

Comparación de metodologías para el análisis de datos de degradación para trayectorias lineales Comparison between Explicit and Approximate Degradation Data Analysis for Linear Paths

SERGIO YÁÑEZ^a, RONALD ANDRÉS GRANADA^b

ESCUELA DE ESTADÍSTICA, UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA, MEDELLÍN

Resumen

Se usarán conceptos de análisis de degradación en relación con la confiabilidad de un producto. Muchos mecanismos de falla pueden detectarse a través de procesos de degradación. La degradación es una debilidad que eventualmente puede causar la falla. Existen varios métodos de análisis para datos de degradación en confiabilidad. En este artículo se comparan los resultados de la metodología de análisis de degradación explícita y de la metodología de análisis de degradación aproximada. Particularmente se diseña un estudio de simulación para el caso en que las trayectorias de degradación son de tipo lineal, para estudiar qué tan diferentes pueden ser las estimaciones de la función de distribución acumulativa del tiempo de vida $F(t)$ dadas por cada una de las metodologías; se encontró que las estimaciones son competitivas para este caso. Se ilustra con datos sobre vida útil de algunos dispositivos láser tomados de Meeker & Escobar (1998).

Palabras clave: teoría de confiabilidad, modelo de efectos mixtos, simulación.

Abstract

We use the concepts of degradation analysis as they relate to product reliability. Many failure mechanisms can be traced to an underlying degradation process. Degradation eventually leads to a weakness that can cause failure. There are several methodologies for the analysis of degradation data in reliability. This paper compares the explicit degradation methodology with the approximate degradation analysis. Specifically we perform a simulation study for linear degradation paths to explore the different estimations of the cumulative distribution function $F(t)$ given by each methodology and we find that the two methods are competitive. We illustrate the results with data from a laser life test taken from Meeker & Escobar (1998).

Key words: Reliability theory, Mixed effects model, Simulation.

^aProfesor. E-mail: syanez@unalmed.edu.co

^bInstructor Asociado. E-mail: ronaldgra@yahoo.com

1. Introducción

Tomando como base la teoría de confiabilidad, se define “falla”¹ como el evento en el cual una unidad (e. g., una parte, pieza o componente individual de una máquina), dispositivo (e. g., un artefacto que puede desempeñar una función particular, como un circuito integrado, un láser, etc.) o un sistema compuesto de diferentes dispositivos y unidades deja de funcionar correctamente o deja de cumplir apropiadamente con su objetivo.

En algunos experimentos es difícil observar fallas, pues las unidades no dejan de funcionar en ningún momento del experimento. En este último caso no se presentan fallas según la definición inicial, pero se puede obtener información de cada unidad o dispositivo midiendo la evolución de algunas propiedades físicas que puedan indicar su estado general de deterioro.

Bajo este último esquema se puede entonces definir otra forma de falla, la que se conoce como “falla suave” en la que la unidad o dispositivo no deja de funcionar como tal, pero algunas de las propiedades físicas que se están monitoreando sobre el tiempo, alcanzan niveles en los cuales, por diversos motivos, puede no ser conveniente continuar la operación con esta unidad. La cuantificación de este deterioro sobre el tiempo o alguna medida de uso es lo que se conoce en el lenguaje de confiabilidad como “datos de degradación” (e. g., el desgaste que sufren los neumáticos).

En este artículo se comparan los resultados de la metodología de análisis de degradación explícita y de la metodología de análisis de degradación aproximada. Particularmente se diseña un estudio de simulación para el caso en que las trayectorias de degradación son de tipo lineal, para estudiar qué tan diferentes pueden ser las estimaciones de la función de distribución acumulativa del tiempo de vida $F(t)$ dadas por cada una de las metodologías; se encontró que las estimaciones son competitivas para este caso.

Para muchos productos no se puede medir físicamente la degradación, pero sí se pueden tener medidas de la evolución del desempeño que es una medida indirecta de degradación. Por ejemplo, la degradación de una lámpara fluorescente puede medirse por el porcentaje de pérdida de capacidad lumínica con respecto a la capacidad lumínica inicial.

Sobre la vida de algunos dispositivos láser, la degradación causa disminución de la luz de salida. Algunos láseres, sin embargo, tienen un mecanismo de retroalimentación que puede mantener aproximadamente constante la luz de salida al incrementar la corriente de operación mientras el láser se degrada (Meeker & Escobar 1998). Cuando la corriente alcanza un valor demasiado alto, se considera que el dispositivo ha fallado, aunque no haya dejado de funcionar. Los recursos necesarios para que este funcione han aumentado bastante y puede resultar menos costoso reemplazar el dispositivo. La figura 1 muestra el incremento de la corriente de operación (en porcentaje con respecto a la inicial) en el tiempo, para una muestra de 15 láseres de GaAs (Galio-Arsénico); estos datos se recolectaron en 17

¹Algunos autores las llaman “fallas duras” (Meeker & Escobar 1998, pp. 328).

instantes de tiempo, que van desde cero hasta 4000 horas (datos tomados de Meeker & Escobar (1998, pp. 642)). La línea horizontal es el umbral máximo permisible que corresponde a un incremento del 10% en la corriente inicial de operación. A partir de este punto se considera que tiene una “falla suave”.

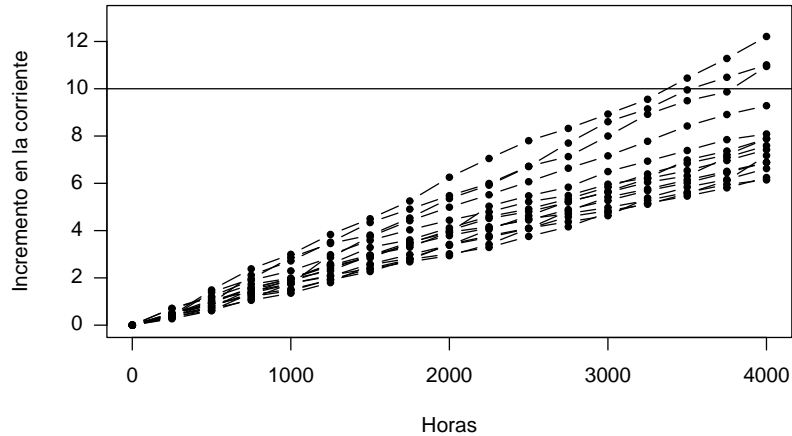


FIGURA 1: Gráfico de la corriente de operación del láser en función del tiempo.

2. Análisis aproximado de degradación

Un tipo de análisis que se puede utilizar para tratar los datos de degradación se conoce con el nombre de “análisis de degradación aproximado”, el cual tiene en cuenta la forma del comportamiento de la degradación en el tiempo, ajustando un modelo con el fin de extrapolar para cada unidad más allá del tiempo final del experimento y así obtener lo que se conoce como seudotiempo de falla (esta metodología no considera censura).

Los seudotiempo de falla son tiempos estimados de falla para las unidades que no fallaron antes del final del experimento y estos tiempos se asumen como verdaderos para realizar un análisis de tiempos de vida según las metodologías de la teoría de confiabilidad. En resumen, se obtienen los tiempos de falla para cada una de las unidades, ya sea mirando el tiempo en que la unidad supera el nivel máximo de degradación permisible o extrapoliando la trayectoria de degradación de una unidad, hasta que esta supere el nivel de degradación definido como falla. Ya con los seudotiempo de falla para cada unidad, simplemente se busca la distribución de probabilidad que mejor se ajuste a los datos y esta se asume como la distribución del tiempo de vida para ese tipo de unidades (Meeker & Escobar 1998).

3. Análisis de degradación explícito

La otra metodología que se considerará en este artículo para el análisis de datos de degradación es el “análisis de degradación explícito” que fue propuesto en Lu & Meeker (1993) y más extensamente explicado en Meeker & Escobar (1998, cap. 13). Esta metodología va de la mano con la teoría que describe la evolución del proceso de degradación de interés, utilizando modelos físicos. Los modelos que dan cuenta de estos fenómenos son, en general, de efectos mixtos, cuya estimación se hace por máxima verosimilitud aproximada utilizando los algoritmos de estimación planteados por Pinheiro & Bates (2000).

Teniendo como base las estimaciones de los parámetros en los modelos de efectos mixtos, se estiman la función de distribución acumulativa $F(t)$ para el tiempo de falla de las componentes y los intervalos de confianza para algunos cuantiles de interés, todo esto usando métodos basados en simulación Monte Carlo y la metodología *bootstrap* para la construcción de intervalos de confianza (Yáñez et al. 2003).

Según los modelos de tipo determinista, todas las unidades iguales que hayan sido manufacturadas idénticamente, bajo unas mismas condiciones ambientales y de producción, fallarían exactamente en el mismo tiempo cuando alcancen un umbral máximo de degradación particular. Lo que ocurre en realidad es que siempre existe algún grado de variabilidad en todos los factores del modelo y también en los factores que no están incluidos en el modelo. La mezcla de todos estos factores causa variabilidad en las curvas de degradación de unidad a unidad y por supuesto en los tiempos de falla de cada una de estas; por ello se propone el uso de modelos de efectos mixtos (Yáñez et al. 2003).

La literatura especializada dispone de un gran número de modelos que dan cuenta de curvas de degradación, desarrollados por ingenieros y físicos a partir de los principios básicos que describen los procesos de degradación. Usualmente dichos modelos empiezan con una descripción determinista de los procesos de degradación, en la forma de ecuaciones diferenciales o sistemas de ecuaciones diferenciales (Meeker & Escobar 1998, Chao 1999). La aleatoriedad puede introducirse apropiadamente usando distribuciones de probabilidad para describir la variabilidad de los parámetros del modelo.

La variabilidad en las condiciones iniciales de degradación de una unidad y la posterior forma de su trayectoria de degradación son causadas, entre otros factores, por la no homogeneidad de los materiales con que se producen las unidades, las condiciones de operación de la unidad, las condiciones ambientales, defectos de manufactura o intervenciones externas no controladas o no clasificadas, etc. Todo esto justifica el uso de los modelos de efectos mixtos, pues si se dispone de un “buen modelo” físico-químico, se puede comprender mejor los mecanismos que generan las fallas, si todos o algunos de los parámetros asociados a este modelo se consideran como variables aleatorias de unidad a unidad (Granada 2004).

4. Simulación para trayectorias de degradación lineal

Se compararán las estimaciones obtenidas por las metodologías de análisis de degradación explícita y análisis de degradación aproximado de la función de distribución acumulativa $F(t)$ para el tiempo de vida de un dispositivo cualquiera, con trayectorias de degradación de tipo lineal.

Se conjetura que la metodología aproximada para análisis de datos de degradación presenta resultados competitivos con la metodología explícita para la estimación de la función de distribución acumulativa.

Se definen las trayectorias de degradación de tipo lineal con el siguiente modelo:

$$y_{ij} = D_{ij} + \varepsilon_{ij}, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m, \quad \text{con} \quad D_{ij} = \beta_{1i} + \beta_{2i}t_{ij} \quad (1)$$

donde:

- y_{ij} : degradación muestral acumulada del dispositivo i al tiempo t_j .
- t_j : medida de tiempo o de uso asociada con cada medida de degradación muestral.
- D_{ij} : trayectoria de degradación lineal.
- n : número de dispositivos probados.
- m : número de tiempos en los que se observa la degradación muestral de cada dispositivo.
- β_{1i} : intercepto de la trayectoria lineal para el dispositivo i . Se considera variable de dispositivo a dispositivo (unidad a unidad).
- β_{2i} : pendiente de la trayectoria lineal para el dispositivo i . Se considera variable de dispositivo a dispositivo (unidad a unidad).
- ε_{ij} : perturbaciones aleatorias que se presentan en las observaciones de degradación muestral con respecto a la trayectoria de degradación lineal.

Los parámetros de la trayectoria de degradación lineal β_1 y β_2 (el intercepto y la pendiente, respectivamente) se generarán asumiendo que son aleatorios con una distribución de probabilidad normal bivariada, así:

$$\beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \sim N \left(\boldsymbol{\mu}_\beta = \begin{bmatrix} \mu_{\beta_1} \\ \mu_{\beta_2} \end{bmatrix}, \boldsymbol{\Sigma}_\beta = \begin{bmatrix} \sigma_{\beta_1}^2 & \rho\sigma_{\beta_1}\sigma_{\beta_2} \\ \rho\sigma_{\beta_1}\sigma_{\beta_2} & \sigma_{\beta_2}^2 \end{bmatrix} \right)$$

donde:

- μ_{β_1} y μ_{β_2} son las medias del intercepto y la pendiente, respectivamente, en el modelo lineal,

- ρ es el coeficiente de correlación entre los dos betas y
- $\sigma_{\beta_1}, \sigma_{\beta_2}$ son las desviaciones estándar asociadas a cada uno de los parámetros aleatorios mencionados.

Para generar los parámetros que sean necesarios en la simulación se utilizarán las rutinas de generación de normales multivariadas “`mvrnorm`” desarrolladas por Venables & Ripley (2002) en su librería MASS, disponible para los programas S-PLUS y R. Se asume también que las perturbaciones aleatorias ε_{ij} tendrán una distribución normal con media cero y varianza constante σ_ε^2 , donde las ε_{ij} son independientes de β_1 y β_2 . Estas perturbaciones pueden generarse fácilmente en los paquetes mencionados con la función “`rnorm`”.

Se denotará por D_f el umbral o límite máximo de degradación acumulada, donde se considera que la unidad o dispositivo falla.

4.1. Metodología de simulación

Se controlarán los factores que tienen que ver con la estructura de covarianza de los parámetros (Σ_β), para estudiar su efecto en la estimación final de $F(t)$. Estos parámetros son los que afectan la variabilidad de las trayectorias muestrales de unidad a unidad, característica que se quiere estudiar. Se considerarán 45 escenarios de simulación con las siguientes características:

- Para el coeficiente de correlación ρ entre β_1 y β_2 del modelo, se consideran cinco niveles con los siguientes valores $[-0.75, -0.35, 0, 0.35, 0.75]$.
- Se tomarán $n = 15$ y $m = 20$ valores usuales de los experimentos referenciados en la literatura especializada de confiabilidad para datos de degradación.
- Los valores de D_f y σ_ε se definen con base en las escalas de μ_β , de tal manera que los datos simulados representen un experimento usual de degradación (Granada 2004, capítulo 2) y acorde a estos valores se definen también los tiempos de observación de la degradación. Para esta simulación se tomarán $\mu_{\beta_1} = 1$ y $\mu_{\beta_2} = 0.5$, $D_f = 11$ y $\sigma_\varepsilon = 0.2$ y los tiempos de observación de la degradación estarán en el intervalo $[0, 19]$.
- Para σ_{β_1} y σ_{β_2} se tomarán 3 niveles para cada uno, de acuerdo con unos valores definidos para el coeficiente de variación (CV) de los parámetros en β . Sea X una variable aleatoria con media μ y varianza σ , su CV se define como:

$$CV = \frac{\sigma}{\mu} \quad (2)$$

Se considera que valores de CV entre:

- 0 y 15% indican una población homogénea,
- 15% y 30%, homogeneidad moderada y
- mayores de 30% pueden indicar una heterogeneidad significativa.

De la ecuación (2) se obtiene:

$$\sigma_{\beta_j}^{(l)} = CV_l * \mu_{\beta_j}$$

con $i = 1, \dots, 5$, $l = 1, 2, 3$, $j = 1, 2$

Para este diseño se definirán tres niveles del coeficiente de variación, uno dentro de cada intervalo expresado anteriormente:

- $CV_1 = 0.1$ comportamiento homogéneo de los parámetros,
- $CV_2 = 0.2$ heterogeneidad media, y
- $CV_3 = 0.3$ heterogeneidad significativa.

Para cada nivel de ρ se tienen nueve escenarios diferentes de simulación, como se puede observar en la tabla 1.

TABLA 1: Combinaciones de parámetros para cada nivel del coeficiente de correlación ρ .

	ρ_i		
	$CV_1(\beta_2)$	$CV_2(\beta_2)$	$CV_3(\beta_2)$
$CV_1(\beta_1)$	$\sigma_{\beta_1}^{(1)} \sigma_{\beta_2}^{(1)}$	$\sigma_{\beta_1}^{(1)} \sigma_{\beta_2}^{(2)}$	$\sigma_{\beta_1}^{(1)} \sigma_{\beta_2}^{(3)}$
$CV_2(\beta_1)$	$\sigma_{\beta_1}^{(2)} \sigma_{\beta_2}^{(1)}$	$\sigma_{\beta_1}^{(2)} \sigma_{\beta_2}^{(2)}$	$\sigma_{\beta_1}^{(2)} \sigma_{\beta_2}^{(3)}$
$CV_3(\beta_1)$	$\sigma_{\beta_1}^{(3)} \sigma_{\beta_2}^{(1)}$	$\sigma_{\beta_1}^{(3)} \sigma_{\beta_2}^{(2)}$	$\sigma_{\beta_1}^{(3)} \sigma_{\beta_2}^{(3)}$

El superíndice indica que el valor de la desviación estándar se calculó con base en el nivel l del coeficiente de variación que se define como:

$$CV_l(\beta_j) = CV_l * \mu_{\beta_j}$$

Para cada escenario se simularán $K = 400$ experimentos bajo las condiciones del escenario, y en cada experimento simulado se aplicarán las metodologías de análisis de degradación explícita y aproximada para estimar $F(t)$. En la tabla 2 se presentan los parámetros de simulación utilizados en cada uno de los 45 escenarios y también la proporción teórica esperada de trayectorias que cruzan el umbral de falla al tiempo final de experimento (P_c).

La comparación de las metodologías tiene sentido cuando esta proporción no es cercana a uno, pues se tendría suficiente información para realizar un análisis clásico de confiabilidad y ajustar una distribución de probabilidad a los tiempos de cruce observados. Observe, además, que la $P(\beta_2 > 0)$ es siempre mayor de 0.95, pues para este caso $\mu_{\beta_2} = 0.5$ y σ_{β_2} varía de 0.05 a 0.15

Se utiliza la siguiente notación:

- $F_R(t)$: función de distribución acumulativa verdadera para el tiempo de vida de los dispositivos, calculada para cada escenario de simulación utilizando los parámetros verdaderos.

TABLA 2: Combinaciones de parámetros utilizados en cada uno de los escenarios de simulación para generar los 400 experimentos por cada escenario y proporción teórica de trayectorias que cruzan el umbral de falla al tiempo final del experimento (Pc) para cada escenario.

Escenario	σ_{β_1}	σ_{β_2}	ρ	$CV(\beta_1)$	$CV(\beta_2)$	Pc
1	0.1	0.05	-0.75	0.1	0.1	0.284
2	0.1	0.10	-0.75	0.1	0.2	0.392
3	0.1	0.15	-0.75	0.1	0.3	0.429
4	0.2	0.05	-0.75	0.2	0.1	0.269
5	0.2	0.10	-0.75	0.2	0.2	0.388
6	0.2	0.15	-0.75	0.2	0.3	0.427
7	0.3	0.05	-0.75	0.3	0.1	0.252
8	0.3	0.10	-0.75	0.3	0.2	0.383
9	0.3	0.15	-0.75	0.3	0.3	0.425
10	0.1	0.05	-0.35	0.1	0.1	0.293
11	0.1	0.10	-0.35	0.1	0.2	0.394
12	0.1	0.15	-0.35	0.1	0.3	0.429
13	0.2	0.05	-0.35	0.2	0.1	0.289
14	0.2	0.10	-0.35	0.2	0.2	0.393
15	0.2	0.15	-0.35	0.2	0.3	0.429
16	0.3	0.05	-0.35	0.3	0.1	0.287
17	0.3	0.10	-0.35	0.3	0.2	0.392
18	0.3	0.15	-0.35	0.3	0.3	0.428
19	0.1	0.05	0.00	0.1	0.1	0.300
20	0.1	0.10	0.00	0.1	0.2	0.396
21	0.1	0.15	0.00	0.1	0.3	0.430
22	0.2	0.05	0.00	0.2	0.1	0.303
23	0.2	0.10	0.00	0.2	0.2	0.397
24	0.2	0.15	0.00	0.2	0.3	0.431
25	0.3	0.05	0.00	0.3	0.1	0.308
26	0.3	0.10	0.00	0.3	0.2	0.397
27	0.3	0.15	0.00	0.3	0.3	0.431
28	0.1	0.05	0.35	0.1	0.1	0.301
29	0.1	0.10	0.35	0.1	0.2	0.398
30	0.1	0.15	0.35	0.1	0.3	0.431
31	0.2	0.05	0.35	0.2	0.1	0.314
32	0.2	0.10	0.35	0.2	0.2	0.400
33	0.2	0.15	0.35	0.2	0.3	0.432
34	0.3	0.05	0.35	0.3	0.1	0.323
35	0.3	0.10	0.35	0.3	0.2	0.402
36	0.3	0.15	0.35	0.3	0.3	0.433
37	0.1	0.05	0.75	0.1	0.1	0.313
38	0.1	0.10	0.75	0.1	0.2	0.400
39	0.1	0.15	0.75	0.1	0.3	0.432
40	0.2	0.05	0.75	0.2	0.1	0.326
41	0.2	0.10	0.75	0.2	0.2	0.404
42	0.2	0.15	0.75	0.2	0.3	0.434
43	0.3	0.05	0.75	0.3	0.1	0.337
44	0.3	0.10	0.75	0.3	0.2	0.407
45	0.3	0.15	0.75	0.3	0.3	0.436

- $\hat{F}_R(t)_k$: k -ésima estimación de $F_R(t)$ proporcionada por las metodologías de degradación explícita o aproximada en un escenario, así:
 - $F_D(t)_k$: k -ésima estimación de $F_R(t)$ obtenida utilizando el método explícito de análisis de datos de degradación para cada experimento ($k = 1, \dots, K$).
 - $F_{AL}(t)_k$: k -ésima estimación de $F_R(t)$ utilizando el método aproximado de análisis de datos de degradación ajustando una distribución lognormal para cada experimento ($k = 1, \dots, K$).
 - $F_{AW}(t)_k$: k -ésima estimación de $F_R(t)$ utilizando el método aproximado de análisis de datos de degradación ajustando una distribución Weibull para cada experimento ($k = 1, \dots, K$).

Se escogen las distribuciones lognormal y Weibull en el método aproximado por ser de uso muy frecuente en análisis de confiabilidad. Según Meeker & Escobar (1998), son los *workhorses* en el modelamiento paramétrico de la confiabilidad.

Para cada escenario se podrá asociar una función de distribución acumulada del tiempo de vida de las unidades, que se considerará la “verdadera” $F_R(t)$, calculada con base en los parámetros de simulación así:

$$P(T \leq t) \approx P(D_f \leq \beta_1 + \beta_2 t) = \Phi \left[\frac{\mu_{\beta_1} + \mu_{\beta_2 t} - D_f}{(\sigma_{\beta_1}^2 + \sigma_{\beta_2}^2 t^2 + 2t\rho\sigma_{\beta_1}\sigma_{\beta_2})^{\frac{1}{2}}} \right]$$

Se considerará que el modelo de degradación inducido es el “verdadero”, pues es el que tiene en cuenta la teoría físico-química asociada a cada problema particular y por lo tanto es el que mejor explica el fenómeno.

Para la $F_R(t)$ se calculan en cada escenario algunos cuantiles de interés ($t_{0.05}, t_{0.25}, t_{0.5}, t_{0.75}, t_{0.95}$) y se tiene en cada escenario para cada t_p un error cuadrático medio (ECM_p).

Así, para cada metodología de análisis de datos de degradación y para cada cuantil t_p , el ECM_p , en un escenario de simulación, se define como:

$$ECM_p = E \left[(\hat{F}_R(t_p) - F_R(t_p))^2 \right] \tag{3}$$

y se puede estimar como:

$$\begin{aligned} \widehat{ECM}_p &= \frac{\sum_{k=1}^K (\hat{F}_R(t_p)_k - F_R(t_p))^2}{K} \\ &= \frac{\sum_{k=1}^K (\hat{F}_R(t_p)_k - p)^2}{K} \end{aligned} \tag{4}$$

donde:

- t_p es el cuantil $p \times 100\%$ de la distribución verdadera del tiempo de vida de los dispositivos.
- K es el número de experimentos en cada escenario ($K = 400$).

Entonces para cada combinación de parámetros (cada escenario) se tendrán errores cuadráticos medios de cada metodología en cada cuantil de interés. Esta medida permitirá comparar las metodologías de análisis de datos de degradación para cada combinación de parámetros que se genere y por tanto plantear unas conclusiones sobre las diferencias observadas en el caso de trayectorias de tipo lineal.

El criterio utilizado para comparar las metodologías es: a menor ECM_p , mejor la estimación de $F_R(t_p)$.

5. Resultados de la simulación

Los resultados se obtuvieron utilizando los programas estadísticos R y S-PLUS. En el programa R (R Development Core Team 2006) se generaron los datos de cada experimento en cada escenario, utilizando para ello la librería “MASS” de Venables y Ripley, y algunas funciones de la librería base.

Con los parámetros que se utilizaron para emular los experimentos en cada escenario, se obtienen los percentiles teóricos de la distribución verdadera en cada escenario, utilizando el algoritmo Monte Carlo descrito en Yáñez et al. (2003). Estos percentiles servirán para calcular el error cuadrático medio de las metodologías explícita y aproximada utilizando la ecuación (4).

Una vez se tienen los datos de cada uno de los escenarios se utiliza la librería “nlme” (Pinheiro & Bates 2000). Como parte del proceso de estimación de la metodología explícita se obtienen los parámetros del modelo de efectos mixtos, estimados para cada uno de los experimentos dentro del escenario, y se generan los seudotiempo de falla que se utilizarán para el proceso de estimación de $F(t)$ con la metodología aproximada.

Con estos parámetros estimados se tienen estimaciones de $F(t)$ evaluadas en cada percentil de interés para cada experimento dentro de cada escenario y utilizando (4) se calculan los ECM para cada percentil en cada escenario.

Los seudotiempo de falla generados en la primera parte se exportan al programa S-PLUS y en este se utilizan las funciones programadas por Meeker & Escobar (2000) en el Módulo SPLIDA (S-PLUS Life Data Analysis), para estimar, vía máxima verosimilitud aproximada, los parámetros asociados a los modelos de probabilidad Weibull y lognormal, como se sugirió en la sección anterior. Utilizando los percentiles de la distribución teórica y (3) se calculan los ECM para la metodología aproximada ajustando la distribución lognormal y la Weibull.

Para obtener una medida adimensional que permita comparar las metodologías y mirar qué tanto difieren, se define una medida que indica el grado de hetero-

geneidad en las estimaciones de $F(t_p)$ obtenidas por las metodologías en cada percentil de interés. Esta medida está relacionada con el coeficiente de variación CV , denotada por CV^* .

Para un percentil de interés, el CV^* se define de la siguiente manera:

$$CV_i^* = \frac{\sqrt{ECMp_i}}{p} \times 100\%, \quad i = 1, 2, \dots, 45 \quad (5)$$

donde:

- p indica la probabilidad asociada al percentil de la distribución verdadera (que cumple que $F(t_p) = p$).
- i es un índice que señala el escenario para el que se calcula.

Entonces para comparar las metodologías en cada percentil se define una medida promedio del CV^* calculada sobre todos los escenarios que se denotará CV_{prom}^* , así:

Para cada escenario de simulación se denota el promedio de los coeficientes de variación como CV_{prom}^* y se calcula de la siguiente manera:

$$CV_{prom}^* = \frac{\sum_{i=1}^{45} CV_i^*}{45} \quad (6)$$

A continuación se presentan las tablas con los ECM para cada percentil y en cada uno de los escenarios de simulación y al final de cada tabla el CV_{prom}^* para cada metodología.

La tabla 3 muestra los errores cuadráticos para cada escenario de simulación y para cada metodología de análisis en el percentil 5%. Se puede observar claramente que los ECM asociados a la metodología explícita son menores que los errores de cualquiera de las dos distribuciones ajustadas por la metodología aproximada en cualquier escenario. Igualmente se puede ver que para el método aproximado, los ECM asociados a la distribución lognormal son menores que los ECM asociados a la distribución Weibull en cualquier escenario. Esta tabla muestra cómo los escenarios que están asociados con un coeficiente de variación del 10% para la pendiente del modelo de efectos aleatorios (escenarios 1, 4, 7, 10, 13, ..., 40, 43), es decir, cuando las pendientes son bastante homogéneas, los ECM son más pequeños en todas las metodologías y son parecidos de metodología a metodología.

Si se miran los CV_{prom}^* al final de la tabla 3 para cada metodología, se podría pensar que los valores indican una heterogeneidad muy alta en las estimaciones de $F(t)$, pero esto se debe a la división por $p = 0.05$, la cual infla los CV^* de cada escenario; entonces la interpretación debe ser cuidadosa. Los CV_{prom}^* corroboran que la metodología explícita es la mejor, pero la aproximada con ajuste lognormal está cerca de la explícita si se considera la escala que se maneja; esto sugiere que en este caso las metodologías explícita y aproximada lognormal pueden ser competitivas.

TABLA 3: Errores cuadráticos medios calculados por simulación para las metodologías de degradación explícita y degradación aproximada en el percentil 5% de la distribución verdadera en cada escenario.

Errores cuadráticos de las metodologías en el percentil 5%			
Escenario	Método explícito	Método aproximado lognormal	Método aproximado Weibull
1	0.001581	0.001624	0.005852
2	0.001430	0.002007	0.008954
3	0.001425	0.003261	0.014097
4	0.001350	0.001495	0.005700
5	0.001482	0.001931	0.008682
6	0.001421	0.003098	0.014292
7	0.001596	0.001670	0.005635
8	0.001593	0.002226	0.009527
9	0.001427	0.003298	0.014764
10	0.001573	0.001533	0.005607
11	0.001523	0.002084	0.009073
12	0.001220	0.003366	0.014547
13	0.001588	0.001660	0.006130
14	0.001345	0.001869	0.008778
15	0.001598	0.003352	0.014296
16	0.001457	0.001520	0.005555
17	0.001512	0.001806	0.007811
18	0.001426	0.003481	0.014535
19	0.001536	0.001531	0.005099
20	0.001183	0.001662	0.008285
21	0.001511	0.003491	0.014859
22	0.001370	0.001396	0.005178
23	0.001469	0.001913	0.008073
24	0.001432	0.003495	0.015005
25	0.001617	0.001639	0.005340
26	0.001469	0.002102	0.009775
27	0.001443	0.002893	0.013418
28	0.001411	0.002482	0.005000
29	0.001431	0.001858	0.008339
30	0.001583	0.003332	0.013908
31	0.001581	0.001611	0.005434
32	0.001529	0.002033	0.008907
33	0.001398	0.002848	0.013090
34	0.001442	0.001485	0.004910
35	0.001729	0.002199	0.009002
36	0.001374	0.002896	0.012820
37	0.001372	0.001410	0.005136
38	0.001258	0.001697	0.008617
39	0.001451	0.002720	0.012996
40	0.001433	0.001484	0.005000
41	0.001613	0.002105	0.008970
42	0.001677	0.003209	0.013576
43	0.001601	0.001659	0.005258
44	0.001186	0.001523	0.007355
45	0.001853	0.003434	0.014015
CV_{prom}^*	76.8054 %	93.7437 %	189.874 %

La tabla 4 presenta los errores cuadráticos para cada escenario de simulación y para cada metodología de análisis en el percentil 25 %. En esta tabla se expone algo diferente: los ECM más pequeños están asociados a la metodología aproximada con ajuste Weibull, seguidos por los ECM de la metodología aproximada con la distribución lognormal.

Si se observan los CV_{prom}^* , al final de la tabla 4, se nota cómo la metodología aproximada con ajuste Weibull tiene el menor grado de heterogeneidad 27.3 % mientras que la explícita y la aproximada con ajuste lognormal presentan valores más cercanos entre ellas; para estos niveles de heterogeneidad la diferencia con la Weibull es pequeña. Las anteriores diferencias nos indican que aunque la metodología explícita no es la mejor, la metodología aproximada con ajuste lognormal presenta ECM muy cercanos a los de la explícita y se puede pensar que para este caso las dos metodologías son competitivas en la calidad de estimación. Se sigue presentando que los ECM son mínimos cuando $CV(\beta_1) = 0.1$, lo que indica que la homogeneidad de la pendiente del modelo de efectos mixtos es importante a la hora de estimar $F(t)$.

La tabla 5 presenta un resumen de los CV_{prom}^* para cada percentil trabajado. Las tablas completas con los ECM para cada percentil en cada escenario de simulación se pueden ver en Granada (2004). El análisis de estos valores es similar al realizado con los valores de las tablas anteriores. Para el percentil 50 %, se puede notar cómo las tres metodologías de estimación presentan valores muy cercanos del orden de 22 %, lo que sugiere claramente que para este caso las tres metodologías son competitivas; lo mismo se presenta para los percentiles 75 % y 95 % donde, aunque baja el grado de heterogeneidad medido por el CV_{prom}^* para cada metodología, se nota cómo las diferencias no son muy altas en cada percentil trabajado.

Se observan al final de la tabla los valores más pequeños de CV_{prom}^* , lo que indica que las estimaciones de $F(t)$ en este percentil son más homogéneas que en los casos anteriores. Las metodologías que tienen menores CV_{prom}^* son la explícita (4.1 %) y la aproximada con ajuste lognormal (5 %), lo que claramente muestra la competitividad de estas dos metodologías.

6. Aplicación de las metodologías de análisis para la degradación de los dispositivos láser

Retomando el ejemplo referenciado en la sección 1, se tratará un ejemplo sobre la degradación de algunos dispositivos láser, originalmente abordado en Meeker & Escobar (1998). En la figura 1 se puede apreciar que un posible modelo que describe la evolución del incremento en la corriente de operación en el tiempo es un modelo lineal con intercepto constante y pendiente aleatoria; pues se puede observar cómo todos los dispositivos parten de una corriente de operación igual pero la rapidez con que se incrementa la corriente de operación varía de unidad a unidad. Por lo anterior se quiere estimar un modelo de la siguiente forma:

$$y_{ij} = D_{ij} + \varepsilon_{ij}, i = 1, \dots, 15, j = 1, \dots, 17, \text{ donde } D_{ij} = \beta_1 + \beta_2 t_{ij} \quad (7)$$

TABLA 4: Errores cuadráticos medios calculados por simulación para las metodologías de degradación explícita y degradación aproximada en el percentil 25 % de la distribución verdadera en cada escenario.

Errores cuadráticos de las metodologías para el percentil 25 %			
Escenario	Método explícito	Método aproximado lognormal	Método aproximado Weibull
1	0.008469	0.007470	0.004824
2	0.008334	0.006479	0.004522
3	0.008604	0.005824	0.004638
4	0.008643	0.007633	0.005229
5	0.008586	0.006449	0.004411
6	0.008253	0.005494	0.004519
7	0.009734	0.008490	0.005095
8	0.008030	0.006004	0.004150
9	0.008799	0.005754	0.004820
10	0.008267	0.007317	0.004773
11	0.008089	0.006111	0.004244
12	0.007158	0.004951	0.004099
13	0.009351	0.008177	0.005358
14	0.007553	0.005671	0.003820
15	0.008794	0.005820	0.004723
16	0.008903	0.007977	0.005046
17	0.009354	0.007214	0.004378
18	0.008462	0.005712	0.004649
19	0.008341	0.007435	0.004638
20	0.007451	0.005792	0.003915
21	0.008529	0.005527	0.004692
22	0.008681	0.007796	0.004905
23	0.008934	0.007173	0.004740
24	0.008426	0.005583	0.004699
25	0.008846	0.008025	0.005004
26	0.008140	0.006169	0.004360
27	0.008898	0.005903	0.004538
28	0.008647	0.004701	0.004500
29	0.008609	0.006842	0.004622
30	0.008981	0.006051	0.004695
31	0.009104	0.008196	0.005287
32	0.008402	0.006614	0.004746
33	0.008942	0.006097	0.004603
34	0.008376	0.007658	0.004707
35	0.008343	0.006460	0.004394
36	0.008544	0.005786	0.004475
37	0.008728	0.007830	0.004688
38	0.008590	0.006649	0.004508
39	0.008093	0.005497	0.004090
40	0.008633	0.007808	0.004775
41	0.009369	0.007460	0.005155
42	0.008807	0.005871	0.004662
43	0.008669	0.007865	0.004846
44	0.008407	0.006921	0.004682
45	0.010119	0.006769	0.005258
CV_{prom}^*	37.0766 %	32.5192 %	27.2729 %

TABLA 5: Resumen de los CV_{prom}^* , para cada percentil tratado.

Percentil	CV_{prom}^*		
	Método explícito	Método aproximado lognormal	Método aproximado Weibull
5 %	76.80540 %	93.7437 %	189.87400 %
25 %	37.07660 %	35.5192 %	27.27290 %
50 %	21.90950 %	22.7696 %	22.87200 %
75 %	13.35190 %	14.9356 %	18.76220 %
95 %	4.06818 %	5.0284 %	7.02805 %

Es un modelo donde se tienen 15 dispositivos y a cada uno se le tomó una medida de la corriente de operación en 17 instantes de tiempos diferentes medidos en horas y que van desde cero horas hasta 4000 horas. Se observa gráficamente que β_1 es igual a cero, pero que en β_{2i} la pendiente del modelo lineal es diferente para cada dispositivo y por tanto se asume que para toda la población de láseres la pendiente es una variable aleatoria; además, que esta es independiente de los ε_{ij} . Se asume, también, que la distribución de la pendiente es normal.

Para estimar los parámetros en la ecuación (7), se utilizan las funciones implementadas por Pinheiro & Bates (2000) en S-PLUS y en R. En este caso la función `lme` proporciona las estimaciones de máxima verosimilitud aproximada de los parámetros.

Esta función genera entonces las siguientes estimaciones:

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_1 &= 9.4937 \times 10^{-3} \\ \hat{\mu}_{\beta_2} &= 2.0432 \times 10^{-3} \\ \hat{\sigma}_{\beta_2} &= 4.62169 \times 10^{-4} \\ \hat{\sigma}_\varepsilon &= 1.9926 \times 10^{-1} \end{aligned}$$

La estimación de $F(t)$ es bastante sencilla pues podemos llegar fácilmente a una forma cerrada de la siguiente manera:

$$P(T < t) = P[D(t) \geq D_f] = P\left(\beta_2 \geq \frac{D_f - \beta_1}{t}\right) = \Phi\left(\frac{\beta_1 + \mu_{\beta_2}t - D_f}{\sigma_{\beta_2}t}\right)$$

Donde $\Phi(\cdot)$ es la función de probabilidad acumulada para la distribución normal estándar y $D_f = 10\%$ es el incremento en la corriente de operación que define el nivel especificado de falla. Para esta aplicación, al igual que en el ejemplo anterior, se utilizan los parámetros estimados por el modelo de efectos aleatorios para estimar $F(t)$ (figura 2).

6.1. Comparación con el análisis aproximado de degradación

Se puede utilizar una metodología alterna para obtener la función de probabilidad acumulada del tiempo de vida (distribución del tiempo de falla), estimando

para cada dispositivo un modelo lineal y obteniendo los tiempos de cruce (tiempos en los que el dispositivo alcanza el nivel máximo de degradación permisible $D_f = 10\%$), también llamados seudotiempo de falla (figura 3).

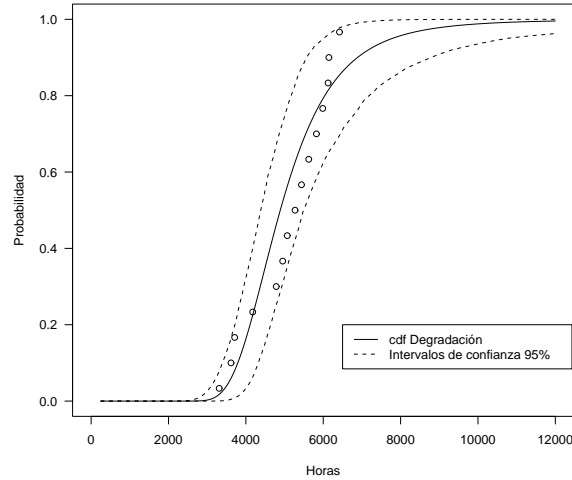


FIGURA 2: $F(t)$ estimada por la metodología de degradación e intervalos de confianza *bootstrap* del 95%. Los círculos representan el estimador no-paramétrico de $F(t)$, basado en los seudotiempo de falla.

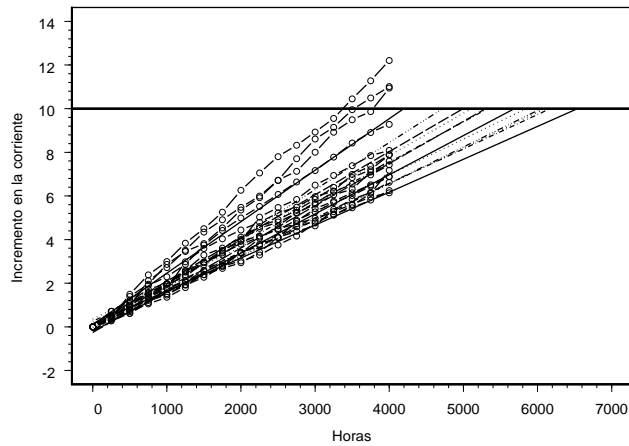


FIGURA 3: Extrapolación de las trayectorias de degradación para los datos de los láseres de GaAs.

Utilizando los seudotiempo de falla obtenidos con cada una de las estimaciones independientes de cada trayectoria, se ajustan varias distribuciones de probabilidad. La tabla 6 presenta la distribución de probabilidad y los respectivos parámetros estimados para cada una, con los intervalos de confianza del 95 % para cada estimación.

TABLA 6: Estimaciones de máxima verosimilitud para tres distribuciones basadas en los seudotiempo de falla obtenidos por extrapolación.

Distribución	Parámetros estimados	LI95 %	LS95 %
normal	$\hat{\mu} = 5114.900$	4620.8000	5609.0000
	$\hat{\sigma} = 976.400$	682.7000	1396.0000
Weibull	$\hat{\eta} = 5510.515$	5074.7590	5983.6870
	$\hat{\beta} = 6.453$	4.2504	9.7980
lognormal	$\hat{\mu} = 8.519$	8.4161	8.6237
	$\hat{\sigma} = 0.205$	0.1434	0.2933

La figura 4 muestra las diferentes estimaciones de $F(t)$, tanto por el método de degradación explícito como por el método aproximado con el cual se presentan las tres distribuciones que mejor se ajustan. En la figura 5 se grafican las diferencias simples de cada distribución estimada por el análisis aproximado, contra la estimación por el método de degradación explícito y se puede ver cómo la $F(t)$ lognormal estimada con el método aproximado es la que presenta las menores diferencias y la diferencia más amplia, en valor absoluto, es del 5 %. Mirando ambos gráficos, se aprecia cómo las estimaciones Weibull y normal se alejan un poco más de la estimación por degradación explícita. Podemos notar que en este ejemplo los resultados obtenidos por las dos metodologías a evaluar siguen siendo similares, si se observa además que las estimaciones por el método aproximado siguen estando dentro del intervalo de confianza *bootstrap* del 95 % calculado para la estimación por degradación explícita (ver figura 2).

7. Conclusiones

De la sección anterior se puede concluir que:

- Para trayectorias de degradación lineal, las metodologías de análisis de datos de degradación explícita y aproximada con ajuste lognormal, presentan resultados competitivos.
- Las diferencias entre los ECM asociados a las metodologías eran mínimas cuando la pendiente del modelo lineal no tenía una variabilidad muy alta vista en términos de un coeficiente de variación del 10 %. Esto muestra que la metodología explícita es pertinente cuando hay alta variabilidad de unidad a unidad en el experimento de degradación.
- La metodología explícita mostró tener menor ECM para la mayoría de los percentiles evaluados; por ello se recomienda que para fines de extrapolación se utilice esta metodología.

En el caso no lineal, los resultados para los casos concretos (Meeker & Escobar 1998, Granada 2004) muestran que el método explícito es mucho mejor. Se explorará esta hipótesis a futuro.

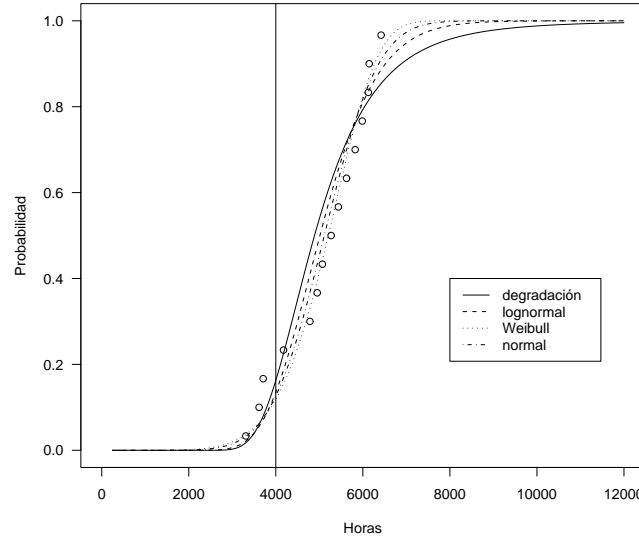


FIGURA 4: Estimaciones de $F(t)$ obtenidas por las diferentes metodologías.

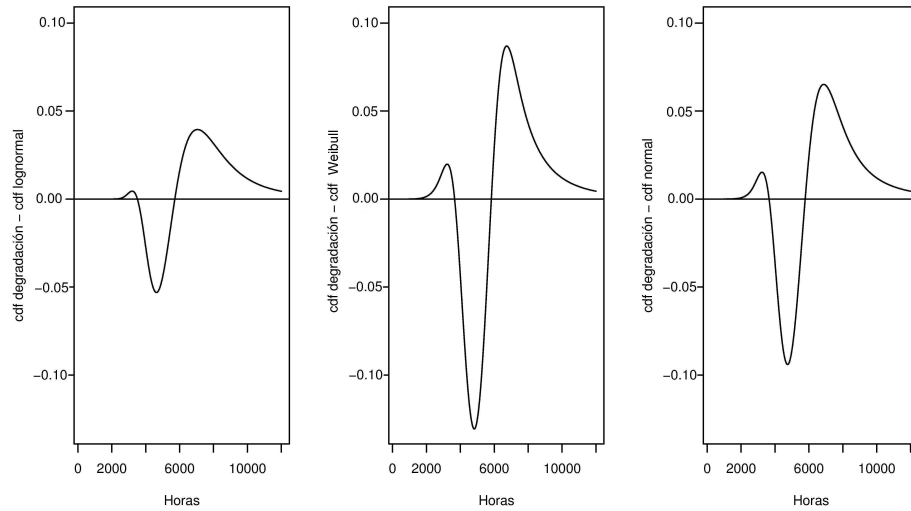


FIGURA 5: Diferencias simples entre la estimación del método de degradación explícito y las estimaciones del método aproximado en su orden lognormal, Weibull y normal.

Agradecimientos

Investigación patrocinada por la Dirección de Investigación, Universidad Nacional de Colombia, sede Medellín (DIME). Proyecto código 0308022737.

Queremos dar gracias por las juiciosas y oportunas observaciones de los jurados, quienes ayudaron a dar forma definitiva a este trabajo.

Recibido: diciembre de 2005

Aceptado: julio de 2006

Referencias

- Chao, M. T. (1999), *Degradation Analysis and Related Topics: some Thoughts and a Review*, Vol. 23, National Science Council, R. O. C., Taipei, Taiwan.
- Granada, R. A. (2004), Modelos y análisis para datos de degradación, Tesis de maestría en estadística, Universidad Nacional de Colombia, sede Medellín.
- Lu, C. J. & Meeker, W. Q. (1993), 'Using Degradation Measures to Estimate a Time-to-Failure Distribution', *Technometrics* **35**, 161–174.
- Meeker, W. Q. & Escobar, L. A. (1998), *Statistical Methods for Reliability Data*, Wiley, New York.
- Meeker, W. Q. & Escobar, L. A. (2000), *SPLIDA (S-PLUS Life Data Analysis)*, Iowa State University and Louisiana State University.
- Pinheiro, J. C. & Bates, D. M. (2000), *Mixed-Effects Models in S and S-PLUS*, Springer, New York.
- R Development Core Team (2006), *R: A Language and Environment for Statistical Computing*, R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. ISBN 3-900051-07-0.
*<http://www.R-project.org>
- Venables, W.Ñ. & Ripley, B. D. (2002), *Modern Applied Statistics with S*, 4th edn, Springer, New York.
*<http://www.stats.ox.ac.uk/pub/MASS4>
- Yáñez, S., Granada, R. A. & Jaramillo, M. (2003), 'Modelos y análisis para datos de degradación', *Revista Colombiana de Estadística* **26**(1), 41–59.