Revista Colombiana de Estadística
Volumen 28 N^o 2. pp. 193 a 205. Diciembre 2005

Hoja browniana fraccional

Fractional Brownian Sheet

Liliana Blanco Castañeda*
Johanna Garzón Merchán**

Resumen

Se presenta la hoja browniana fraccional (hBf) o movimiento browniano fraccional en dos parámetros y algunas de sus propiedades importantes como son la autosimilaridad y la estacionaridad de los incrementos. Se incluyen además dos representaciones de la hBf, análogas a la representación en promedio móvil y en intervalo finito del movimiento browniano fraccional.

Palabras Claves: Movimiento browniano fraccional, procesos estocásticos en dos parámetros, hoja browniana, procesos autosimilares, procesos con incrementos estacionarios.

Abstract

Fractional brownian sheet or two parameter fractional brownian motion and some important properties with selfsimilar and stationary increments are presented. Moreover, two representations for hBf analogous to moving average and on an interval representations for fractional brownian motion are included.

Keywords: Fractional Brownian motion, two-parameter stochastic processes, Brownian sheet, selfsimilary processes, stationary increments processes.

1. Introducción

El estudio de procesos estocásticos ha sido motivado por la necesidad de modelar la evolución en el tiempo de ciertos fenómenos aleatorios. Por ejemplo, las crecientes del río Nilo fueron estudiadas por el inglés Harold Edwin Hurst quien observó un comportamiento cíclico consistente en que durante siete años consecutivos el nivel de las crecientes era mayor que en los siguientes siete años, lo cual

*Departamento de Estadística, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá. E-mail: lblancoc@unal.edu.co.
**Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá. E-mail: mjgarzonm@unal.edu.co.

creaba a su vez un ciclo de siete años de abundancia y siete años de escasez. Hasta ese momento se pensaba que no había dependencia del comportamiento de las crecientes entre un año y otro.

La investigación de Hurst motivó el estudio del proceso que ahora conocemos como movimiento browniano fraccional, fuente de numerosas investigaciones por sus aplicaciones en áreas como hidráulica, metereología, comunicaciones y finanzas.

En áreas de investigación como la estadística, la física y las comunicaciones se considera la evolución de ciertos fenómenos aleatorios tanto en el tiempo como en el espacio, dando origen al estudio de procesos estocásticos en dos parámetros. Durante la década de los 70 se publicaron numerosos artículos acerca de esta clase de procesos, destacándose el trabajo realizado por Wong & Zakai (1974) quienes presentaron la teoría más relevante de estos procesos.

La hoja browniana (hBf) es una generalización a dos parámetros del movimiento browniano. Por ser un proceso markoviano y una semimartingala se le han adaptado cálculos análogos a los desarrollados por Itô. En Wong & Zakai (1974) se presenta la integral estocástica respecto a la hoja browniana y una representación de martingalas en dos parámetros mediante esta clase de integral. En los últimos años se ha despertado un gran interés por el estudio de procesos que presentan dependencia a gran distancia y no son semimartingalas, como es el caso del movimiento browniano fraccional.

Recientemente, muchos autores han estudiado la hBf: Bardina, Jolis & Tudor (2002) la presentan como límite débil de procesos construidos a partir de un proceso de Poisson en el plano. Leger (2000) presenta una estimación de los parámetros de autosimilaridad de la hBf. Aplicando el cálculo de Malliavin, Tudor & Viens (2003) derivan una fórmula de Itô para la hBf con parámetros de Hurst mayores que 1/2. En ecuaciones diferenciales parciales estocásticas se destacan los trabajos de Erraoui, Nualart & Ouknine (2003) y de Oksendal & Zhang (2000). Ayache & Xiao (2004) estudian las propiedades asintóticas y la dimensión de Hausdorff de la hBf.

El objetivo principal de este artículo es definir y presentar las propiedades básicas y representaciones diferentes de la hoja browniana fraccional, lo cual se desarrollará en la sección 3. En la sección 2 presentaremos algunos preliminares sobre el movimiento browniano fraccional y sobre procesos estocásticos en dos parámetros.

2. Preliminares

En esta sección presentaremos la definición y las propiedades principales del movimiento browniano fraccional (mBf). Extendemos algunas nociones de procesos estocásticos en un parámetro a dos, como la autosimilaridad y la estacionaridad de los incrementos. Como ejemplo de procesos en dos parámetros presentamos la hoja browniana (hb) y la integral estocástica respecto a este proceso. Las demostraciones omitidas y los detalles sobre los temas pueden consultarse en Nualart (2003) para mBf y en Garzón (2002) para procesos en dos parámetros.

2.1. Movimiento browniano fraccional

Los procesos estocásticos autosimilares son procesos cuyas trayectorias son equivalentes si se reescalan adecuadamente el tiempo y la amplitud. Esto es, $\{X_t\}_{t\in I}$ es autosimilar si al hacer un cambio de escala en el tiempo por un factor $\alpha > 0$, existe un factor $C_\alpha > 0$ que hace un cambio de escala en la amplitud tal que $\{X(\alpha t)\}_{t\in I} \overset{\mathrm{d}}{=} \{C_\alpha X_t\}_{t\in I}$, donde $\overset{\mathrm{d}}{=}$ denota la igualdad de las distribuciones finito dimensionales de los procesos. La función C_α está dada por α^H para algún $H > 0$. A la constante H se le llama el índice de autosimilaridad o parámetro de Hurst (Figueroa 2000). De manera formal se tiene:

Definición 2.1. *Un proceso estocástico $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ es autosimilar, si existe $H > 0$ tal que para todo $\alpha > 0$ se satisface*

$$X_{\alpha t} \overset{d}{=} \alpha^H X_t \tag{2.1}$$

En este caso, decimos que $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ es $H - ss$, esto es, un proceso autosimilar con parámetro H.

Intuitivamente, si un proceso es autosimilar entonces las trayectorias de $X_{\alpha t}$ y $\alpha^H X_t$ aun cuando no son idénticas, son similares visualmente. El más estudiado es el movimiento browniano fraccional que definimos a continuación:

Definición 2.2. *Un movimiento browniano fraccional (mBf) con parámetro de Hurst $H \in (0, 1)$, $W^H = \{W_t^H : t \in \mathbb{R}^+\}$ es un proceso gaussiano centrado cuya función de covarianza está dada por:*

$$R(s,t) = E(W_t^H W_s^H) = \frac{1}{2}(t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H}) \tag{2.2}$$

Éste es un proceso autosimilar, con incrementos estacionarios y media finita. Admite una versión continua y se puede representar de la siguiente forma, conocida como *representación en promedio móvil*:

$$W_t^H = \frac{1}{C(H)} \int_{\mathbb{R}} f_H(t,u) dB_u$$

donde $f_H(t,u) = (t-u)_+^{H-\frac{1}{2}} - (-u)_+^{H-\frac{1}{2}} \in L^2(\mathbb{R})$ con $a_+ = max\{a, 0\}$, $C_H = \int_{\mathbb{R}} f_H^2(1,u)du = \left\{\int_0^\infty \left[(1+u)^{H-\frac{1}{2}} - u^{H-\frac{1}{2}}\right]^2 du + \frac{1}{2H}\right\}^{1/2}$ y $\{B_t : t \geq 0\}$ es el movimiento browniano estándar (mB).

La siguiente representación integral del mBf sobre un intervalo finito permite hacer algunas construcciones y cálculos estocásticos respecto al mBf.

$$W_t^H = \int_0^t K_H(t,s) dB_s$$

donde B es un mB y el núcleo K_H está dado por:

$$K_H(t,s) =$$
$$\left[\zeta_H (t-s)^{H-\frac{1}{2}} + \zeta_H \left(\frac{1}{2} - H\right) \int_s^t (u-s)^{H-\frac{3}{2}} \left(1 - \left(\frac{s}{u}\right)^{\frac{1}{2}-H}\right) du\right] 1_{(0,t)}(s) \tag{2.3}$$

y

$$\zeta_H = \left(\frac{2H\Gamma\big(\frac{3}{2} - H\big)}{\Gamma\big(H + \frac{1}{2}\big)\Gamma\big(2 - 2H\big)} \right)^{\frac{1}{2}}$$

El núcleo K_H satisface que

$$\int_0^{t\wedge s} K_H(t,u)K_H(s,u)du = Cov(B_t^H, B_s^H) \tag{2.4}$$

donde $t \wedge s = \text{mín}\{t, s\}$.

2.2. Procesos en dos parámetros

Se trabajará en un espacio de probabilidad completo $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ y en $\mathbb{R}_+^2$, el cuadrante positivo del plano. Si $z, z' \in \mathbb{R}_+^2$, $z = (s,t)$, $z' = (s', t')$ con $s, s', t, t' \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, usaremos el siguiente orden parcial en $\mathbb{R}_+^2$.

$$\text{“} \prec \text{”}: \quad z \prec z', \quad \text{si y sólo si,} \quad s \leq s' \quad \text{y} \quad t \leq t'$$

Sean $z, z' \in \mathbb{R}_+^2$, $z = (s,t)$ y $z' = (s',t')$, con $s < s'$ y $t < t'$, entonces $(z, z']$ denota el rectángulo $(s, s'] \times (t, t']$ y R_z el rectángulo $(0, z]$. También notamos como $z \vee z' := (s \vee s', t \vee t')$ y $z \wedge z' := (s \wedge s', t \wedge t')$, donde, $s \vee t = \text{máx}\{s, t\}$ y $s \wedge t = \text{mín}\{s, t\}$.

Definición 2.3. *Si $X = \{X_z : z \in \mathbb{R}_+^2\}$ es un proceso estocástico, se define el incremento de X en un rectángulo $(z, z']$ con $z = (s,t)$ y $z' = (s', t')$ como*

$$\Delta_z X_{z'} = \Delta_{s,t} X(s', t') \ := \ X_{(s',t')} - X_{(s,t')} - X_{(s',t)} + X_{(s,t)}$$

Definición 2.4. *Se dice que un proceso estocástico $X = \{X_z : z \in \mathbb{R}_+^2\}$ tiene incrementos estacionarios, si y sólo si, la distribución de los incrementos $\Delta_{s+h,t+k} X(s'+h, t'+k)$ depende sólo del área $(s'-s)(t'-t)$ del rectángulo, es decir,*

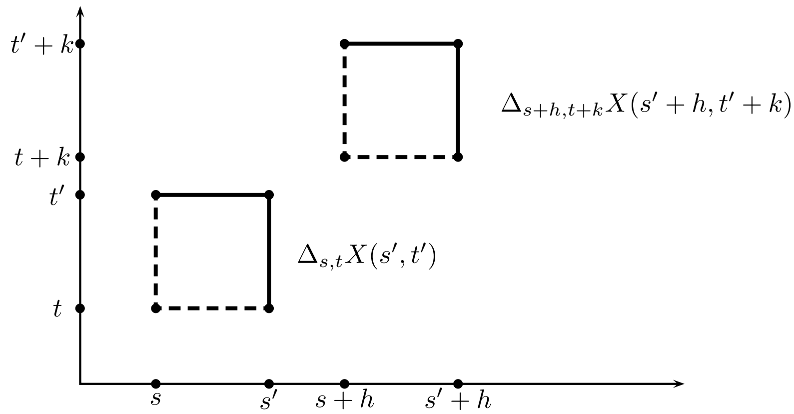
$$\Delta_{s+h,t+k} X(s'+h, t'+k) \ \stackrel{d}{=} \ \Delta_{s,t} X(s', t')$$

A continuación generalizamos el concepto de autosimilaridad para procesos en dos parámetros. Intuitivamente, un proceso estocástico $\{X_z : z \in \mathbb{R}_+^2\}$ es autosimilar si sus trayectorias son equivalentes cuando se reescalan el tiempo, el espacio y la amplitud adecuadamente.

Definición 2.5. *$X = \{X_z : z \in \mathbb{R}_+^2\}$ es un proceso autosimilar si existen $\alpha > 0$ y $\beta > 0$ tales que para todo $(0,0) \prec (h,k)$*

$$X_{(hs,kt)} \ \stackrel{d}{=} \ h^\alpha k^\beta X_{(s,t)}$$

En este caso, decimos que $\{X_t\}_{t \in \mathbb{R}_+^2}$ es $(\alpha, \beta) - ss$, esto es, un proceso autosimilar con parámetros (α, β).



Definición 2.6. *Sea $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ un espacio de probabilidad $P-$completo. Un movimiento browniano de dos parámetros u hoja browniana es un proceso estocástico B_z con $z=(s,t)\in\mathbb{R}_+^2$ que satisface*

i) $B_{(s,0)} = B_{(0,t)} = 0$.

ii) Si $(z_1, z_1']$ y $(z_2, z_2']$ son rectángulos disyuntos entonces $B((z_1, z_1'])$ y $B((z_2, z_2'])$ son independientes.

iii) Si $s' > s$, $t' > t$, para $z=(s,t)$, $z'=(s',t')$ la variable aleatoria $B((z,z'])$ es gaussiana centrada con varianza $(s'-s)\cdot(t'-t)$.

donde $B((z,z']) = \Delta_z B_{z'}$

Una hoja browniana es un proceso gaussiano de dos parámetros $B_{(s,t)}$ centrado y con varianza st

Por el criterio de continuidad de Kolmogorov, la hoja browniana $\{B_z : z\in\mathbb{R}_+^2\}$ posee una versión continua.

Además, para cada $s\geq 0$, el proceso estocástico $\{B_t = B_{(s,t)} : t\geq 0\}$ es un movimiento browniano en un parámetro.

Teorema 2.7. *La hoja browniana es un proceso autosimilar de parámetros* $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

Demostración. Sea $(h,k)\in\mathbb{R}_+^2$ tal que $(0,0)\prec(h,k)$. Como $E\big(h^{\frac{1}{2}}k^{\frac{1}{2}}B_{(s,t)}\big) = h^{\frac{1}{2}}k^{\frac{1}{2}}E\big(B_{(s,t)}\big) = 0$ y $E\Big[\big(h^{\frac{1}{2}}k^{\frac{1}{2}}B_{(s,k)}\big)^2\Big] = hkE\Big[\big(B_{(s,k)}\big)^2\Big] = hk[st]$ entonces $h^{\frac{1}{2}}k^{\frac{1}{2}}B_{(s,t)} \stackrel{d}{=} N(0,hkst)$. Además, como $B_{(hs,kt)} \stackrel{d}{=} N(0,hskt)$ entonces $B_{(hs,kt)} \stackrel{d}{=} h^{\alpha}k^{\beta}B_{(s,t)}$ □

Presentamos a continuación la integración estocástica en $\mathbb{R}_+^2$ con respecto a la hoja browniana, este concepto nos permitirá mas adelante dar diferentes representaciones de la hBf. La definición de esta integral se realiza de manera análoga a la definición de integral estocástica en un parámetro, de la siguiente forma:

1. Se define la integral para funciones indicadoras.
2. Se extiende la definición por linealidad a funciones simples.
3. Se usa una estimación en L^2 para extender a funciones aproximables por funciones simples.

La construcción y propiedades de la integral pueden consultarse en Garzón (2002).

Definición 2.8. *$\mathcal{L}_0^2$ es el espacio de todas las funciones*

$$\begin{aligned} f:\ \mathbb{R}_+^2 \times \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (z,\omega) &\longmapsto f_z(\omega) \end{aligned}$$

que satisfacen:

i) *f es $\mathcal{B}^2 \times \mathfrak{F}$ medible, donde $\mathcal{B}^2$ es la σ-álgebra de los conjuntos de Borel de $\mathbb{R}_+^2$.*

ii) *f_z es $(\mathfrak{F}_z)$-adaptado.*

iii) *$E\big(\int_{\mathbb{R}_+^2} f_z^2\, dz\big) < \infty$.*

$\mathcal{L}_0^2$ es un subespacio del espacio de Hilbert $L^2(\mathbb{R}_+^2 \times \Omega, \mathcal{B}^2 \otimes \mathfrak{F}, dt \otimes dP)$ bajo la siguiente norma:

$$\| f \| := \left(E\left[\int_{\mathbb{R}_+^2} f_z^2\, d_z\right]\right)^{1/2} < \infty$$

donde $\mathcal{B}^2 \otimes \mathfrak{F}$ y $dt \otimes dP$ representan la σ-álgebra producto y la medida de probabilidad producto, respectivamente, en el espacio $\mathbb{R}_+^2 \times \Omega$.

Definición 2.9. *Llamamos función indicadora a una función de la forma*

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R}_+^2 \times \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (z,\omega) &\longmapsto \phi_z(\omega) = X(\omega) I_A(z) \end{aligned}$$

donde $A = (z', z'']$ es un rectángulo en $\mathbb{R}_+^2$ y X es una variable aleatoria acotada y $\mathfrak{F}_{z'}-$medible.

Definición 2.10. *Decimos que f es una función simple si existe un número finito de rectángulos $A_i = (z_i', z_i'']$ y variables aleatorias acotadas X_i, tal que X_i es $\mathfrak{F}_{z_i'}-$medible y*

$$f_z(\omega) = \sum_i X_i(\omega) I_{A_i}(z)$$

es decir, f es la suma de funciones indicadoras $f_i = X_i I_{A_i}(z)$.

Las funciones indicadoras y las funciones simples pertenecen a $\mathcal{L}_0^2$. En Garzón (2002) se demuestra que el conjunto de funciones simples es denso en $\mathcal{L}_0^2$.

Definición 2.11. *Para una función $f \in \mathcal{L}_0^2$, definimos la integral estocástica $fB_z = \int_{R_z} f dB$ de la siguiente manera:*

1. *Si f es una función indicadora, $f_{\tilde{z}} = X(\omega) I_A(\tilde{z})$ con $A = (z', z''] \subset \mathbb{R}_+^2$ entonces*

$$fB_z := \int_{R_z} f_{\tilde{z}} dB(\tilde{z}) := XB(A \cap R_z)$$

2. *Si f es una función simple, $f = f_1 + f_2 + \cdots + f_n$ donde $f_1, \ldots, f_n$ son funciones indicadoras, entonces*

$$fB = f_1 B + \cdots + f_n B$$

3. *Si $\lim_{n \to \infty} f_n = f$ en $\mathcal{L}_0^2$ donde (f_n) es una sucesión de funciones simples, entonces*

$$fB_z = \int_{R_z} f dB = \lim_{n \to \infty} f_n B_z$$

Se debe observar que la integral está bien definida, es decir, que dos aproximaciones diferentes de f llevan al mismo valor de la integral.

Teorema 2.12. *La integral estocástica $fB = \{fB_z : z \in \mathbb{R}_+^2\}$ tiene las siguientes propiedades:*

1. *Es un proceso estocástico continuo.*

2. *Linealidad:* $\qquad (\alpha f + \beta g) B_z = \alpha f \cdot B_z + \beta f \cdot B_z$

3. *Isometría:*

$$E\big[(fB_z)^2\big] = E\left[\int_{R_z} f_u^2 du\right], \; u \in \mathbb{R}_+^2 \tag{2.5}$$

4. *Para todo $f, g \in \mathcal{L}_0^2$*

$$E[fB_z . gB_z] = E\left[\int_{R_z} f_u . g_u du\right] \tag{2.6}$$

5. *Para todo $f, g \in \mathcal{L}_0^2$, $z_1, z_2 \in \mathbb{R}_+^2$*

$$E[fB_{z_1} . gB_{z_2}] = E\left[\int_{R_{z_1 \wedge z_2}} f_u . g_u du\right] \tag{2.7}$$

6. *La integral estocástica fB es una martingala respecto a la filtración generada por la hB.*

3. Hoja browniana fraccional

En este capítulo se presentará la definición y las propiedades básicas de la hoja browniana fraccional.

Definición 3.1. *Un movimiento browniano fraccional en dos parámetros u hoja browniana fraccional (**hBf**) es un proceso estocástico* $W^{\alpha,\beta} = \{W_z^{\alpha,\beta} : z = (s,t) \in \mathbb{R}_+^2\}$ *con* $\alpha, \beta \in (0,1)$ *que satisface*

1. $W_{(s,0)}^{\alpha,\beta} = W_{(0,t)}^{\alpha,\beta} = 0$ *c.s.*
2. $W^{\alpha,\beta}$ *es un proceso gaussiano centrado.*
3. *La covarianza de* $W^{\alpha,\beta}$ *está determinada por*

$$E\big(W_z^{\alpha,\beta} W_{z'}^{\alpha,\beta}\big) = \frac{1}{2}\big({s'}^{2\alpha} + s^{2\alpha} - |s'-s|^{2\alpha}\big)\frac{1}{2}\big({t'}^{2\beta} + t^{2\beta} - |t'-t|^{2\beta}\big) \quad (3.1)$$

para $z = (s,t)$, $z' = (s',t')$ *con* $z \prec z'$.

Teorema 3.2. *La hoja browniana fraccional es un proceso autosimilar con incrementos estacionarios*

Demostración. Sean $z_1 = (s,t)$, $z_2 = (s',t') \in \mathbb{R}_+^2$, $z \prec z'$ y $(0,0) \prec (h,k)$

$$\begin{aligned}
Cov\big(W_{(hs,kt)}^{\alpha,\beta}, W_{(hs',kt')}^{\alpha,\beta}\big) &= E\big(W_{(hs,kt)}^{\alpha,\beta}.W_{(hs',kt')}^{\alpha,\beta}\big)\\
&= \frac{1}{2}\big[(hs)^{2\alpha} + (hs')^{2\alpha} - |hs'-hs|^{2\alpha}\big]\frac{1}{2}\big[(kt)^{2\beta} + (kt')^{2\beta} - |kt-kt'|^{2\beta}\big]\\
&= \frac{1}{2}h^{2\alpha}k^{2\beta}\big(s^{2\alpha} + {s'}^{2\alpha} - |s'-s|^{2\alpha}\big)\frac{1}{2}\big(t^{2\beta} + {t'}^{2\beta} - |t-t'|^{2\beta}\big)\\
&= E\big(h^\alpha k^\beta W_{(s,t)}^{\alpha,\beta} h^\alpha k^\beta W_{(s,t)}^{\alpha,\beta}\big)\\
&= Cov\Big(h^\alpha k^\beta W_{(s,t)}^{\alpha,\beta}, h^\alpha k^\beta W_{(s,t)}^{\alpha,\beta}\Big)
\end{aligned}$$

Como el proceso $\{W_{(hs,kt)}^{\alpha,\beta} : (s,t) \in \mathbb{R}_+^2\}$ es gaussiano centrado con función de covarianza determinada anteriormente, entonces $W_{(hs,kt)}^{\alpha,\beta} \overset{d}{=} h^\alpha k^\beta W_{(s,t)}^{\alpha,\beta}$, con lo cual se obtiene la autosimilaridad.

Sean $z_1 = (s_1,t_1) \prec z_2 = (s_2,t_2)$ y $z_3 = (p_1,r_1) \prec z_4 = (p_2,r_2)$, calcularemos la covarianza de los incrementos:

Como $E(W_z^{\alpha,\beta}) = 0$ para todo $z \in \mathbb{R}_+^2$, entonces, $E[\Delta_{z_1} W^{\alpha,\beta} z_2] = 0$, luego,

$$\begin{aligned}
Cov\big[\Delta_{z_1} W^{\alpha,\beta} z_2, \Delta_{z_3} W^{\alpha,\beta} z_4\big] = E\big(\Delta_{z_1} W^{\alpha,\beta} z_2 \cdot \Delta_{z_3} W^{\alpha,\beta} z_4\big) =&\\
E\big[W_{z_1}^{\alpha,\beta}\Delta_{z_3} W^{\alpha,\beta} z_4\big] - E\big[W_{(s_1,t_2)}^{\alpha,\beta}\Delta_{z_3} W^{\alpha,\beta} z_4\big]&\\
- E\big[W_{(s_2,t_1)}^{\alpha,\beta}\Delta_{z_3} W^{\alpha,\beta} z_4\big] + E\big[W_{z_2}^{\alpha,\beta}\Delta_{z_3} W^{\alpha,\beta} z_4\big]& \quad (3.2)
\end{aligned}$$

Veamos primero que es $E\big(W^{\alpha,\beta}z_1 \cdot \Delta_{z_3} W^{\alpha,\beta}z_4\big)$. Para simplificar la notación, tomaremos $W = W^{\alpha,\beta}$ y en la fórmula de covarianza 3.1 no escribiremos los factores 1/2.

$$
\begin{aligned}
E\big(Wz_1 \cdot \Delta_{z_3} Wz_4\big) &= E(Wz_1W(p_1,r_1)) - E(Wz_1W(p_1,r_2)) \\
&\qquad - E(Wz_1W(p_2,r_1) + E(Wz_1W(p_2,r_2)) = \\
& s_1^{2\alpha}t_1^{2\beta} + s_1^{2\alpha}r_1^{2\beta} - s_1^{2\alpha}|t_1^{2\beta} - r_1^{2\beta}| + p_1^{2\alpha}t_1^{2\beta} + p_1^{2\alpha}r_1^{2\beta} \\
&\qquad - t_1^{2\beta}|s_1^{2\alpha} - p_1^{2\alpha}| - t_1^{2\beta}|s_1^{2\alpha} - p_1^{2\alpha}| - r_1^{2\beta}|s_1^{2\alpha} - p_1^{2\alpha}| \\
& + s_1^{2\alpha}t_1^{2\beta} + s_1^{2\alpha}r_2^{2\beta} - s_1^{2\alpha}|t_1^{2\beta} - r_2^{2\beta}| + p_2^{2\alpha}t_1^{2\beta} + p_2^{2\alpha}r_2^{2\beta} \\
&\qquad - t_1^{2\beta}|s_1^{2\alpha} - p_2^{2\alpha}| - t_1^{2\beta}|s_1^{2\alpha} - p_2^{2\alpha}| - r_2^{2\beta}|s_1^{2\alpha} - p_2^{2\alpha}| \\
& - s_1^{2\alpha}t_1^{2\beta} - s_1^{2\alpha}r_2^{2\beta} + s_1^{2\alpha}|t_1^{2\beta} - r_2^{2\beta}| - p_1^{2\alpha}t_1^{2\beta} - p_1^{2\alpha}r_2^{2\beta} \\
&\qquad + t_1^{2\beta}|s_1^{2\alpha} - p_1^{2\alpha}| - t_1^{2\beta}|s_1^{2\alpha} - p_1^{2\alpha}| + r_2^{2\beta}|s_1^{2\alpha} - p_1^{2\alpha}| \\
& - s_1^{2\alpha}t_1^{2\beta} - s_1^{2\alpha}r_1^{2\beta} + s_1^{2\alpha}|t_1^{2\beta} - r_1^{2\beta}| - p_2^{2\alpha}t_1^{2\beta} - p_2^{2\alpha}r_1^{2\beta} \\
&\qquad + t_1^{2\beta}|s_1^{2\alpha} - p_2^{2\alpha}| - t_1^{2\beta}|s_1^{2\alpha} - p_2^{2\alpha}| + r_1^{2\beta}|s_1^{2\alpha} - p_2^{2\alpha}| \\
& + |s_1^{2\alpha} - p_1^{2\alpha}||t_1^{2\beta} - r_1^{2\beta}| + |s_1^{2\alpha} - p_2^{2\alpha}||t_1^{2\beta} - r_2^{2\beta}| \\
&\qquad - |s_1^{2\alpha} - p_1^{2\alpha}||t_1^{2\beta} - r_2^{2\beta}| - |s_1^{2\alpha} - p_2^{2\alpha}||t_1^{2\beta} - r_1^{2\beta}| \\
& + |s_1^{2\alpha} - p_1^{2\alpha}||t_1^{2\beta} - r_1^{2\beta}| + |s_1^{2\alpha} - p_2^{2\alpha}||t_1^{2\beta} - r_2^{2\beta}| \\
&\qquad - |s_1^{2\alpha} - p_1^{2\alpha}||t_1^{2\beta} - r_2^{2\beta}| - |s_1^{2\alpha} - p_2^{2\alpha}||t_1^{2\beta} - r_1^{2\beta}| \\
=& p_1^{2\alpha}\big[|t_1^{2\beta} - r_2^{2\beta}| - |t_1^{2\beta} - r_1^{2\beta}|\big] + p_2^{2\alpha}\big[|t_1^{2\beta} - r_1^{2\beta}| - |t_1^{2\beta} - r_2^{2\beta}|\big] \\
& + r_1\big[|s_1^{2\alpha} - p_2^{2\alpha}| - |s_1^{2\alpha} - p_1|^{2\alpha}\big] + r_2\big[|s_1^{2\alpha} - p_1^{2\alpha}| - |s_1^{2\alpha} - p_2^{2\alpha}|\big] \\
& + |s_1^{2\alpha} - p_1^{2\alpha}|\big[|t_1^{2\beta} - r_1^{2\beta}| - |t_1^{2\beta} - r_2^{2\beta}|\big] + |s_1^{2\alpha} - p_2^{2\alpha}|\big[|t_1^{2\beta} - r_2^{2\beta}| - |t_1^{2\beta} - r_1^{2\beta}|\big]
\end{aligned} \tag{3.3}
$$

Aplicando el resultado anterior a los sumandos restantes de 3.2,

$$
\begin{aligned}
Cov\big(\Delta_{z_1}Wz_2, \Delta_{z_3}Wz_4\big) &= E[W(s_1,t_1)\Delta_{z_3}Wz_4)] - E[W(s_1,t_2)\Delta_{z_3}Wz_4)] \\
&\qquad - E\big[W(s_2,t_1)\Delta_{z_3}Wz_4)\big] + E\big[W(s_2,t_2)\Delta_{z_3}Wz_4)\big] = \\
& \frac{1}{4}|s_1 - p_1|^{2\alpha}\big[|t_1 - r_1|^{2\beta} - |t_1 - r_2|^{2\beta}\big] + \frac{1}{4}|s_1 - p_2|^{2\alpha}\big[|t_1 - r_2|^{2\beta} - |t_1 - r_1|^{2\beta}\big] \\
& - \frac{1}{4}|s_1 - p_1|^{2\alpha}\big[|t_2 - r_1|^{2\beta} - |t_2 - r_2|^{2\beta}\big] - \frac{1}{4}|s_1 - p_2|^{2\alpha}\big[|t_2 - r_2|^{2\beta} - |t_2 - r_1|^{2\beta}\big] \\
& - \frac{1}{4}|s_2 - p_1|^{2\alpha}\big[|t_1 - r_1|^{2\beta} - |t_1 - r_2|^{2\beta}\big] - \frac{1}{4}|s_2 - p_2|^{2\alpha}\big[|t_1 - r_2|^{2\beta} - |t_1 - r_1|^{2\beta}\big] \\
& + \frac{1}{4}|s_2 - p_1|^{2\alpha}\big[|t_2 - r_1|^{2\beta} - |t_2 - r_2|^{2\beta}\big] + \frac{1}{4}|s_2 - p_2|^{2\alpha}\big[|t_2 - r_2|^{2\beta} - |t_2 - r_1|^{2\beta}\big] \\
& = \frac{1}{4}\big\{|s_1 - p_1|^{2\alpha} - |s_1 - p_2|^{2\alpha} - |s_2 - p_1|^{2\alpha} + |s_2 - p_2|^{2\alpha}\big\} \\
&\qquad \times \big\{|t_1 - r_1|^{2\beta} - |t_1 - r_2|^{2\beta} - |t_2 - r_1|^{2\beta} + |t_2 - r_2|^{2\beta}\big\}
\end{aligned} \tag{3.4}
$$

siguiendo el resultado de 3.4,

$$\begin{aligned}
&Cov[\Delta_{(s_1+h,t_1+k)}W^{\alpha,\beta}(s_2+h,t_2+k),\Delta_{(p_1+h,r_1+k)}W^{\alpha,\beta}(p_2+h,r_2+k)]\\
&=E\big(\Delta_{(s_1+h,t_1+k)}W^{\alpha,\beta}(s_2+h,t_2+k)\Delta_{(p_1+h,r_1+k)}W^{\alpha,\beta}(p_2+h,r_2+k)\big)\\
&=\frac{1}{4}\big\{|(s_1+h)-(p_1+h)|^{2\alpha}-|(s_1+h)-(p_2+h)|^{2\alpha}\\
&\qquad\qquad -|(s_2+h)-(p_1+h)|^{2\alpha}+|(s_2+h)-(p_2+h)|^{2\alpha}\big\}\\
&\times\big\{|(t_1+k)-(r_1+k)|^{2\beta}-|(t_1+k)-(r_2+k)|^{2\beta}\\
&\qquad\qquad -|(t_2+k)-(r_1+k)|^{2\beta}+|(t_2+k)-(r_2+k)|^{2\beta}\big\}
\end{aligned}\tag{3.5}$$

De 3.4 y 3.5, las covarianzas de los los procesos son iguales, luego

$$\Delta_{s_1+h,t_1+k}W^{\alpha,\beta}(s_2+h,t_2+k)\overset{d}{=}\Delta_{s_1,t_2}W^{\alpha,\beta}(s_2,t_2)$$

con lo cual tenemos que la hBf tiene incrementos estacionarios. □

Corolario 3.3. *Los incrementos de la hoja browniana fraccionaria determinan un proceso estocástico gaussiano centrado cuya función de covarianza está dada por 3.4. Además,*

i) $E\left[\Delta_{s,t}W^{\alpha,\beta}(s',t')\right]=0$

ii) $E\left[\Delta_{s,t}W^{\alpha,\beta}(s',t')\right]^2=(s'-s)^{2\alpha}(t'-t)^{2\beta}$

Demostración. El resultado se tiene de los cálculos realizados anteriormente. □

Con base en la representación en promedio móvil del mBf, podemos extenderla a la hoja browniana fraccional de la siguiente manera:

Teorema 3.4. *Sea $W^{\alpha,\beta}$ una hBf con parámetros $\alpha,\beta\in(0,1)$ entonces para todo $(s,t)\in\mathbb{R}^2_+$*

$$W^{\alpha,\beta}_{(s,t)}=\frac{1}{C_\alpha C_\beta}\int_{\mathbb{R}^2}f_\alpha(s,u)f_\beta(t,v)dB_{(u,v)}$$

donde $B_{(u,v)}$ es la hoja browniana estándar y f_α,f_β y C_α,C_β son las funciones y constantes de la representación en promedio móvil de los movimientos brownianos fraccionales con parámetros α y β respectivamente.

Demostración.

1. La representación está bien definida, esto es, $f_\alpha(s,u)f_\beta(t,v)\in L^2(\mathbb{R}^2)$

$$\int_{\mathbb{R}^2_+}f^2_\alpha(s,u)f^2_\beta(t,v)dudv=\Big(\int_{\mathbb{R}}f^2_\alpha(s,u)du\Big)\Big(\int_{\mathbb{R}}f^2_\beta(t,v)dv\Big)<\infty$$

puesto que $f_\alpha,f_\beta\in L^2(\mathbb{R})$.

2. Tomando $X_{(s,t)} = \dfrac{1}{C_\alpha C_\beta} \int_{\mathbb{R}^2} f_\alpha(s,u) f_\beta(t,v) dB_{(u,v)}$, el proceso $X = \{X_z : z \in \mathbb{R}_+^2\}$ es un proceso gaussiano centrado:
Sean $n \in \mathbb{N}$, $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ y $(s_1,t_1), \ldots, (s_n,t_n) \in \mathbb{R}_+^2$
$$\sum_{i=1}^n x_i X_{(s_i,t_i)} = \frac{1}{C_\alpha C_\beta} \int_{\mathbb{R}} \Big(\sum_{i=1}^n x_i f_\alpha(s_i,u) f_\beta(t_i,v) \Big) dB_{(u,v)}$$
es una variable aleatoria normal puesto que $\sum_{i=1}^n x_i f_\alpha(s_i,u) f_\beta(t_i,v) \in L^2(\mathbb{R}^2)$ y la integral estocástica respecto a hB es un proceso gaussiano.

3. Para ver la covarianza del proceso X, utilizamos la propiedad (2.6):
$$\begin{aligned}
&E\big(X_{(s_1,t_1)} X_{(s_2,t_2)}\big) \\
&= \frac{1}{C_\alpha^2 C_\beta^2} E\Big[\Big(\int_{\mathbb{R}^2} f_\alpha(s_1,u) f_\beta(t_1,v) dB_{(u,v)} \Big) \Big(\int_{\mathbb{R}^2} f_\alpha(s_2,u) f_\beta(t_2,v) dB_{(u,v)} \Big) \Big] \\
&= \frac{1}{C_\alpha^2 C_\beta^2} E\Big[\int_{\mathbb{R}^2} f_\alpha(s_1,u) f_\beta(t_1,v) f_\alpha(s_2,u) f_\beta(t_2,v) \ d(u,v) \Big] \\
&= \frac{1}{C_\alpha^2 C_\beta^2} \int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\mathbb{R}} f_\alpha(s_1,u) f_\alpha(s_2,u) f_\beta(t_1,v) f_\beta(t_2,v) \ du \Big) \ dv \\
&= \frac{1}{C_\alpha^2 C_\beta^2} \int_{\mathbb{R}} \Big(f_\beta(t_1,v) f_\beta(t_2,v) \int_{\mathbb{R}} f_\alpha(s_1,u) f_\alpha(s_2,u) \ du \Big) \ dv \\
&= \frac{1}{C_\alpha C_\beta} \Big(\int_{\mathbb{R}} f_\alpha(s_1,u) f_\alpha(s_2,u) du \Big) \frac{1}{C_\alpha C_\beta} \Big(\int_{\mathbb{R}} f_\beta(t_1,v) f_\beta(t_2,v) dv \Big)
\end{aligned}$$
la última igualdad presenta el producto de las covarianzas de movimientos brownianos fraccionales con parámetros α y β, respectivamente, luego,
$$\begin{aligned}
Cov\big(X_{(s_1,t_1)}, X_{(s_2,t_2)}\big) = \frac{1}{2} \big\{ |s_1|^{2\alpha} + |s_2|^{2\alpha} - |s_1 - s_2|^{2\alpha} \big\} \\
\times \frac{1}{2} \big\{ |t_1|^{2\beta} + |t_2|^{2\beta} - |t_1 - t_2|^{2\beta} \big\}
\end{aligned}$$

4. Finamente, como $f_\alpha(0,v) = f_\beta(u,0) = 0$, entonces, $X_{(0,t)} = X_{(s,0)} = 0$ c.s.

luego el proceso X es un proceso gaussiano centrado que se anula en los ejes y tiene la misma función de covarianza que la hBf con parámetros α y β. $\square$

El siguiente teorema da la representación integral de la hBf sobre un rectángulo. Se trata de una extensión a dos parámetros de la representación integral del mBf sobre un intervalo finito dada en (2.3). En Erraoui et al. (2003) y Tudor & Viens (2003) se desarrollan cálculos estocásticos basados en esta representación, como la existencia de solución de algunas ecuaciones diferenciales estocásticas y la fórmula de Itô para la hBf.

Sea $K_\alpha(u,v)$ el núcleo definido en (2.3). Para $z=(s,t)$, $\zeta=(u,v)\in\mathbb{R}^2_+$ definimos el siguiente *kernel*:

$$K_{\alpha,\beta}(z,\zeta)=K_\alpha(s,u)K_\beta(t,v)$$

Teorema 3.5. *Sea $W^{\alpha,\beta}$ una hBf con parámetros $\alpha,\beta\in(0,1)$ entonces para todo $z\in\mathbb{R}^2_+$*

$$W^{\alpha,\beta}_z=\int_{R_z}K_{\alpha,\beta}(z,\zeta)dB_\zeta=\int_0^t\int_0^s K_\alpha(s,u)K_\beta(t,v)dB_{(u,v)} \tag{3.6}$$

Demostración. Vamos a ver que $X_z=\int_{R_z}K_{\alpha,\beta}(z,\zeta)dB_\zeta$ es un proceso gaussiano centrado cuya función de covarianza es la misma que la de la hBf.

Sean $n\in\mathbb{N}$, $(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ y $z_1=(s_1,t_1),\dots,z_n=(s_n,t_n)\in\mathbb{R}^2_+$

$$\sum_{i=1}^n x_iX_{(s_i,t_i)}=\sum_{i=1}^n x_i\int_{R_{z_i}}K_{\alpha,\beta}(z_i,\zeta)dB_\zeta=\int_{R_{z_i}}\Big(\sum_{i=1}^n x_iK_{\alpha,\beta}(z_i,\zeta)\Big)dB_\zeta$$

es una variable aleatoria normal con media 0 puesto que $\sum\limits_{i=1}^n x_iK_{\alpha,\beta}(z_i,\zeta)\in L^2(\mathbb{R}^2)$ y la integral estocástica respecto a hB es un proceso gaussiano.

Para calcular la covarianza del proceso X, tomamos $z_1=(s_1,t_1)$, $z_2=(s_2,t_2)$ y $\zeta=(u,v)$. Por la propiedad 2.7

$$\begin{aligned}
E(X_{z_1}X_{z_2})&=E\Big[\Big(\int_{R_{z_1}}K_{\alpha,\beta}(z_1,\zeta)dB_\zeta\Big)\Big(\int_{R_{z_2}}K_{\alpha,\beta}(z_2,\zeta)dB_\zeta\Big)\Big]\\
&=E\Big[\int_{R_{z_1\wedge z_2}}K_{\alpha,\beta}(z_1,\zeta)K_{\alpha,\beta}(z_2,\zeta)d(u,v)\Big]\\
&=\int_0^{s_1\wedge s_2}\int_0^{t_1\wedge t_2}K_\alpha(s_1,u)K_\beta(t_1,v)K_\alpha(s_2,u)K_\beta(t_2,v)dudv\\
&=\Big(\int_0^{s_1\wedge s_2}K_\alpha(s_1,u)K_\alpha(s_2,u)du\Big)\Big(\int_0^{t_1\wedge t_2}K_\beta(t_1,v)K_\beta(t_2,v)dv\Big)\\
&=Cov(W^\alpha_{s_1},W^\alpha_{s_2})\;Cov(W^\beta_{t_1},W^\beta_{t_2})
\end{aligned}$$

donde W^α, W^β son mBf. La última igualdad se tiene por la representación en intervalo finito del mBf. Entonces,

$$\begin{aligned}
Cov\big(X_{(s_1,t_1)},X_{(s_2,t_2)}\big)=\frac{1}{2}\big\{|s_1|^{2\alpha}+|s_2|^{2\alpha}-|s_1-s_2|^{2\alpha}\big\}\\
\times\frac{1}{2}\big\{|t_1|^{2\beta}+|t_2|^{2\beta}-|t_1-t_2|^{2\beta}\big\}
\end{aligned}$$

luego X es un proceso gaussiano centrado con la misma función de covarianza que la hBf. □

Recibido: 21 de Junio de 2005
Aceptado: 28 de Septiembre de 2005

Referencias

Ayache, A. & Xiao, Y. (2004), 'Asymptotic properties and Hausdorff dimension of fractional Brownian sheets'.

Bardina, X. & Jolis, M. (2000), 'Weak approximation of the Brownian sheet from a Poisson process in the plane', *Bernoulli* **6**(4), 653–665.

Bardina, X., Jolis, M. & Tudor, C. (2002), *Weak Convergence to the Fractional Brownian Sheet*, Universidad Autónoma de Barcelona.

Erraoui, M., Nualart, D. & Ouknine, Y. (2003), 'Hyperbolic stochastic partial differential equations with additive fractional brownian sheet', *Stochastic Dynamics* **3**, 121–139.

Figueroa, J. (2000), *Construcción de procesos autosimilares con varianza finita*, Sociedad Matemática Méxicana.

Garzón, J. (2002), 'Representación de Wong-Zakai de martingalas de dos parámetros cuadrado integrables', Universidad Nacional de Colombia, Sede Bogotá. Trabajo de grado.

Leger, S. (2000), Stochastic Analysis of Multifractal Signal and Parameters' Estimation, PhD thesis, Universidad de Orleans, France.

Nualart, D. (2003), 'Stochastic integration with respect to fractional Brownian motion and applications', *Contemporary Mathematics* **3**(39), 336.

Oksendal, B. & Zhang, T. (2000), 'Multiparameter fractional Brownian motion and quasi-linear stochastic differential equations', *Stochastics and Stochastics Reports* **71**, 141–163.

Stroock, D. (1982), *Topics in Stochastic Differential Equations*, Springer Verlag.

Tudor, C. & Viens, F. (2003), 'Itô formula and local time for the fractional Brownian sheet', *Electronic Journal of Probability* **8**(14), 1–31.

Walsh, J. (1980), 'An introduction to stochastic partial differential equations', *Lecture Notes in Math* **1215**, 239–491.

Wong, E. & Zakai, M. (1974), 'Martingales and stochastic integrals for processes with a dimensional parameter', *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie and Verw, Gebiete* **29**, 109–122.