras para señal y el tiempo para señal.

El número de muestras que se toman antes de que la carta indique una señal es usualmente llamado longitud de racha en la literatura de control de calidad, y el número esperado de muestras es llamado longitud promedio de racha (ARL). Suárez (1993), define el ARL como el promedio del número de puntos muestrales que hay que graficar antes de tener un punto que indique una condición de fuera de control. Con un intervalo fijo entre muestras, el ARL puede ser convertido en el tiempo esperado para señal multiplicándolo por la longitud del intervalo fijo de muestreo, así el ARL puede ser tomado como el tiempo esperado para señal.

Por esto, se define el número de muestras para señal como el número de muestras tomadas desde el inicio del proceso hasta el momento en que la carta presenta señal de fuera de control, y el número promedio de muestras para señal (ANSS) es el valor esperado de número de muestras para señal de fuera de control.

El tiempo para señal se define como el tiempo desde el inicio del proceso hasta el momento en que la carta presenta una señal de fuera de control, y similarmente el promedio para señal (ATS) es el valor esperado del tiempo para señal.

Amin y Miller (1993), hicieron uso de la técnica de VSI cuando se realizan ligeras contaminaciones en la varianza de los datos, obteniendo resultados igualmente satisfactorios en cuanto al ATS de la carta de control  $\bar{X}$  con VSI.

Prybutok, Clayton y Harvey (1997), realizaron comparaciones entre los ATS de las dos cartas de control, obteniendo que la carta de control con VSI detecta más rápido cambios en los datos con relación a la carta de control con FSI.

### 3. Carta de control R con intervalos de muestreo variables

Siguiendo la sugerencia de Amin y colaboradores (1988), con respecto al número de regiones de muestreo, se propone una carta R con dos intervalos de muestreo, definidas de la siguiente manera:

$$I_1 = (\bar{R} - 3\sigma_R; \bar{R} - \gamma'\sigma_R] \cup [\bar{R} + \gamma'\sigma_R; \bar{R} + 3\sigma_R)$$

e

$$I_2 = (\bar{R} - \gamma'\sigma_R; \bar{R} + \gamma'\sigma_R)$$

Donde  $\bar{R}$  es el valor objetivo, o rango medio del proceso, y  $\gamma'$  es una constante múltiplo de la desviación estándar. El valor  $\gamma'$  se define haciendo que la probabilidad que una muestra se ubique en cualquiera de las dos regiones  $I_1$  e  $I_2$  sea igual. Para la carta  $\bar{X}$  con VSI, Prybutok, Clayton y HARvey (1997), muestran que el valor de  $\gamma'$  adecuado es 0.6766. Para este estudio el valor se calcula por simulación.

El parámetro  $\sigma_R$  es la desviación estándar de los rangos, la cual se estima a partir de los mismos. El límite de control inferior en una carta de control R es tradicionalmente tomada como cero, y como no existe garantía que  $\bar{R} - 3\sigma_R > 0$  todas las veces, en esta carta de control propuesta se sigue respetando el valor cero para el límite de control inferior.

Teniendo en cuenta las consideraciones anteriores, las regiones de muestreo para la carta de control R con VSI están dadas por:

$$I_1 = (0; \bar{R} - \gamma'\sigma_R] \cup [\bar{R} + \gamma'\sigma_R; \bar{R} + 3\sigma_R)$$

e

$$I_2 = (\bar{R} - \gamma' \sigma_R; \bar{R} + \gamma' \sigma_R)$$

La figura 1 muestra el esquema general de esta carta.

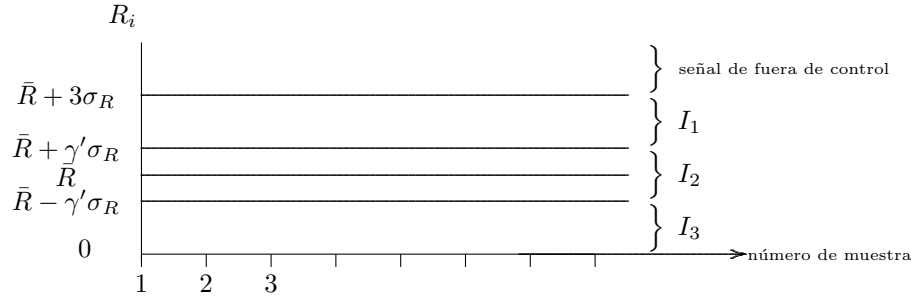


Figura 1. Carta de control R con VSI

En el momento que un punto se ubique por fuera de las regiones  $I_1$  y  $I_2$  establecidas anteriormente, éste es tomado como una señal que el proceso se encuentra fuera de control, y por tanto es necesario tomar medidas para lograr llevarlo a control nuevamente.

#### 4. Metodología

La comparación entre las cartas R con FSI y con VSI se llevó a cabo mediante métodos de simulación. El procedimiento realizado, usando el paquete estadístico S-PLUS fue el siguiente:

1. Se generaron 10000 muestras aleatorias de tamaño 5, provenientes de una distribución normal estándar, y a cada una de ellas se le calculó el valor del rango muestral. Luego, a partir de estos 10000 rangos, se hace la estimación de su desviación estándar y su rango medio, y estos valores son los que se predeterminan para la construcción de los límites de las regiones de control. El valor encontrado para  $\sigma_R$  fue 0.899540 y para  $\bar{R}$  fue 2.30011.

2. Se parte del supuesto que los rangos de las muestras poseen igual probabilidad de pertenecer a cualquiera de las regiones de muestreo  $I_1$  e  $I_2$ .

Es por esta razón que se plantea la siguiente igualdad:

$$P[R \in I_1] = P[R \in I_2]$$

Y como los valores  $\bar{R}$  y  $\sigma_R$  son conocido, el  $\gamma'$  que cumple con la condición anterior es 0.680. Por tanto las regiones de muestreo en las cuales se ubicarán los rangos estarán dadas por:  $I_1 = (0; 1.691324] \cup [2.914698; 5.001630)$   $I_2 = (1.691324; 2.914698)$

3. Se generaron 10000 nuevas muestras de tamaño 5, a las cuales se les calcula el rango muestral. Es necesario definir la longitud  $L$  del intervalo de muestreo para la carta R con FSI, ya que la longitud del intervalo corto de muestreo es  $0.1 \cdot L$  y la longitud del intervalo largo de muestreo es  $1.9 \cdot L$  para la carta con VSI. Por facilidad a la hora de hacer los cálculos y del estudio realizado por Prybutok, Clayton y Harvey (1997) se escoge este valor como  $L = 10$ .

De esta manera se dejan pasar 10 unidades de tiempo, se toma la muestra en el tiempo 11, se calcula su rango y se observa si  $R_{11} \in I_1$ , si  $R_{11} \in I_2$ , o si no pertenece a ninguna de las dos regiones. Cuando  $R_{11} \in I_2$  el siguiente rango se toma después de  $1.9 \cdot L$  unidades de tiempo; cuando  $R_{11} \in I_1$  el rango siguiente se toma después de  $0.1 \cdot L$  unidades de tiempo y cuando  $R_{11}$  se ubica por fuera de estas regiones se detiene el proceso. Igualmente para la carta R con FSI la longitud del intervalo de muestreo es  $L = 10$ . Esto indica que cada 10 unidades de tiempo se mide el rango de una muestra, se ubica, y dependiendo su valor se dejan pasar otras 10 unidades de tiempo o se detiene el proceso.

4. Cada vez que se calculan los 10000 rangos y se ubican, se cuentan cuántos de ellos se ubicaron en la región de muestreo  $I_1$  y en la región de muestreo  $I_2$  para la carta R con VSI; se cuentan también cuántos se ubicaron en la región de control de la carta R con FSI, y de esta manera se puede saber cuál es la medida de tiempo para señal y el número de muestras tomadas antes que se presente una señal de fuera de control en cada una de las cartas.

Por tanto, para poder obtener el ATS y el ANSS es necesario repetir el procedimiento de generación y ubicación de los rangos  $p$  veces, sumar todos los TS y los NSS, y después promediar estas cantidades, obteniendo así los valores necesarios para hacer las comparaciones entre las dos cartas de control R, la propuesta y la tradicional.

En este trabajo de simulación se tomó el valor  $p=2000$  para cada uno de los programas requeridos.

## 5. Resultados de la simulación

Los resultados de las simulaciones son resumidos en las tablas 1-6. Estas tablas muestran el tiempo promedio para señal (ATS) y el número de muestras promedio para señal (ANSS) bajo diferentes condiciones de variabilidad. En todas las tablas se muestra el efecto de contaminación de la varianza sobre el ATS cuando el valor de  $L$  es 10.

Tabla 1. Valores del ATS y del ANSS para datos provenientes de una distribución normal estándar en cartas R con VSI y FSI, cuando  $L = 10$

ATS		ANSS	
VSI	FSI	VSI	FSI
2589.5030	2594.3350	250.8350	259.4335

En la tabla 1, se hace una comparación entre el ATS y el ANSS de las cartas de control R con FSI y con VSI. Teóricamente es de esperarse que los valores de ATS y ANSS para las cartas con VSI y con FSI coincidan, cuando  $L = 1$ , pero como en este caso para poder hacer los cálculos de simulación del tiempo entre la toma de las muestras  $L = 10$ , hay una pequeña distorsión de sus valores.

Al hacer el cálculo del valor de  $q$  ( $1/\text{ANSS}$ ) el cual corresponde al error tipo I, probabilidad que alguno de los puntos quede ubicado por fuera de los límites de control cuando el proceso no ha cambiado, éste es muy pequeño para ambas cartas, 0.003987 para la carta R con FSI, lo cual era lo esperado ya que los puntos son provenientes de una distribución normal estándar.

Los resultados de las tablas 2-5, corresponden a datos que han sido contaminados aleatoriamente en su varianza en distintos porcentajes. Lo que se desea ver es cuál de las cartas detecta de forma más rápida y haciendo uso de la menor cantidad de muestras, la contaminación realizada.

La notación  $(100 - X)\%N(0, 1) + X\%N(0, \sigma^2)$  indica que los datos de la distribución normal estándar han sido contaminados en porcentajes  $X$ , por ejemplo  $X = 10$  significa que el 10% de los datos tiene distribución  $N(0, \sigma^2)$  y el 90% restante se distribuye normal estándar.

Tabla 2. Valores del ATS y del ANSS para datos provenientes de una distribución mixta  $(100 - X)\%N(0, 1) + X\%N(0, 4)$  en cartas R con VSI y FSI, cuando  $L = 10$

	ATS		ANSS	
X	VSI	FSI	VSI	FSI
0	2589.5030	2594.3350	250.8350	259.4335
5	511.9380	551.3600	51.4620	55.1360
10	246.5880	274.0200	20.5840	27.4020
15	169.6830	183.1800	18.1230	18.3180
20	109.1890	125.9000	12.1870	12.5900
25	91.8980	106.7900	10.5740	10.6790
30	66.6670	82.9800	7.8430	8.2980

En la tabla 2 se muestra la comparación del ATS y del ANSS para las cartas R con VSI y con FSI cuando la varianza de los datos ha sido contaminada de forma aleatoria en diferentes porcentajes con el valor 4.

En estas cartas, el ATS es menor para la carta R con VSI, mostrándose que la técnica propuesta, detecta de forma más rápida alteraciones en la varianza de los datos.

De la tabla se deduce que cuando el porcentaje de contaminación es del 5%, la carta con VSI presenta una diferencia de 39.4220 unidades de tiempo en el valor del ATS y de 3.6720 muestras en el ANSS con respecto a la carta con FSI. Cuando el porcentaje de contaminación es del 10%, la carta con VSI presenta una diferencia de 27.4320 unidades de tiempo en el valor del ATS y de 1.8180 muestras en el ANSS comparado con la carta con FSI, y cuando el porcentaje de contaminación es del 30%, la carta con VSI presenta una diferencia de 16.3130 unidades de tiempo en el valor del ATS y de 0.4550 muestras en el ANSS con respecto a la carta con FSI.

Tabla 3. Valores del ATS y del ANSS para datos provenientes de una distribución mixta  $(100 - X)\%N(0, 1) + X\%N(0, 9)$  en cartas R con VSI y FSI, cuando  $L = 10$

X	ATS		ANSS	
	VSI	FSI	VSI	FSI
0	2589.5030	2594.3350	250.8350	259.4335
5	173.0800	177.5200	17.5600	17.7520
10	85.1870	94.0300	9.0110	9.4030
15	51.5180	55.8700	5.7260	5.5870
20	37.8050	41.6300	4.3970	4.1630
25	25.8830	31.4500	3.2210	3.1450
30	15.5290	23.0600	2.4290	2.3060

En la tabla 3 se muestra la comparación del ATS y del ANSS para las cartas R con VSI y con FSI cuando la varianza de los datos ha sido contaminada de forma aleatoria en diferentes porcentajes, con el valor 9. Igual que en el caso anterior, el ATS es menor para la carta R con VSI. La interpretación de estos valores es similar a la dada arriba para la tabla 2. Así por ejemplo, cuando el porcentaje de contaminación es del 10%, la carta con VSI presenta una diferencia de 8.843 unidades de tiempo en el valor de ATS y de 0.392 muestras en el ANSS con respecto a la carta con FSI.

Las tablas 4 y 5 presentan los resultados para el ATS y ANSS de las cartas de control R con VSI y con FSI cuando la varianza de los datos ha sido contaminada de forma aleatoria en distintos porcentajes con los valores 25 y 100 respectivamente.

Tabla 4. Valores del ATS y del ANSS para datos provenientes de una distribución mixta  $(100 - X)\%N(0, 1) + X\%N(0, 25)$  en cartas R con VSI y FSI, cuando  $L = 10$

	ATS		ANSS	
X	VSI	FSI	VSI	FSI
0	2589.5030	2594.3350	250.8350	259.4335
5	84.3410	86.17000	8.5790	8.6170
10	37.1140	39.5300	3.9040	3.9530
15	20.8900	25.0300	2.2960	2.5030
20	13.7430	17.5500	1.6470	1.7550
25	10.1380	12.0300	1.2100	1.2030
30	7.3380	9.2100	0.9120	0.9210

Tabla 5. Valores del ATS y del ANSS para datos provenientes de una distribución mixta  $(100 - X)\%N(0, 1) + X\%N(0, 100)$  en cartas R con VSI y FSI, cuando  $L = 10$

	ATS		ANSS	
X	VSI	FSI	VSI	FSI
0	2589.5030	2594.3350	250.8350	259.4335
5	15.6710	150.7400	14.9330	15.0740
10	77.9090	87.0700	8.2130	8.7070
15	12.3460	13.2100	1.3480	1.3210
20	7.9140	8.1600	0.8760	0.8160
25	5.7290	6.3300	0.6210	0.6330
30	3.1640	4.2800	0.4280	0.4280

En la figura 2 y 3 se comparan las dos cartas para el mismo conjunto de datos. En estas cartas se puede notar claramente como la carta con VSI necesita de menos tiempo y a la vez menos muestras para detectar que el proceso se encuentra por fuera de control. Mientras la carta con VSI necesita de 13 muestras y de 90 unidades de tiempo para detectar una señal de fuera de control, la carta con FSI para los mismos datos necesita 19 muestras y 192 unidades de tiempo para detectar igualmente una señal de fuera de control.



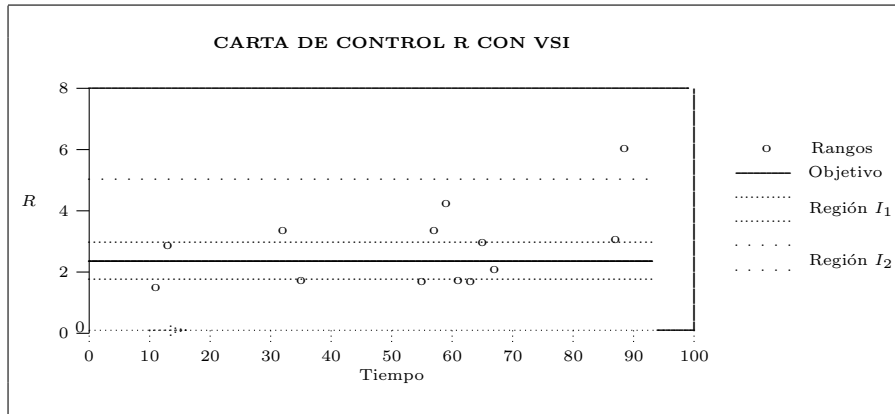


Figura 2. Carta de control R con VSI para datos  $0.90N(0,1)+0.10N(0,4)$

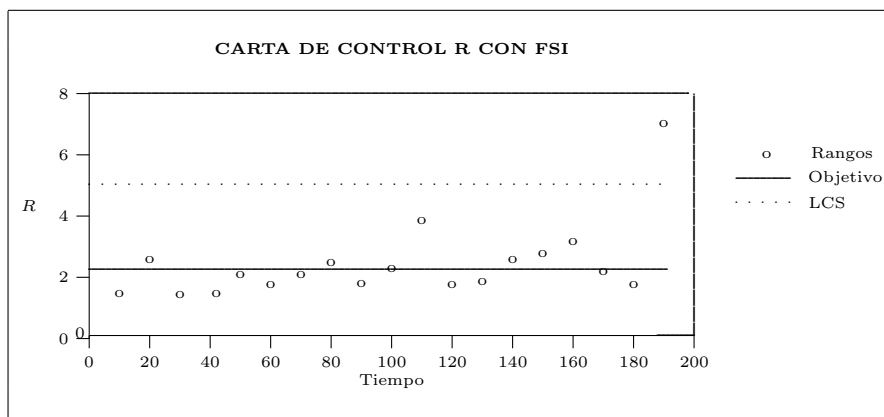


Figura 3. Carta de control R con FSI para datos  $0.90N(0,1)+0.10N(0,4)$

Por último, los resultados de la tabla 6 corresponden a datos que han sido contaminados de forma predeterminada en su varianza a partir del valor 1001 con datos pertenecientes a distribuciones  $N(0,2.25)$ ,  $N(0,4)$ ,  $N(0,9)$  y  $N(0,16)$  respectivamente. Al igual que en los casos anteriores, se desea notar cuál de las cartas R con VSI o R con FSI, detecta en forma rápida una alteración en la varianza del proceso, en este caso, cuando se presenta un cambio persistente en la variabilidad de los datos.

Tabla 6. Valores del ATS y del ANSS para datos provenientes de una distribución normal con cambio persistente en la varianza a partir del dato 1001 en cartas R con VSI y FSI, cuando  $L = 10$

$\sigma^2$ a partir del dato 1001	ATS		ANSS	
	VSI	FSI	VSI	FSI
1.00	2589.503	2594.335	250.835	259.4335
2.25	508.308	528.430	52.962	52.843
4.00	128.361	147.110	14.637	14.711
9.00	31.023	39.100	4.005	3.910
16.00	15.518	20.480	2.108	2.048

Aquí la carta con VSI presenta resultados sistemáticamente menores con respecto a los de la carta con FSI en cuanto a la medida del ATS.

Cuando a partir del dato 1001 la distribución de los datos sufre un ligero incremento en su varianza, es decir cambia de una  $N(0,1)$  a una  $N(0,2.25)$  el valor del ATS para la carta con VSI es 20.122 unidades de tiempo menor que el de la carta con FSI. En el ANSS no se puede notar mayor diferencia entre sus valores, sin embargo, la carta con VSI es ligeramente mayor con 0.119 unidades.

Ahora, si la distribución a partir del dato 1001 cambia de  $N(0,1)$  a  $N(0,4)$  se presenta el mismo comportamiento que en el caso anterior. La carta con VSI tarda en promedio menos tiempo que la carta con FSI para detectar el incremento de la varianza, necesitando de 18.769 unidades de tiempo menos que la carta con FSI. Tal como sucedió con los resultados anteriores, la diferencia en el ANSS es mínima, pero ahora la carta con VSI necesita de menos muestras en promedio, 0.074, para detectar un cambio en la varianza del proceso. También se puede ver que cuando la distribución de los datos cambia a partir del dato 1001 de  $N(0,1)$  a  $N(0,9)$ , se nota que hay diferencia en el tiempo para señal de ambas cartas. El ATS de la carta con VSI es 8.075 unidades de tiempo menor que el ATS de la carta R con FSI, pudiéndose determinar que cuando el cambio en la varianza es relativamente grande la carta con VSI también lo descubre de una forma más rápida que la carta con FSI. En este caso el ANSS de la carta con VSI es ligeramente mayor que el de la carta con FSI, hay entre ellos una diferencia 0.095 unidades. Como último caso se tomó uno en el cual la distribución de los datos cambia a a partir del dato 1001 de una  $N(0,1)$  a  $N(0,16)$ , y al igual que en las 3 ocasiones anteriores, se presentan diferencia en el ATS de las cartas, siendo el de la carta con VSI menor con 4.962 unidades de tiempo. En el ANSS también se presenta una diferencia de 0.060 muestras, siendo el de la carta con FSI menor que el de la carta con VSI.

## 6. Conclusiones

Los resultados en este trabajo demuestran que la carta R con VSI puede reducir el tiempo requerido por la carta para detectar cambios pequeños y grandes en la varianza de un proceso.

Es conveniente empezar con la construcción de un gráfico de control R con VSI antes que un gráfico de control  $\bar{X}$  con VSI, porque si la variabilidad del proceso está fuera de control, lo mejor es controlarla antes de construir la carta  $\bar{X}$ .

Una desventaja de la carta R con VSI es que el costo para administrarla puede ser mayor que el correspondiente a la carta con FSI, ya que los intervalos de muestreo especificados para la carta con VSI pueden no corresponder a los períodos naturales de trabajo del personal.

La idea anterior puede no ser una desventaja dependiendo del proceso al cual se le esté haciendo el seguimiento, por que si se hace una detección a tiempo de una señal fuera de control, esto implica ahorro en recursos económicos ya que se corregiría a tiempo la causa (o causas) que está provocando la alteración en el comportamiento de la varianza de los datos.

Se recomienda ampliar el trabajo con estas cartas, haciendo que la probabilidad que un punto pertenezca a alguna de las regiones  $I_1$  e  $I_2$  no sea la misma sino otorgando mayor probabilidad a la región  $I_2$  y observar si se sigue manteniendo el mismo comportamiento, de menor tiempo de detección en una señal de fuera de control, para las cartas con VSI frente a las cartas con FSI.

## Referencias

- [1] Amin, R. W., Nachlas, J. C., and Reynolds, M. R. Jr. (1988).  $\bar{X}$  Charts With Variable Sampling Intervals, *Technometrics*, Vol. 30.
- [2] Amin, R. W., and Miller, R. W. (1993). A Robustness Study of  $\bar{X}$  charts with variable sampling intervals, *Journal of Quality Technology*. Vol. 25, no. 1, 181–192.
- [3] Ceballos, L. S., y Sánchez, R. B. (1982). *Control Estadístico de Calidad en la Industria Militar*, Trabajo de Grado (Estadística). Universidad Nacional de Colombia, Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas y Estadística.
- [4] Prybutok, V. R., Clayton, H. R., Harvey, M. M. (1997) Comparison of Fixed Versus Variable Sampling Interval Shewhart  $\bar{X}$  Control Charts in the Presence of Positively Autocorrelated Data, *Commun. Statist. – Simula*. Vol. 26, 83–106.
- [5] S-PLUS. *Programmer's Guide*, Data Analysis Products Division, MathSoft, Seattle, WA. DUNOD, París, 1995.
- [6] Suárez, A. B. (1993). *Estudio Comparativo de los Diagramas de Control EWMA y CUSUM en Condiciones de No-normalidad*, Trabajo de Grado (Especialización en Estadística). Universidad Nacional de Colombia, Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas y Estadística.