

# Tendencia aleatoria o determinística: una nueva prueba basada en la teoría tradicional

## Random or Deterministic Trend: A New Test Based on the Traditional Theory

ELKIN CASTAÑO<sup>1,2,a</sup>, JORGE MARTÍNEZ<sup>3,b</sup>

<sup>1</sup>ESCUELA DE ESTADÍSTICA, FACULTAD DE CIENCIAS, UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA, MEDELLÍN, COLOMBIA

<sup>2</sup>GRUPO DE ECONOMETRÍA APLICADA, FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS, UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA, MEDELLÍN, COLOMBIA

<sup>3</sup>DEPARTAMENTO DE ESTADÍSTICA, FACULTAD DE CIENCIAS, UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA, BOGOTÁ, COLOMBIA

---

### Resumen

En la literatura de series de tiempo se encuentran diferentes procedimientos para probar la hipótesis sobre el origen aleatorio o determinístico de la componente de tendencia de una serie. La mayoría de ellos se basan en establecer la existencia de una raíz unitaria ya sea en el polinomio autorregresivo o en el polinomio de medias móviles. El desarrollo de las pruebas para verificar estas hipótesis se basa fundamentalmente en el empleo de la teoría no estándar asociada a procesos de Wiener. Este artículo presenta una nueva prueba que hace uso de las funciones de autocorrelación (ACF) de los residuales de los modelos bajo la hipótesis nula  $H_0 : Z_t = \beta_0 + Z_{t-1} + a_t$ , y bajo la hipótesis alterna  $H_1 : Z_t = \beta_0 + \beta_1 t + a_t$ . A partir de la teoría tradicional, con el supuesto que  $a_t$  es un ruido blanco gaussiano, se obtiene por simulación la distribución nula del estadístico de prueba para muestras finitas y se deriva una aproximación asintótica. Para el caso en el cual  $a_t$  es un proceso autocorrelacionado, se generaliza la prueba y se obtiene la distribución nula asintótica del estadístico de prueba. Los resultados muestran que la prueba asintótica tiene, en general, una potencia alta y mayor que la potencia de la prueba de Dickey y Fuller Aumentada (ADF), particularmente cuando una raíz del polinomio AR o MA está cerca de 1. La prueba asintótica propuesta también presenta menos distorsiones en el tamaño que la prueba ADF.

**Palabras clave:** tendencia aleatoria, tendencia determinística, función de autocorrelación, modelo ARMA, raíz unitaria, prueba de Dickey y Fuller aumentada.

---

<sup>a</sup>Profesor asociado, profesor titular. E-mail: elkincv@gmail.com

<sup>b</sup>Profesor asociado. E-mail: jmartinezc@unal.edu.co

### Abstract

Several procedures to test the null hypothesis on the random or deterministic origin of the trend in a time series are found in the specialized literature. Most of these tests are based on the analysis of the unit roots of the autoregressive or moving average operators. The procedures are based on the nonstandard theory associated to a Wiener process. In this paper it is proposed a test that uses the autocorrelation function (ACF) of the residuals considering the null hypothesis  $H_0 : Z_t = \beta_0 + Z_{t-1} + a_t$ , and the alternative hypothesis  $H_1 : Z_t = \beta_0 + \beta_1 t + a_t$ . The distribution of the test statistics for finite sample sizes and the asymptotic approximation are obtained using the usual theory, assuming that  $a_t$  is a gaussian white noise. The procedure is generalized for the case where  $a_t$  is a correlated white noise. The results obtained using simulation show that the proposed test has in general high power and specially when it is compared the well known Dicker-Fuller Augmented test (ADF), in the case when the roots of the autoregressive or moving average operators are close to one. The proposed procedure has also better approximation to the nominal test size when it is also compared with the ADF.

**Key words:** Stochastic trend, Deterministic model, Autocorrelation function, ARMA model, Unit root, Dickey-Fuller test.

## 1. Introducción

Uno de los problemas de interés en medición económica tiene que ver con la determinación del tipo de tendencia presente en una serie de tiempo: se debe decidir si una tendencia aleatoria o una determinística está presente en una serie de tiempo dada. Esta distinción es importante puesto que la naturaleza de la permanencia de los choques macroeconómicos sobre la serie depende del tipo de tendencia que posea: mientras que en una serie con tendencia determinística el choque solamente tiene una permanencia temporal, en una con tendencia aleatoria dichos impactos son de naturaleza permanente. En la literatura de series de tiempo se encuentran diferentes enfoques para contrastar esta hipótesis. Algunos de ellos son:

- i) Contraste de raíz unitaria en el polinomio autorregresivo.
- ii) Contraste de raíz unitaria en el polinomio de medias móviles.
- iii) Contraste sobre la variabilidad de la componente de tendencia en series de tiempo estructurales o de componentes no observables.
- iv) Contraste basado en errores de predicción.

A continuación se describen cada uno de los casos mencionados.

**Caso 1.** Nelson & Plosser (1982) proporcionan un contraste de la hipótesis

$$H_0 : Z_t = \beta_0 + Z_{t-1} + a_t \quad \text{contra} \quad H_1 : Z_t = \beta_0 + \beta_1 t + a_t$$

El procedimiento se basa en probar la existencia de una raíz unitaria en el polinomio autorregresivo del proceso. Su contraste usa el modelo

$$\begin{aligned} Z_t &= \beta_0 + \beta_1 t + a_t \\ a_t &= \rho a_{t-1} + u_t \end{aligned}$$

donde  $u_t$  es un proceso de ruido blanco  $N(0, \sigma_u^2)$ . El modelo puede escribirse como

$$Z_t = \beta_0 + \beta_1 t + \rho[Z_{t-1} - \beta_0 - \beta_1(t-1)] + u_t$$

o, en forma reducida,

$$Z_t = \alpha + \delta t + \rho Z_{t-1} + u_t$$

Restando  $Z_{t-1}$  a ambos lados de la ecuación se tiene

$$\Delta Z_t = \alpha + \delta t + \pi Z_{t-1} + u_t$$

donde  $\Delta Z_t = Z_t - Z_{t-1}$  y  $\pi = (\rho - 1)$ .

Con este modelo, la hipótesis  $H_0$  se puede expresar como  $H'_0 : \pi = 0$  y  $\delta = 0$ , la cual puede analizarse usando el contraste Dickey & Fuller (1979) o, si  $u_t$  está autocorrelacionado, el de Dickey y Fuller Aumentado. Otros contrastes de raíces unitarias, como el de Phillips & Perron (1988), Sargan & Bhargava (1983), Cochrane (1988), Hall (1989), Choi (1992), Elliot et al. (1996), Ng & Perron (1996) pueden usarse para contrastar  $H'_0$ .

Sin embargo, para valores de  $\rho$  cercanos a 1 ( $\pi$  cercanos a cero) y muestras pequeñas, Schwert (1989) y DeJong et al. (1992a) señalan que la potencia del contraste es baja y aun menor en presencia de correlaciones entre las  $u_t$ . DeJong et al. (1992b) argumentan que, en general, las pruebas de raíces unitarias tienen baja potencia contra la alternativa de tendencia determinística y concluyen la necesidad de desarrollar nuevas pruebas que tengan potencias mayores.

Cochrane (1991) señala que cualquier contraste de la hipótesis  $H_0 : \theta = \theta_0$  tiene una baja potencia contra la hipótesis  $H_1 : \theta = \theta_0 - \varepsilon$ , en muestras pequeñas y valores arbitrariamente bajos de  $\varepsilon$ , pero que en muchos casos la diferencia entre  $\theta$  y  $\theta_0 - \varepsilon$  puede no ser importante. Sin embargo, en el caso de una raíz unitaria, la baja potencia tiene una importancia particular debido a la discontinuidad de la teoría de la distribución en la raíz unitaria y sus implicaciones en la interpretación del proceso bajo estudio.

**Caso 2.** Considere el modelo

$$\begin{aligned} Z_t &= \mu_t + e_t \\ \Delta e_t &= (1 - \theta B)a_t \end{aligned}$$

donde  $a_t$  es un proceso estacionario,  $\mu_t$  es una componente determinística y  $B$  es el operador de retraso,  $BX_t = X_{t-1}$ . Si  $\theta = 1$ , es decir la componente MA tiene una raíz unitaria, el modelo es estrictamente no invertible. En este caso (por sustitución repetida),

$$e_t = a_t + e_0 - a_0$$

siendo  $e_t$  un proceso estacionario, por tanto el proceso  $Z_t$  tiene tendencia determinística. Si  $|\theta| < 1$ , el proceso es invertible y  $e_t$  tiene una raíz unitaria lo que implica que el proceso  $Z_t$  tiene tendencia aleatoria. Por tanto, el contraste de la hipótesis  $H_0 : \theta = 1$  contra la hipótesis  $H_1 : |\theta| < 1$  es equivalente al contraste de la hipótesis  $H_0 : Z_t$  tiene tendencia determinística contra la hipótesis  $H_1 : Z_t$  tiene tendencia aleatoria. Para contrastar esta hipótesis algunos autores, como Arellano & Pantula (1995), Saikkonen & Luukkonen (1993), Tsay (1993), Tanaka (1990), Choi & Yu (1997), proponen distintos contrastes sobre la existencia de una raíz unitaria en la componente MA.

**Caso 3.** Enfoque basado en el análisis de modelo de componentes no observables o modelos de series de tiempo estructurales. Esta aproximación está descrita en Harvey (1989), Jones (1993), Kitagawa & Gersch (1996), West & Harrison (1989), Young (1984), Shephard & Harvey (1990) y Shephard (1993). El modelo de series de tiempo más simple para el análisis de la tendencia es el modelo que considera una tendencia aleatoria con un término irregular aleatorio de la forma

$$\begin{aligned} y_t &= \mu_t + \varepsilon_t \\ \mu_t &= \mu_{t-1} + \eta_t, \quad t = 1, 2, \dots, n, \end{aligned}$$

donde  $\varepsilon_t$  y  $\eta_t$  son ruidos blancos independientes distribuidos  $N(0, \sigma_\varepsilon^2)$  y  $N(0, \sigma_\eta^2)$ , respectivamente. Este modelo se denomina modelo de nivel local, la tendencia sigue una caminata aleatoria. Cuando  $\sigma_\eta^2$  es cero, el nivel es constante. Un modelo más general, que permite que la componente de tendencia tenga una pendiente aleatoria, es el modelo de tendencia local

$$\begin{aligned} y_t &= \mu_t + \varepsilon_t \\ \mu_t &= \mu_{t-1} + \beta_{t-1} + \eta_t, \quad t = 1, 2, \dots, n, \\ \beta_t &= \beta_{t-1} + \omega_t \end{aligned}$$

siendo  $\varepsilon_t$ ,  $\eta_t$  y  $\omega_t$  ruidos blancos mutuamente distribuidos  $N(0, \sigma_\varepsilon^2)$ ,  $N(0, \sigma_\eta^2)$  y  $N(0, \sigma_\omega^2)$ , respectivamente. Si  $\sigma_\eta^2$  y  $\sigma_\omega^2$  son iguales a cero, la tendencia es determinística, es decir,

$$\mu_t = \beta_0 + \beta t$$

Cuando solamente  $\sigma_\omega^2 = 0$ , la tendencia se reduce a una caminata aleatoria más deriva,

$$\mu_t = \mu_{t-1} + \beta + \eta_t$$

La decisión sobre el tipo de tendencia se basa en el contraste de la hipótesis que considera a  $\sigma_\eta^2$  y  $\sigma_\omega^2$  iguales a cero (Harvey (1989, 2000)).

**Caso 4.** Recientemente, Flores de Frutos & Jerez (2002) proponen una prueba para determinar si un modelo ARIMA( $p, 1, q$ ) es invertible, la cual se basa en comparar los pronósticos de un modelo probablemente sobrediferenciado con los obtenidos por el correspondiente modelo sin diferenciar. Debido a que la no invertibilidad del modelo está asociada a la sobrediferenciación, la prueba permite

concluir que si el modelo es invertible (la diferenciación es adecuada) entonces existirá una tendencia aleatoria en la serie; si el modelo no resulta invertible (existe sobrediferenciación), la tendencia será determinística. El estadístico del contraste tiene una distribución estándar  $\chi^2(1)$  bajo la hipótesis nula de que el proceso sea invertible.

El plan del documento es el siguiente. La sección 2 presenta el procedimiento empleado para la prueba de la hipótesis nula  $H_0 : Z_t = \beta_0 + Z_{t-1} + a_t$  contra la hipótesis alternativa  $H_1 : Z_t = \beta_0 + \beta_1 t + a_t$ , cuando  $a_t$  es ruido blanco gaussiano, basado en la información contenida en la ACF de los residuales del modelo bajo  $H_0$  y en la ACF de los residuales del modelo bajo  $H_1$ . Se obtienen la distribución simulada y la distribución asintótica del estadístico de prueba bajo  $H_0$ , y se investigan las propiedades del contraste. En la sección 3 se generaliza la prueba al caso donde  $a_t$  es un proceso autocorrelacionado normal y se estudian su potencia y tamaño. En la sección 4 se comparan la potencia y el tamaño de la prueba propuesta con la prueba de Dickey y Fuller Aumentada. La sección 5 presenta una aplicación del procedimiento con datos reales. Finalmente, se exponen las conclusiones.

## 2. Estadístico de la prueba cuando $a_t$ es un proceso de ruido blanco normal

**Demostración.** Bajo  $H_0$ , por construcción  $TA$  estará cercano a cero. Entonces, si  $TMIN = TA$  valores pequeños de  $TMIN$  conducirán al no rechazo de  $H_0$ . Por tanto, si  $TMIN(\alpha, n, K)$  es el percentil  $\alpha$ -superior de la distribución nula de  $TMIN$ , no rechaza  $H_0$  a un nivel de significancia  $\alpha^*$  si  $TMIN = TA$  y  $TMIN \leq TMIN(\alpha, n, K)$ .

Rechace  $H_0$  si  $TMIN = TD$  o  $TMIN > TMIN(\alpha, n, K)$ , donde

$$\begin{aligned} \alpha^* &= P[TMIN = TD \text{ o } TMIN > TMIN(\alpha, K, n) | H_0] \\ &= 1 - P[TMIN \leq TMIN(\alpha, K, n) | TMIN = TA, H_0] P[TMIN = TA | H_0] \\ &= 1 - (1 - \alpha) P[TMIN = TA | H_0] \end{aligned}$$

□

### 2.1. La distribución simulada de $TMIN$

La distribución nula para  $TMIN$  puede ser derivada por simulación. Los experimentos de simulación Monte Carlo presentados en este documento, fueron realizados empleando el paquete estadístico SCA (SCA-Corp. (2001), versión VI. 3a). Para la derivación de la distribución, es importante observar que ella es invariante al valor de los parámetros  $\beta_0$  y  $\sigma_a^2$ .

El modelo simulado fue  $Z_t = 2 + Z_{t-1} + a_t$ , donde  $a_t \sim N(0, 1)$ . Los valores iniciales de las series simuladas son aleatorios. La tabla 1 presenta los percentiles superiores de la distribución de  $TMIN$ , para niveles de significancia de  $\alpha = 0.01, 0.025, 0.05$ , valores de  $K = 5, 10, 15$  y diferentes tamaños muestrales. Se usaron 100000 simulaciones para cada  $n, K$  y  $\alpha$ . Los resultados se

suavizaron usando la técnica de suavizamiento denominada Lowess, descrita por Cleveland(1993, 1994).

En la tabla se incluyen los valores de la estadística para series de tamaño pequeño con el fin de prever el uso inadecuado de la prueba cuando este sea el caso. El lector debe considerar que en esta situación las estimaciones de los coeficientes de autocorrelación deben modificarse teniendo en cuenta por ejemplo las sugeridos por Fuller (1976) o las modificaciones de los niveles de significancia propuestas por Pankratz (1983).

TABLA 1: Percentiles superiores suavizados para la distribución de  $TMIN$  bajo  $H_0$ .

$n$	$K = 5$			$K = 10$			$K = 15$		
	0.05	0.025	0.01	0.05	0.025	0.01	0.05	0.025	0.01
30	9.2	10.8	13.2	14.8	17.0	20.2	18.7	21.3	24.7
40	9.4	11.4	13.8	15.8	17.8	21.5	20.1	24.0	27.4
50	9.6	12.1	14.3	16.5	18.6	22.5	21.4	25.1	29.5
60	9.8	12.2	14.9	17.0	19.5	23.1	22.8	25.9	30.6
100	10.7	12.5	14.9	17.6	20.0	23.2	23.4	26.9	30.7
150	10.8	12.6	15.0	17.8	20.1	23.3	23.9	27.2	31.0
200	10.9	12.6	15.0	18.0	20.3	23.4	24.4	27.3	31.1
250	10.9	12.7	15.0	18.1	20.4	23.4	24.6	27.4	31.0
300	11.0	12.7	15.0	18.1	20.4	23.4	24.7	27.4	31.0
350	11.0	12.8	15.1	18.1	20.4	23.4	24.7	27.5	31.0
400	11.0	12.8	15.1	18.2	20.4	23.4	24.8	27.5	30.9
450	11.0	12.8	15.1	18.2	20.4	23.3	24.8	27.5	30.9
500	11.0	12.8	15.1	18.2	20.4	23.3	24.9	27.5	30.8
1000	11.1	12.8	15.1	18.2	20.4	23.3	24.9	27.5	30.7
5000	11.1	12.9	15.1	18.2	20.3	23.2	25.0	27.5	30.7

### 2.1.1. Obtención del nivel de significancia de la prueba

Dada la regla de decisión de la prueba, su verdadero nivel de significancia es  $\alpha^* = 1 - (1 - \alpha)P[TMIN = TA | H_0]$ , donde  $P[TMIN = TA]$  se calculó usando las 100000 simulaciones realizadas para el cálculo de la distribución exacta de  $TMIN$  bajo  $H_0$ , para los casos en los cuales  $TMIN = TA$ . La tabla 2 presenta la probabilidad de que  $TMIN = TA$ , para diferentes valores de  $n$  y de  $K$ .

TABLA 2:  $P[TMIN = TA]$  bajo  $H_0$ .

$n$	$K = 5$	$K = 10$	$K = 15$
30	0.95433	0.95552	0.96044
40	0.98984	0.98858	0.98826
50	0.99816	0.99732	0.99727
60	0.99972	0.99961	0.99931
100	1.00000	1.00000	1.00000
150	1.00000	1.00000	1.00000
200	1.00000	1.00000	1.00000
250	1.00000	1.00000	1.00000

Los resultados muestran que bajo  $H_0$  hay una rápida convergencia de la  $P[TMIN = TA]$  a 1, lo que indica que la distribución de  $TMIN$  converge rápidamente a la distribución marginal de  $TA$  a medida que  $n$  crece.

Usando la tabla 2 podemos encontrar el verdadero nivel de significancia de la prueba para cada nivel  $\alpha$  en la distribución de  $TMIN$ . Por ejemplo, para  $n = 30$ ,  $K = 5$  y  $\alpha = 0.05$ , el verdadero nivel de significancia de la prueba es  $\alpha^* = 1 - (0.95)(0.95433) = 0.093$ . La tabla 3 presenta los verdaderos niveles de significancia para los diferentes valores considerados de  $n$ ,  $K$  y  $\alpha$ .

TABLA 3: Verdaderos niveles de significancia  $\alpha^*$  de la prueba  $TMIN$ .

$n$	$K = 5$			$K = 10$			$K = 15$		
	0.05	0.025	0.01	0.05	0.025	0.01	0.05	0.025	0.01
30	0.0934	0.0695	0.0552	0.0923	0.0684	0.0540	0.0876	0.0636	0.0492
40	0.0597	0.0349	0.0201	0.0608	0.0361	0.0213	0.0612	0.0364	0.0216
50	0.0517	0.0268	0.0118	0.0525	0.0276	0.0127	0.0526	0.0277	0.0127
60	0.0503	0.0253	0.0103	0.0504	0.0254	0.0104	0.0507	0.0257	0.0107
100	0.0500	0.0250	0.0100	0.0500	0.0250	0.0100	0.0500	0.0250	0.0100
150	0.0500	0.0250	0.0100	0.0500	0.0250	0.0100	0.0500	0.0250	0.0100
200	0.0500	0.0250	0.0100	0.0500	0.0250	0.0100	0.0500	0.0250	0.0100
250	0.0500	0.0250	0.0100	0.0500	0.0250	0.0100	0.0500	0.0250	0.0100

Como era de esperarse, para tamaños muestrales mayores que 60, los niveles de significancia nominales son iguales a los verdaderos. Con tamaños muestrales pequeños, entre 30 y 40, para obtener un nivel de significancia verdadero  $\alpha^*$  alrededor de 0.05 deberíamos usar un  $\alpha$  aproximado de 0.01.

**Ejemplo 1.** Aplicación de la prueba a datos simulados. Se simularon  $n = 60$  datos del modelo  $Z_t = \beta_0 + Z_{t-1} + a_t$ , con  $\beta_0 = 1.5$  y  $a_t \sim N(0, 1)$ . Para aplicar el procedimiento de la prueba, se obtuvo  $TA = 4.267$ ,  $TD = 382.746$ , entonces  $TMIN = \min\{TA, TD\} = 4.267$ . Para  $K = 5$  y un nivel  $\alpha = 0.025$  en la Tabla 1 se tiene que el valor crítico es  $TMIN(0.025, 5, 60) = 12.2$ . Como  $TMIN = TA$  y  $TMIN < 12.2$ , no se rechaza  $H_0$ , es decir, se concluye correctamente que los datos son generados por un proceso de caminata aleatoria con deriva, a un nivel de significancia  $\alpha^* = 0.0253$  (tabla 3).

## 2.2. Potencia de la prueba $TMIN$

La tabla 4 presenta la potencia de la prueba para los diferentes valores considerados de  $n$ ,  $K$  y  $\alpha$ . Se usaron 20000 simulaciones. El modelo simulado fue  $Z_t = 2 + 0.7t + a_t$ , donde  $a_t \sim N(0, 1)$ .

De la tabla 4 observamos lo siguiente:

- La potencia de la prueba depende del valor de  $K$ . Para la elección del valor de  $K$  es importante tener en cuenta que la prueba está diseñada para datos no estacionales. Para datos de baja frecuencia, los resultados obtenidos apoyan la sugerencia de Ljung (1986) de escoger a  $K$  relativamente pequeño, por

TABLA 4: Potencia de la prueba  $TMIN$ .

$n$	$K = 5$			$K = 10$			$K = 15$		
	0.05	0.025	0.01	0.05	0.025	0.01	0.05	0.025	0.01
30	0.946	0.944	0.943	0.930	0.928	0.926	0.925	0.922	0.920
40	0.972	0.970	0.968	0.961	0.959	0.958	0.954	0.952	0.950
50	0.987	0.985	0.984	0.979	0.977	0.976	0.974	0.972	0.971
60	0.994	0.993	0.992	0.988	0.986	0.985	0.984	0.982	0.981
100	1.000	1.000	0.999	0.999	0.999	0.998	0.998	0.998	0.997
150	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
200	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
250	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

ejemplo alrededor de  $K = 5$ . Con datos de alta frecuencia no estacionales, la elección de  $K$  depende de la frecuencia de medición.

- Para cada valor de  $K$  y cada valor de  $\alpha$ , la potencia de la prueba tiende a 1 a medida que  $n$  crece.
- La prueba tiene una potencia muy alta aun en muestras pequeñas.
- Si  $n < 40$ , la potencia que aparece en la tabla no es exacta, puesto que el verdadero nivel de significancia usado es  $\alpha^*$  y no  $\alpha$ . Sin embargo, si empleamos  $\alpha = 0.01$  para obtener un nivel  $\alpha^* \approx 0.05$ , la verdadera potencia está alrededor de 0.943 contra la nominal de 0.946.
- Con valores de  $n$  mayores que 100, la prueba alcanza la máxima potencia de 1.

### 2.3. Distribución asintótica del estadístico $TMIN$

**Proposición 1.** Bajo  $H_0$  y si  $a_t$  es un proceso de ruido blanco gaussiano,

$$TMIN \xrightarrow{d} \chi^2(K), \text{ cuando } n \rightarrow \infty$$

**Demostración.** Bajo  $H_0$  y cuando  $n \rightarrow \infty$ , se cumple que:

- $TA - TMIN \xrightarrow{p} 0$
- $TA$  es el estadístico de Box-Pierce, para el cual, agregando el supuesto de normalidad en  $a_t$ , Box & Pierce (1970) probaron que  $TA \xrightarrow{d} \chi^2(K)$ . Por tanto  $TMIN \xrightarrow{d} \chi^2(K)$ .  $\square$

**Observación 1.** Para una mejor aproximación a la distribución chi-cuadrado, se puede emplear la modificación de Ljung & Box (1978) del estadístico  $TMIN$ , dada por  $TMIN^* = \min\{TA^*, TD^*\}$ , donde

$$TA^* = n(n+2) \sum_{\substack{j=-K \\ j \neq 0}}^K (n-j)^{-1} \left[ \hat{\rho}_{\alpha \nabla Z}^{(0)}(j) \right]^2$$



y

$$TD^* = n(n+2) \sum_{\substack{j=-K \\ j \neq 0}}^K (n-j)^{-1} \left[ \hat{\rho}_{\hat{a}Z^*}^{(j)} \right]^2$$

### 2.3.1. Tamaño de la prueba asintótica

La tabla 5 presenta el tamaño de la prueba para la distribución asintótica de  $TMIN$  con diferentes valores de  $\alpha$ ,  $K$  y  $n$ . Se usaron 20.000 simulaciones. El modelo generador de los datos es  $Z_t = 2 + Z_{t-1} + a_t$ , donde  $a_t \sim N(0, 1)$ .

TABLA 5: Tamaño de la prueba bajo la distribución asintótica de  $TMIN$ .

$n$	$K = 5$			$K = 10$			$K = 15$		
	0.05	0.025	0.01	0.05	0.025	0.01	0.05	0.025	0.01
30	0.090	0.071	0.060	0.104	0.079	0.063	0.112	0.086	0.068
40	0.061	0.037	0.022	0.079	0.053	0.035	0.088	0.062	0.040
50	0.055	0.030	0.015	0.069	0.044	0.025	0.081	0.054	0.032
60	0.054	0.029	0.014	0.066	0.040	0.023	0.074	0.046	0.026
100	0.052	0.028	0.012	0.061	0.035	0.017	0.065	0.039	0.020
150	0.052	0.028	0.012	0.058	0.032	0.014	0.060	0.035	0.018
200	0.053	0.027	0.011	0.054	0.029	0.013	0.060	0.034	0.016
250	0.049	0.023	0.010	0.054	0.028	0.014	0.060	0.033	0.015
300	0.050	0.026	0.011	0.052	0.028	0.012	0.057	0.031	0.014
350	0.051	0.026	0.011	0.053	0.028	0.012	0.056	0.030	0.014
400	0.051	0.027	0.012	0.052	0.027	0.012	0.054	0.028	0.012
450	0.049	0.024	0.010	0.052	0.027	0.011	0.053	0.028	0.012
500	0.051	0.026	0.010	0.052	0.026	0.010	0.054	0.029	0.013
1000	0.048	0.025	0.010	0.050	0.025	0.010	0.052	0.027	0.011

De la tabla 5 se observa que:

- Para  $K = 5$ , los niveles verdaderos están más próximos a los nominales.
- A medida que  $K$  crece, la convergencia de los verdaderos niveles a los nominales es más lenta.
- Para cada  $K$  y  $\alpha$ , el tamaño de la prueba converge al nivel de significancia nominal cuando  $n \rightarrow \infty$ .

### 2.3.2. Potencia de la prueba asintótica

La tabla 6 presenta la potencia de la prueba asintótica para diferentes valores de  $\alpha$ ,  $K$  y  $n$ . Se usaron 20000 simulaciones. El proceso generador de los datos es el modelo  $Z_t = 2 + 0.7t + a_t$ , donde  $a_t \sim N(0, 1)$ .

De la tabla 6 observamos que:

- La prueba asintótica tiene una potencia mayor que 0.9 aun en muestras pequeñas.

TABLA 6: Potencia de la prueba asintótica.

$n$	$K = 5$			$K = 10$			$K = 15$		
	0.05	0.025	0.01	0.05	0.025	0.01	0.05	0.025	0.01
30	0.944	0.941	0.940	0.922	0.918	0.916	0.915	0.911	0.909
40	0.971	0.970	0.968	0.960	0.957	0.955	0.946	0.943	0.940
50	0.985	0.983	0.982	0.977	0.974	0.972	0.969	0.966	0.964
60	0.995	0.993	0.992	0.987	0.984	0.983	0.984	0.982	0.980
100	1.000	1.000	1.000	0.999	0.999	0.998	0.999	0.998	0.998
150	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
200	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
250	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

- Se alcanza rápidamente la máxima potencia de 1, independientemente del valor de  $K$ .
- Para cada valor de  $K$  y  $\alpha$ , la potencia de la prueba tiende a 1 cuando  $n \rightarrow \infty$ .

### 3. Estadístico de la prueba cuando $a_t$ es un proceso gaussiano autocorrelacionado

La prueba desarrollada en la sección anterior supone que el término de error del modelo bajo  $H_0$  no está autocorrelacionado. Sin embargo, en muchos casos suele existir autocorrelación que, de no ser tenida en cuenta, puede deteriorar el comportamiento de la prueba. Para observar los efectos sobre el tamaño de la prueba cuando la autocorrelación es ignorada, la tabla 7 presenta los tamaños de la prueba suponiendo que bajo  $H_0$  existe una simple estructura MA(1) con parámetro  $\theta = 0.5$  en el ruido del modelo. Para  $K = 5$  se realizaron 20000 simulaciones con diferentes tamaños muestrales, una distribución  $N(0, 1)$  para el término de error y un valor de  $\beta_0 = 2$  para el modelo  $Z_t = \beta_0 + Z_{t-1} + (1 - \theta B)a_t$ .

TABLA 7: Efectos de errores correlacionados sobre el tamaño de la prueba,  $K = 5$ .

$n$	0.05	0.025	0.01	$n$	0.05	0.025	0.01
30	0.651	0.631	0.617	250	1	1	1
40	0.602	0.544	0.495	300	1	1	1
50	0.627	0.529	0.434	350	1	1	1
60	0.704	0.582	0.443	400	1	1	1
100	0.944	0.882	0.763	450	1	1	1
150	0.998	0.992	0.971	500	1	1	1
200	1	1	0.998	1000	1	1	1

Los resultados anteriores muestran que, debido a la presencia de la autocorrelación bajo  $H_0$ , el estadístico de la prueba tiende a tomar valores grandes, y a medida que  $n$  crece, debido a la consistencia de la ACFM, la probabilidad de rechazar  $H_0$ , siendo cierta, crece hacia 1. En conclusión, si la existencia de autocorrelación no se tiene en cuenta, la prueba rechazará  $H_0$ , siendo cierta, con probabilidad mayor que  $\alpha$  a medida que  $n$  crece. Como la autocorrelación se presenta frecuentemente

en situaciones reales, a continuación se extiende la prueba al caso en el que el término de ruido del modelo se genera por un proceso ARMA( $p, q$ ) estacionario e invertible.

La extensión de la prueba compara la hipótesis  $H_0 : Z_t = \beta_0 + Z_{t-1} + b_t$  con  $H_1 : Z_t = \beta_0 + \beta_1 t + b_t$ , pero a diferencia del caso anterior  $b_t$  no es un proceso de ruido blanco, sino que es el proceso ARMA,  $b_t = [\theta(B)/\phi(B)]a_t$ . Si conocemos dicho proceso, la extensión de la prueba al caso autocorrelacionado es natural. Sin embargo, este proceso es generalmente desconocido y debe identificarse desde los datos.

**Proposición 2.** (Generalización de la prueba) Para contrastar  $H_0 : Z_t = \beta_0 + Z_{t-1} + b_t$  contra  $H_1 : Z_t = \beta_0 + \beta_1 t + b_t$ , donde  $b_t = [\theta(B)/\phi(B)]a_t$  con  $a_t$  un proceso de ruido blanco,  $N(0, \sigma_a^2)$  y  $\phi(B)$ ,  $\theta(B)$  son los polinomios autorregresivos y de medias móviles con raíces fuera del círculo unidad y sin raíces comunes, se puede emplear el siguiente procedimiento:

1) Defina el estadístico  $TMIN = \min\{TA, TD\}$ , donde

$$TA = n \sum_{j=1}^K [\hat{\rho}_a^{(0)}(j)]^2 \quad y \quad TD = n \sum_{j=1}^K [\hat{\rho}_a^{(1)}(j)]^2$$

donde  $\hat{\rho}_a^{(0)}(j)$  y  $\hat{\rho}_a^{(1)}(j)$  son los coeficientes de autocorrelación de orden  $j$  de la ACF de los residuales del modelo bajo  $H_0$  y  $H_1$ , respectivamente.

2) Bajo  $H_0$  y  $n$  grande, no rechace  $H_0$  a un nivel de significancia aproximado  $\alpha$  si

$$TMIN = TA \quad y \quad TMIN \leq \chi^2(\alpha, K - p - q)$$

y rechace  $H_0$  si

$$TMIN = TD \quad o \quad TMIN > \chi^2(\alpha, K - p - q), \quad con \quad K - p - q > 0$$

**Demostración.** Por construcción  $TA$  está cercano a cero, bajo  $H_0$ . Entonces si  $TMIN = TA$ , valores pequeños de  $TMIN$  conducirán al no rechazo de  $H_0$ . La obtención de la distribución nula asintótica de  $TMIN$  se basa en la proposición 2. Para una mejor aproximación a la distribución chi-cuadrado se puede emplear la modificación de Ljung-Box del estadístico  $TMIN$ .  $\square$

### 3.1. Tamaño de la prueba asintótica para procesos MA(1) y AR(1)

Las tablas 8, 9, 10 y 11 contienen los resultados de la simulación del tamaño de la prueba para modelos MA(1) y AR(1) con parámetro  $\theta = \pm 0.2, \pm 0.5, \pm 0.8, \pm 0.95$  y  $\phi = \pm 0.2, \pm 0.5, \pm 0.8, \pm 0.95$ , valores de  $\alpha = 0.01, 0.025, 0.05, K = 5$  y  $\beta_0 = 2$ . Para cada combinación de  $\alpha$  con  $\theta$  y  $\phi$  y se realizaron 20.000 simulaciones. El ruido es un proceso  $N(0, 1)$ . El modelo generador de los datos es el modelo bajo  $H_0$ .

De las tablas 8, 9, 10 y 11 se observa que:

TABLA 8: Tamaño de la prueba para procesos MA(1) con  $\theta > 0$ .

$n$	$\theta = 0.2$			$\theta = 0.5$			$\theta = 0.8$			$\theta = 0.95$		
	0.05	0.025	0.01	0.05	0.025	0.01	0.05	0.025	0.01	0.05	0.025	0.01
30	0.248	0.239	0.234	0.432	0.426	0.423	0.670	0.664	0.662	0.700	0.692	0.688
40	0.144	0.132	0.126	0.297	0.287	0.281	0.631	0.625	0.622	0.719	0.713	0.708
50	0.089	0.073	0.064	0.194	0.182	0.177	0.572	0.564	0.560	0.724	0.716	0.711
60	0.064	0.044	0.034	0.131	0.115	0.107	0.507	0.498	0.493	0.738	0.731	0.727
70	0.053	0.032	0.020	0.096	0.078	0.068	0.439	0.429	0.422	0.741	0.733	0.729
80	0.047	0.025	0.014	0.078	0.056	0.044	0.369	0.357	0.350	0.741	0.734	0.730
100	0.046	0.024	0.010	0.053	0.031	0.020	0.264	0.247	0.238	0.736	0.730	0.726
150	0.048	0.023	0.009	0.051	0.025	0.010	0.114	0.093	0.080	0.713	0.706	0.701
200	0.048	0.024	0.009	0.050	0.025	0.010	0.071	0.045	0.031	0.659	0.651	0.646
250	0.050	0.025	0.011	0.050	0.025	0.011	0.059	0.032	0.017	0.577	0.567	0.560
300	0.049	0.024	0.010	0.052	0.027	0.011	0.055	0.029	0.012	0.503	0.489	0.480
350	0.047	0.023	0.009	0.051	0.027	0.010	0.054	0.028	0.011	0.431	0.414	0.405
400	0.051	0.025	0.010	0.051	0.026	0.011	0.052	0.026	0.011	0.360	0.341	0.330
450	0.050	0.024	0.010	0.049	0.025	0.011	0.052	0.026	0.011	0.303	0.283	0.271
500	0.046	0.024	0.010	0.049	0.025	0.010	0.052	0.026	0.010	0.255	0.231	0.218
1000	0.048	0.026	0.010	0.049	0.024	0.010	0.053	0.027	0.012	0.086	0.053	0.031
5000	0.051	0.026	0.011	0.048	0.025	0.011	0.052	0.027	0.010	0.073	0.039	0.016

TABLA 9: Tamaño de la prueba para procesos MA(1) con  $\theta < 0$ .

$n$	$\theta = -0.2$			$\theta = -0.5$			$\theta = -0.8$			$\theta = -0.95$		
	0.05	0.025	0.01	0.05	0.025	0.01	0.05	0.025	0.01	0.05	0.025	0.01
30	0.132	0.121	0.114	0.094	0.078	0.071	0.091	0.065	0.049	0.108	0.073	0.050
40	0.072	0.056	0.048	0.057	0.037	0.026	0.065	0.038	0.021	0.091	0.055	0.031
50	0.052	0.032	0.021	0.048	0.027	0.013	0.059	0.032	0.015	0.085	0.049	0.024
60	0.047	0.025	0.013	0.045	0.023	0.010	0.058	0.030	0.013	0.083	0.044	0.020
70	0.045	0.022	0.008	0.047	0.024	0.010	0.057	0.030	0.014	0.081	0.044	0.021
80	0.042	0.021	0.009	0.049	0.024	0.010	0.055	0.030	0.012	0.077	0.042	0.018
100	0.046	0.022	0.009	0.046	0.022	0.010	0.057	0.029	0.012	0.078	0.042	0.019
150	0.046	0.024	0.010	0.052	0.026	0.011	0.053	0.028	0.011	0.068	0.036	0.015
200	0.050	0.023	0.009	0.050	0.026	0.010	0.057	0.029	0.011	0.067	0.035	0.015
250	0.050	0.025	0.011	0.050	0.025	0.009	0.055	0.027	0.012	0.072	0.037	0.016
300	0.049	0.024	0.010	0.051	0.025	0.010	0.055	0.027	0.011	0.070	0.036	0.014
350	0.046	0.024	0.009	0.050	0.026	0.009	0.053	0.028	0.010	0.072	0.037	0.016
400	0.050	0.025	0.011	0.053	0.026	0.011	0.054	0.028	0.011	0.072	0.038	0.017
450	0.050	0.025	0.009	0.048	0.025	0.010	0.053	0.027	0.011	0.073	0.039	0.017
500	0.048	0.024	0.010	0.052	0.025	0.010	0.054	0.028	0.011	0.076	0.040	0.018
1000	0.047	0.024	0.010	0.049	0.024	0.009	0.052	0.025	0.010	0.078	0.042	0.019
5000	0.050	0.026	0.011	0.050	0.025	0.011	0.053	0.027	0.010	0.070	0.037	0.015

- Para cada  $\alpha$  y  $\theta > 0$ , a medida que  $n \rightarrow \infty$ , el tamaño de la prueba converge al nivel de significancia nominal. La convergencia se hace más lenta a medida que  $\theta \rightarrow 1$ . Con tamaños muestrales pequeños y moderados, a mayor valor del parámetro  $\theta$ , mayor es la distorsión del verdadero tamaño de la prueba con respecto al nivel de significancia nominal.

TABLA 10: Tamaño de la prueba para procesos AR(1) con  $\phi > 0$ .

$n$	$\phi = 0.2$			$\phi = 0.5$			$\phi = 0.8$			$\phi = 0.95$		
	0.05	0.025	0.01	0.05	0.025	0.01	0.05	0.025	0.01	0.05	0.025	0.01
30	0.293	0.280	0.274	0.126	0.106	0.095	0.074	0.050	0.036	0.076	0.050	0.035
40	0.273	0.261	0.255	0.088	0.067	0.055	0.058	0.036	0.019	0.062	0.037	0.019
50	0.239	0.227	0.220	0.062	0.040	0.029	0.049	0.026	0.013	0.057	0.031	0.015
60	0.215	0.200	0.192	0.058	0.034	0.019	0.051	0.026	0.013	0.059	0.031	0.015
70	0.188	0.172	0.163	0.056	0.031	0.015	0.055	0.030	0.011	0.065	0.035	0.014
80	0.161	0.146	0.137	0.050	0.027	0.012	0.050	0.027	0.012	0.060	0.032	0.013
100	0.126	0.107	0.097	0.049	0.025	0.010	0.052	0.027	0.011	0.064	0.034	0.013
150	0.078	0.057	0.045	0.048	0.024	0.010	0.050	0.026	0.010	0.063	0.031	0.012
200	0.066	0.040	0.025	0.052	0.027	0.010	0.054	0.027	0.011	0.068	0.035	0.015
250	0.057	0.032	0.017	0.052	0.027	0.011	0.055	0.028	0.012	0.069	0.036	0.015
300	0.053	0.026	0.013	0.051	0.025	0.010	0.052	0.026	0.010	0.066	0.034	0.014
350	0.051	0.026	0.011	0.052	0.026	0.010	0.053	0.026	0.010	0.068	0.033	0.014
400	0.048	0.024	0.010	0.047	0.024	0.009	0.050	0.024	0.010	0.064	0.032	0.013
450	0.051	0.024	0.009	0.051	0.025	0.010	0.054	0.027	0.011	0.068	0.035	0.014
500	0.052	0.026	0.010	0.050	0.026	0.011	0.050	0.027	0.011	0.067	0.034	0.015
1000	0.047	0.023	0.010	0.048	0.024	0.010	0.050	0.025	0.010	0.066	0.032	0.013
5000	0.048	0.024	0.010	0.051	0.026	0.011	0.052	0.026	0.010	0.069	0.035	0.014

TABLA 11: Tamaño de la prueba para procesos AR(1) con  $\phi < 0$ .

$n$	$\phi = -0.2$			$\phi = -0.5$			$\phi = -0.8$			$\phi = -0.95$		
	0.05	0.025	0.01	0.05	0.025	0.01	0.05	0.025	0.01	0.05	0.025	0.01
30	0.461	0.455	0.452	0.340	0.333	0.331	0.181	0.168	0.161	0.138	0.114	0.101
40	0.447	0.441	0.437	0.239	0.228	0.224	0.100	0.080	0.070	0.091	0.055	0.031
50	0.404	0.396	0.393	0.162	0.149	0.142	0.064	0.042	0.029	0.071	0.039	0.020
60	0.365	0.357	0.353	0.115	0.097	0.089	0.058	0.032	0.018	0.071	0.037	0.017
70	0.326	0.316	0.311	0.089	0.069	0.056	0.060	0.032	0.013	0.074	0.040	0.017
80	0.293	0.284	0.278	0.068	0.048	0.036	0.052	0.026	0.011	0.067	0.035	0.014
100	0.237	0.223	0.216	0.054	0.032	0.018	0.053	0.027	0.013	0.067	0.036	0.016
150	0.146	0.129	0.120	0.049	0.024	0.010	0.053	0.026	0.011	0.068	0.034	0.015
200	0.106	0.086	0.072	0.051	0.027	0.011	0.054	0.028	0.011	0.070	0.036	0.014
250	0.079	0.057	0.044	0.052	0.026	0.011	0.055	0.028	0.012	0.070	0.037	0.016
300	0.065	0.041	0.027	0.051	0.026	0.010	0.051	0.027	0.011	0.067	0.036	0.014
350	0.056	0.034	0.020	0.051	0.025	0.010	0.054	0.027	0.011	0.069	0.036	0.015
400	0.050	0.027	0.014	0.047	0.024	0.009	0.049	0.025	0.010	0.065	0.034	0.013
450	0.052	0.026	0.012	0.049	0.024	0.010	0.052	0.025	0.011	0.069	0.034	0.014
500	0.051	0.026	0.011	0.052	0.025	0.010	0.054	0.028	0.011	0.073	0.037	0.015
1000	0.049	0.023	0.010	0.050	0.024	0.010	0.051	0.025	0.010	0.067	0.032	0.013
5000	0.048	0.025	0.010	0.050	0.025	0.011	0.051	0.025	0.010	0.069	0.035	0.014

- Para cada  $\alpha$  y  $\theta < 0$ , a medida que  $n \rightarrow \infty$  el tamaño de la prueba converge a nivel de significancia nominal. La convergencia se hace más lenta a medida que  $\theta \rightarrow -1$ .
- Para cada  $\alpha$  y  $\phi$ , en forma general se observa que a medida que  $n \rightarrow \infty$  el tamaño de la prueba converge a nivel de significancia nominal. Las mayores distorsiones del tamaño aparecen para valores pequeños de  $\phi$  y  $n$ .

### 3.2. Potencia de la prueba con modelos MA(1) y AR(1)

Las tablas 12, 13, 14 y 15 contienen los resultados de la potencia de la prueba para modelos MA(1) y AR(1) con parámetro  $\theta = \pm 0.2, \pm 0.5, \pm 0.8, \pm 0.95$ ,  $\phi = \pm 0.2, \pm 0.5, \pm 0.8, \pm 0.95$ , valores de  $\alpha = 0.01, 0.025, 0.05$ ,  $K = 5$ ,  $\beta_0 = 2$  y  $\beta_1 = 0.7$ . Con cada combinación de  $\alpha$  con  $\theta$  y  $\phi$  se realizaron 20000 simulaciones. El modelo generador de los datos es el modelo bajo  $H_1$ .

TABLA 12: Potencia de la prueba para procesos MA(1) con  $\theta > 0$ .

$n$	$\theta = 0.2$			$\theta = 0.5$			$\theta = 0.8$			$\theta = 0.95$		
	0.05	0.025	0.01	0.05	0.025	0.01	0.05	0.025	0.01	0.05	0.025	0.01
30	0.798	0.791	0.788	0.910	0.905	0.903	0.942	0.937	0.934	0.942	0.936	0.933
40	0.839	0.834	0.831	0.952	0.949	0.946	0.974	0.972	0.969	0.974	0.971	0.967
50	0.873	0.868	0.865	0.974	0.971	0.969	0.989	0.986	0.984	0.989	0.985	0.982
60	0.892	0.888	0.884	0.986	0.983	0.982	0.995	0.993	0.992	0.996	0.993	0.991
70	0.914	0.908	0.906	0.992	0.990	0.989	0.998	0.997	0.996	0.998	0.997	0.996
80	0.930	0.925	0.922	0.995	0.993	0.992	1.000	0.998	0.997	1.000	0.999	0.997
100	0.956	0.953	0.951	0.999	0.998	0.997	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
150	0.984	0.982	0.980	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
200	0.993	0.992	0.992	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
250	0.997	0.997	0.996	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
300	0.999	0.999	0.999	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
350	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
400	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
450	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
500	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
1000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

TABLA 13: Potencia de la prueba para procesos MA(1) con  $\theta < 0$ .

$n$	$\theta = -0.2$			$\theta = -0.5$			$\theta = -0.8$			$\theta = -0.95$		
	0.05	0.025	0.01	0.05	0.025	0.01	0.05	0.025	0.01	0.05	0.025	0.01
30	0.704	0.698	0.694	0.814	0.808	0.806	0.843	0.835	0.830	0.827	0.815	0.808
40	0.740	0.733	0.729	0.882	0.877	0.873	0.917	0.911	0.907	0.909	0.900	0.895
50	0.774	0.768	0.764	0.923	0.919	0.917	0.954	0.949	0.946	0.951	0.944	0.939
60	0.804	0.798	0.794	0.946	0.942	0.939	0.975	0.970	0.968	0.975	0.970	0.965
70	0.828	0.823	0.820	0.964	0.961	0.959	0.988	0.984	0.982	0.989	0.984	0.982
80	0.847	0.842	0.839	0.976	0.974	0.972	0.994	0.991	0.989	0.995	0.991	0.988
100	0.878	0.875	0.872	0.989	0.988	0.987	0.999	0.998	0.996	1.000	0.999	0.997
150	0.931	0.928	0.927	0.998	0.997	0.997	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
200	0.960	0.959	0.958	1.000	1.000	0.999	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
250	0.974	0.974	0.973	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
300	0.984	0.983	0.982	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
350	0.990	0.989	0.989	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
400	0.995	0.994	0.994	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
450	0.996	0.996	0.995	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
500	0.998	0.998	0.997	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
1000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
5000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

De las tablas 12, 13, 14 y 15 se observa que:

TABLA 14: Potencia de la prueba para procesos AR(1) con  $\phi > 0$ .

$n$	$\phi = 0.2$			$\phi = 0.5$			$\phi = 0.8$			$\phi = 0.95$		
	0.05	0.025	0.01	0.05	0.025	0.01	0.05	0.025	0.01	0.05	0.025	0.01
30	0.833	0.827	0.825	0.728	0.719	0.715	0.544	0.535	0.530	0.444	0.436	0.432
40	0.908	0.905	0.903	0.826	0.819	0.815	0.619	0.611	0.607	0.462	0.454	0.451
50	0.944	0.941	0.939	0.884	0.876	0.872	0.679	0.672	0.668	0.471	0.465	0.462
60	0.963	0.961	0.959	0.918	0.913	0.910	0.714	0.707	0.704	0.468	0.461	0.458
70	0.978	0.976	0.975	0.943	0.939	0.935	0.747	0.741	0.738	0.464	0.456	0.452
80	0.987	0.985	0.984	0.962	0.958	0.956	0.772	0.767	0.764	0.458	0.451	0.447
100	0.994	0.993	0.992	0.978	0.977	0.975	0.814	0.809	0.807	0.468	0.460	0.457
150	0.999	0.999	0.999	0.994	0.993	0.993	0.879	0.875	0.872	0.475	0.468	0.464
200	1.000	1.000	1.000	0.998	0.997	0.997	0.916	0.914	0.913	0.492	0.485	0.480
250	1.000	1.000	1.000	0.999	0.999	0.999	0.942	0.941	0.940	0.507	0.501	0.497
300	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.959	0.957	0.956	0.524	0.516	0.511
350	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.971	0.970	0.969	0.541	0.533	0.529
400	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.979	0.977	0.977	0.562	0.555	0.550
450	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.985	0.984	0.984	0.577	0.569	0.565
500	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.988	0.987	0.987	0.594	0.586	0.582
1000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.999	0.703	0.696	0.693
5000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.956	0.953	0.952

TABLA 15: Potencia de la prueba para procesos AR(1) con  $\phi < 0$ .

$n$	$\phi = -0.2$			$\phi = -0.5$			$\phi = -0.8$			$\phi = -0.95$		
	0.05	0.025	0.01	0.05	0.025	0.01	0.05	0.025	0.01	0.05	0.025	0.01
30	0.906	0.903	0.902	0.928	0.925	0.924	0.941	0.938	0.936	0.950	0.947	0.945
40	0.949	0.947	0.946	0.962	0.960	0.959	0.970	0.967	0.966	0.976	0.974	0.972
50	0.971	0.970	0.969	0.978	0.976	0.976	0.983	0.981	0.981	0.988	0.986	0.984
60	0.983	0.982	0.981	0.990	0.988	0.987	0.994	0.992	0.991	0.995	0.994	0.993
70	0.990	0.989	0.989	0.995	0.993	0.992	0.997	0.995	0.995	0.998	0.997	0.996
80	0.995	0.993	0.993	0.997	0.996	0.996	0.999	0.998	0.997	1.000	0.999	0.998
100	0.999	0.998	0.997	1.000	0.999	0.999	1.000	1.000	0.999	1.000	1.000	1.000
150	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
200	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
250	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
300	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
350	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
400	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
450	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
500	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
1000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
5000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

- Cuando el error es MA(1), en general la prueba alcanza potencias. La prueba es consistente ya que, para cada valor  $\alpha$  y de  $\theta$ , la potencia de la prueba converge a 1 a medida que  $n \rightarrow \infty$ .
- Con cada valor de  $\alpha$  y de  $\phi$  la potencia de la prueba también converge a 1 a medida que  $n \rightarrow \infty$ .
- Las potencias más bajas se presentan a medida que  $\phi \rightarrow 1$ .

## 4. Comparación de la prueba $TMIN^*$ con la prueba de Dickey y Fuller Aumentada

Para probar la hipótesis nula de la existencia de una raíz unitaria en una serie de tiempo, contra la hipótesis alterna de que la serie es estacionaria, Dickey & Fuller (1979) proponen emplear el modelo general

$$\Delta Z_t = \beta_0 + \beta_1 t + \gamma Z_{t-1} + \sum_{j=1}^P \delta_j \Delta Z_{t-j} + a_t$$

donde  $\beta_0$ ,  $\beta_1$ ,  $\gamma$  y  $\delta_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, P$  son constantes y  $a_t$  es ruido blanco  $N(0, \sigma_a^2)$ . Para realizar la prueba los autores proponen probar la hipótesis  $H_0 : \gamma = 0$  (la serie tiene una raíz unitaria) contra  $H_1 : \gamma < 1$  (la serie es estacionaria) basándose en la estimación de mínimos cuadrados de la ecuación anterior. El estadístico de prueba es  $ADF = \hat{\gamma}/SE(\hat{\gamma})$ , donde  $\hat{\gamma}$  es el estimador del parámetro  $\gamma$  y  $SE(\hat{\gamma})$  es su error estándar. Dichos autores mostraron que la distribución nula asintótica del estadístico  $ADF$  no es la tradicional distribución  $t$  de Student (depende de procesos Weiner), y que debe ser derivada por simulación. Dickey y Fuller también mostraron que los valores críticos de la distribución dependen de la forma de la ecuación anterior, ya que pueden considerarse tres posibilidades: sin intercepto y sin tendencia ( $\beta_0 = 0$  y  $\beta_1 = 0$ ), con intercepto y sin tendencia ( $\beta_0 \neq 0$  y  $\beta_1 = 0$ ) y con intercepto y con tendencia ( $\beta_0 \neq 0$  y  $\beta_1 \neq 0$ ). A un nivel de significancia aproximado  $\alpha$ , se rechaza  $H_0$  si  $ADF < ADF(\alpha, n)$ , donde  $ADF(\alpha, n)$  es el valor crítico apropiado de la distribución asintótica de  $ADF$  bajo  $H_0$ .

A continuación se presenta una comparación del tamaño y potencia de la prueba asintótica  $TMIN^*$  con los correspondientes tamaños y potencias de la prueba de Dickey-Fuller Aumentada ( $ADF$ ). Las figuras que se muestran a continuación se basan en las tablas 19, 20, 21 y 22 del apéndice A<sup>1</sup>. Las figuras 1 y 2 presentan una comparación de la potencia de la prueba generalizada  $TMIN^*$  y de la prueba  $ADF$  con diferentes valores de  $\phi$  de un proceso  $AR(1)$ , diferentes valores de  $\theta$  de un proceso  $MA(1)$ , diferentes valores de  $n$ ,  $\alpha = 0.05$ , y  $K = 5$ . Se usaron 20000 simulaciones. Las figuras 3 y 4 comparan los tamaños de las pruebas.

Comparando las potencias se observa que en el caso de errores  $AR(1)$  y  $n = 25$  la prueba  $TMIN^*$  tiene en general mayor potencia que la prueba  $ADF$ , sobre todo cuando  $\phi \rightarrow 1$ . A medida que  $n$  crece y si  $-1 \leq \phi \leq 0$ , las potencias tienden a igualarse y convergen a 1. Sin embargo, con valores positivos y cerca de 1, la prueba  $TMIN^*$  tiene mayor potencia que la prueba  $ADF$ .

En el caso de errores  $MA(1)$  cuando  $-1 \leq \theta < 0$ , la potencia de  $TMIN^*$  es mayor que la  $ADF$  y la situación se invierte si  $0 \leq \theta < 1$ . En ambos casos las potencias tienden a 1 cuando  $n$  crece. Se observa que, en general, la prueba  $TMIN^*$  nunca obtiene potencias tan bajas como algunas de la prueba  $ADF$ .

<sup>1</sup>Para calcular la potencia y el tamaño de la prueba  $ADF$  cuando los errores son  $MA(1)$ , se seleccionó el máximo rezago autorregresivo utilizando  $k_{\text{máx}} = \lfloor 12(n/100)^{1/4} \rfloor$ . Se ajustaron todos los modelos autorregresivos hasta ese orden, en la prueba se utilizó el modelo que tuviera el menor criterio de información de Schwartz (1978).



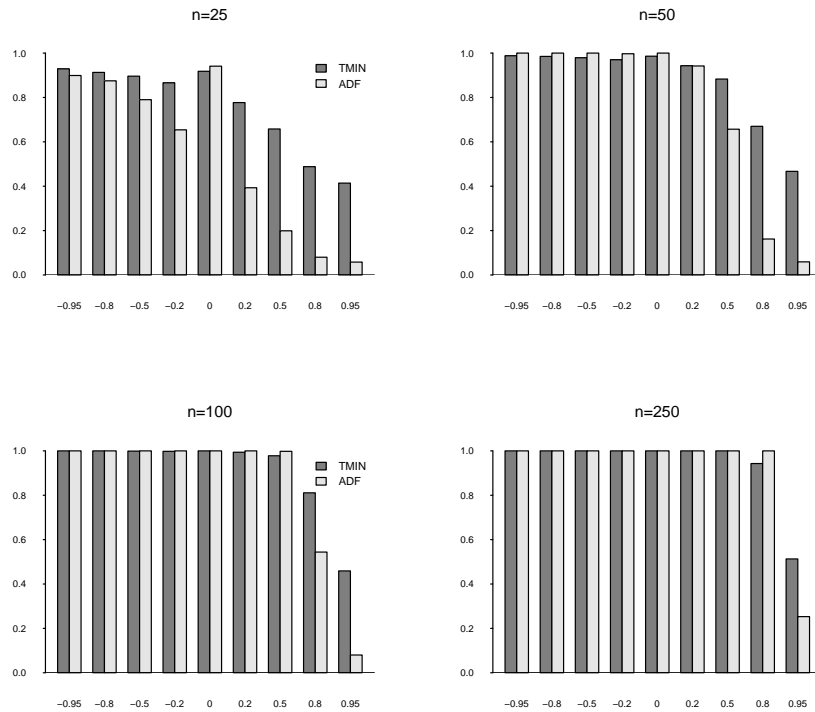


FIGURA 1: Comparación de potencias:  $TMIN^*$  vs.  $ADF$  para  $\alpha = 0.05$  y error  $AR(1)$ .

Se calculó una medida general del comportamiento de la desviación de la potencia de cada prueba con respecto a 1, definida como  $DesvP(PRUEBA) = \text{Promedio}[|Potencia(PRUEBA) - 1|]$  donde  $|x|$  indica el valor absoluto de  $x$  y  $PRUEBA = TMIN^*$  o  $PRUEBA = ADF$  según el caso. La tabla 16 presenta estos resultados.

TABLA 16: Desviaciones absolutas desde la potencia 1.

$n$	AR		MA	
	$DesvP(TMIN^*)$	$DesvP(ADF)$	$DesvP(TMIN^*)$	$DesvP(ADF)$
25	0.2380	0.4567	0.1806	0.1744
50	0.1255	0.2425	0.0658	0.0517
100	0.0845	0.1531	0.0199	0.0123
250	0.0605	0.0831	0.0030	0.0001

De la tabla 16 se observa que cuando el proceso es AR hay ventaja de la prueba  $TMIN^*$ , mientras que en el caso MA la situación es muy pareja con una ligera ventaja de la prueba  $ADF$ .

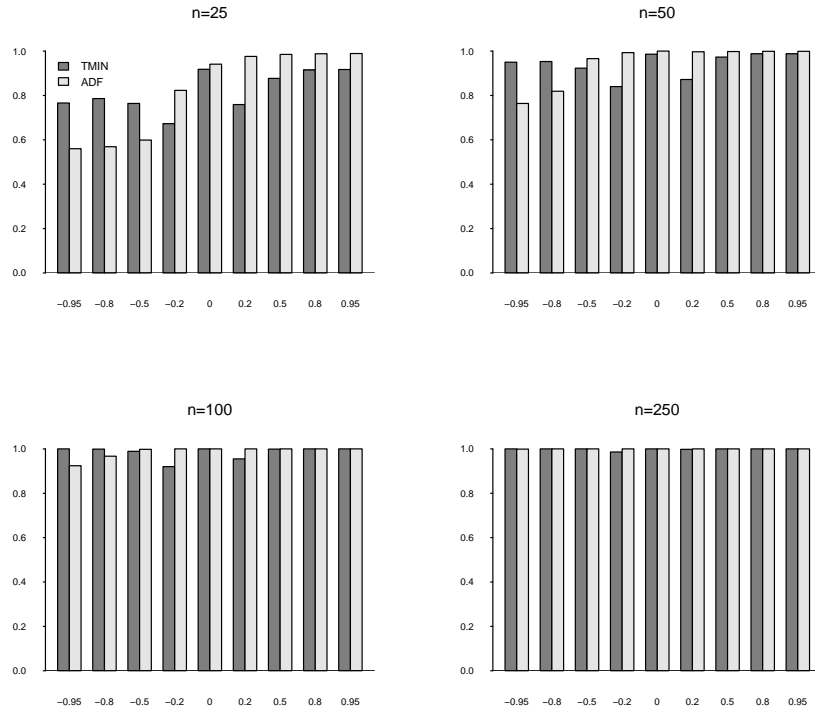
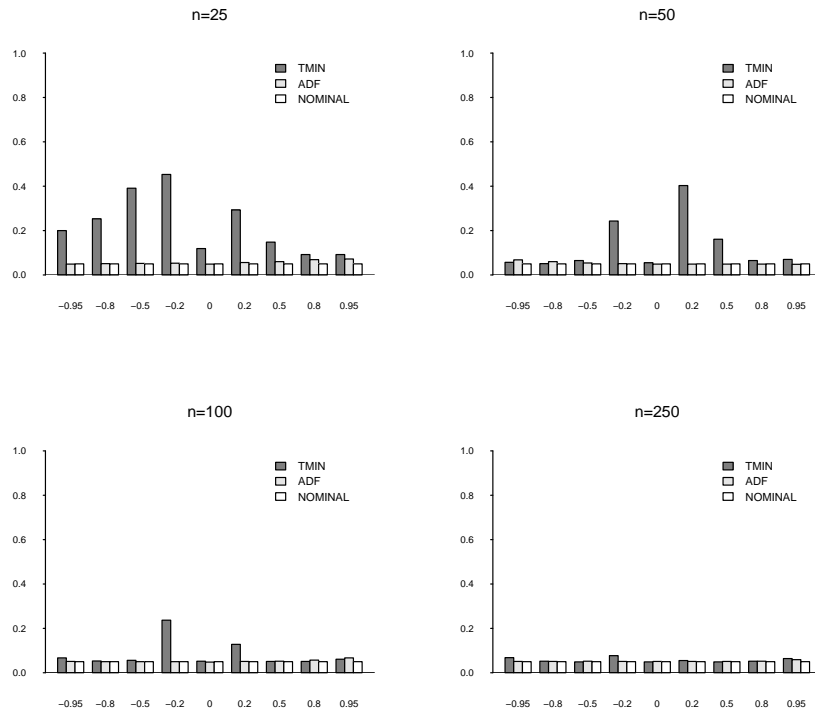


FIGURA 2: Comparación de potencias:  $TMIN^*$  vs.  $ADF$  para  $\alpha = 0.05$  y error  $MA(1)$ .

En cuanto a los tamaños de las pruebas, claramente la prueba  $ADF$  mantiene los tamaños nominales para el caso  $AR$ , mientras que para la prueba  $TMIN^*$  hay distorsiones importantes sobre todo si  $n \leq 50$  y  $\phi$  toma valores pequeños positivos o negativos. Cuando los errores son  $MA$ , los tamaños de las dos pruebas presentan distorsiones mayores a medida que  $\theta \rightarrow 1$ , siendo más severas para la prueba  $ADF$ . Con valores negativos de  $\theta$  la prueba  $TMIN^*$  presenta menores distorsiones que la prueba  $ADF$ . La medida de comportamiento de la desviación del tamaño de cada prueba con respecto a 0.05 está definida como  $DesvT(PRUEBA) = \text{Promedio}[|\text{Tamaño}(PRUEBA) - 0.05|]$ , donde  $PRUEBA = TMIN^*$  o  $PRUEBA = ADF$  según el caso. La tabla 17 presenta estos resultados.

## 5. Aplicación a datos reales

La figura 5 muestra la tasa anual de muertes por cáncer (por cada 100000 habitantes) en Pensilvania entre los años 1930 y 2000, publicada por el Departamento de Salud de Pensilvania. Los datos aparecen también en Wei (2006).

FIGURA 3: Comparación de tamaños:  $TMIN^*$  vs. ADF para  $\alpha = 0.05$  y error AR(1).TABLA 17: Desviaciones absolutas desde el tamaño  $\alpha = 0.05$ .

$n$	AR		MA	
	DesvT( $TMIN^*$ )	DesvT(ADF)	DesvT( $TMIN^*$ )	DesvT(ADF)
25	0.1767	0.0072	0.2681	0.3059
50	0.0801	0.0044	0.1586	0.2981
100	0.0339	0.0034	0.1048	0.2556
250	0.0078	0.0023	0.0628	0.2040

La figura anterior muestra una tendencia en la serie de incremento en su valor. Este incremento podría haber sido generado por un modelo de tendencia aleatoria con una deriva o por un modelo de tendencia determinística. Wei (2006), usando la prueba de Dickey y Fuller, concluye que la serie es consistente con un proceso de caminata aleatoria con deriva. Sin embargo, en la gráfica se observa que en el año 1978 la serie se desvía de su nivel anterior (hay un salto hacia arriba) y en los años 1988, 1989 y 2000 la serie cae<sup>2</sup>. Un análisis más detallado sugiere que el modelo propuesto por Wei tiene problemas en el ajuste, pues para rezagos mayores que 12

<sup>2</sup>Evidencia sobre la importancia de estas observaciones se confirmó al usar el procedimiento de Chen & Liu (1990), implementado en el paquete estadístico SCA.

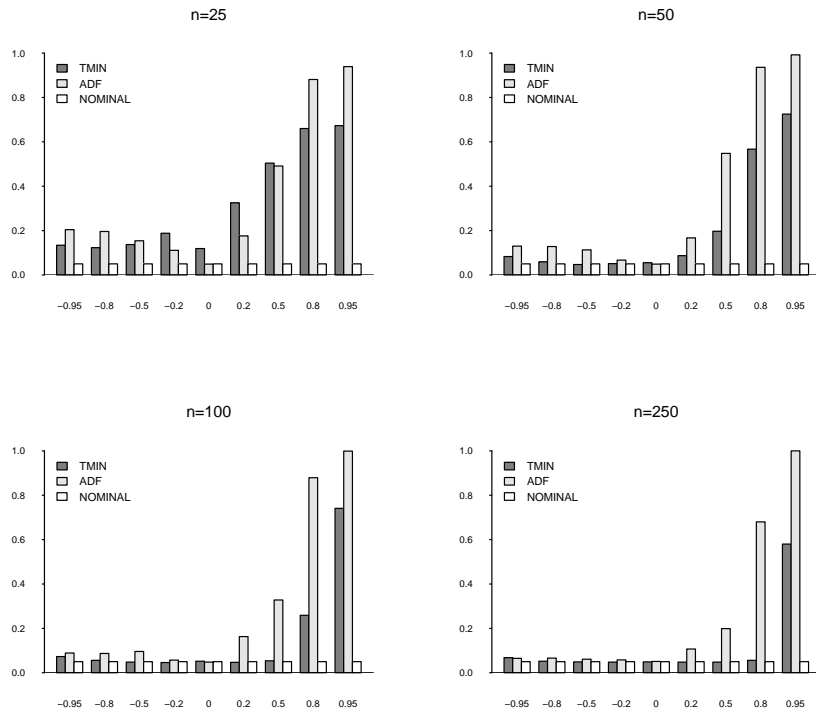


FIGURA 4: Comparación de tamaños:  $TMIN^*$  vs. ADF para  $\alpha = 0.05$  y error MA(1).

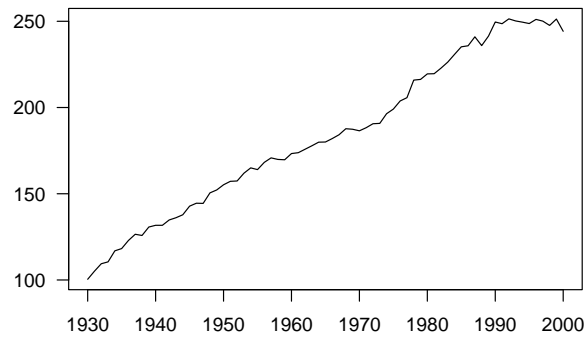


FIGURA 5: Tasa anual de muertes por cáncer en Pensilvania, 1930–2000.

y un nivel de significancia de 0.05, la prueba de Ljung y Box rechaza la hipótesis de que los residuales proceden de un proceso de ruido blanco. Este resultado puede deberse a la existencia de observaciones atípicas en los años mencionados, que no se tuvieron en cuenta en la especificación del modelo.

Para la realización de la prueba propuesta se debe iniciar con la especificación de los modelos bajo  $H_0$  en los cuales se debe tener en cuenta la posible influencia de las observaciones mencionadas, junto con la especificación adecuada de la componente ARMA desconocida. En este punto podría surgir una complicación puesto que, usando los datos, la identificación de la componente ARMA bajo  $H_0$  y bajo  $H_1$  podría conducir a modelos distintos para el ruido  $b_t$ . La solución a este problema es emplear los modelos identificados para la componente bajo cada una de las hipótesis. La diferencia de los modelos de los ruidos bajo las dos hipótesis no invalida resultados de la proposición 3 porque esta se refiere a la distribución asintótica del estadístico de prueba bajo la hipótesis nula. A continuación se ilustra este procedimiento con la serie descrita anteriormente.

### 5.1. Especificación del modelo bajo la hipótesis $H_0$

Debido a la existencia de observaciones sospechosas descritas antes (posibles cambios estructurales), el modelo bajo  $H_0$  es de la forma  $\Delta Z_t = \beta_0 + \delta_1 \Delta D49_t + \delta_2 \Delta D59_t + \delta_3 \Delta D60_t + \delta_4 \Delta D71_t + [\theta(B)/\phi(B)] a_t$ , donde las variables  $D49_t$ ,  $D59_t$ ,  $D60_t$  y  $D71_t$  son binarias con 1 en los años 1978, 1988, 1989 y 2000, respectivamente, y cero en los demás años. La identificación de la componente ARMA no se puede realizar directamente sobre la serie  $\Delta Z_t$  debido a la presencia de los cambios estructurales. La identificación puede realizarse usando dos alternativas. La primera es usar el periodo inicial de la serie donde no hay cambios de estructura, es decir usando las primeras 48 observaciones (antes de 1978). Para este periodo se identifica un proceso AR(3) restringido de la forma  $b_t = 1/(1 - \phi_3 B^3) a_t$ . La otra alternativa es usar el procedimiento sugerido por Castaño (1995) para la identificación de un modelo ARIMA contaminado con observaciones atípicas. El resultado de este procedimiento arroja de nuevo un modelo AR(3), de la forma obtenida anteriormente. Por consiguiente, una especificación del modelo bajo  $H_0$  es de la forma

$$\Delta Z_t = \beta_0 + \delta_1 \Delta D49_t + \delta_2 \Delta D59_t + \delta_3 \Delta D60_t + \delta_4 \Delta D71_t + [1/(1 - \phi_3 B^3)] a_t$$

### 5.2. Especificación del modelo bajo la hipótesis $H_1$

Bajo la hipótesis alterna, el modelo es de la forma  $Z_t = \beta_0 + \beta_1 t + \delta_1 \Delta D49_t + \delta_2 \Delta D59_t + \delta_3 \Delta D60_t + \delta_4 \Delta D71_t + [\theta(B)/\phi(B)] a_t$ .

Para la identificación de un modelo adecuado para la componente ARMA se siguió el mismo procedimiento sugerido para la identificación bajo  $H_0$ , teniendo en cuenta la introducción de la tendencia determinística. El modelo sugerido es un AR(4) restringido de la forma  $b_t = [1/(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \phi_3 B^3 - \phi_4 B^4)] a_t$ . Por lo tanto,

la especificación del modelo bajo  $H_1$  es de la forma

$$Z_t = \beta_0 + \beta_1 t + \delta_1 D49_t + \delta_2 D59_t + \delta_3 D60_t + \delta_4 D71_t \\ + [1/(1 - \phi_1 B - \phi_3 B^3 - \phi_4 B^4)] a_t$$

Para la prueba propuesta, las hipótesis que se deben contrastar son:

$$H_0 : \Delta Z_t = \beta_0 + \delta_1 \Delta D49_t + \delta_2 \Delta D59_t + \delta_3 \Delta D60_t + \delta_4 \Delta D71_t \\ + [1/(1 - \phi_3 B^3)] a_t$$

y

$$H_1 : Z_t = \beta_0 + \beta_1 t + \delta_1 D49_t + \delta_2 D59_t + \delta_3 D60_t + \delta_4 D71_t \\ + [1/(1 - \phi_1 B - \phi_3 B^3 - \phi_4 B^4)] a_t$$

Para el cálculo del estadístico  $TMIN^*$  se estiman los dos modelos<sup>3</sup>. Con un valor de  $K = 10$  se obtiene que  $TA^* = 3.8$  y  $TD^* = 5.5$  son los valores observados del estadístico de Ljung y Box para cada modelo. A un nivel de significancia aproximado de 0.05, como  $TMIN^* = \min\{TA^*, TD^*\} = TA^* = 3.8$  y  $TMIN^* \leq \chi^2(0.05, 9) = 16.919$ , no se rechaza  $H_0$ , es decir, la tendencia de la tasa anual de mortalidad por cáncer es aleatoria con deriva. La tabla 18 muestra que esta conclusión se mantiene para todos los valores de  $K = 2, \dots, 16$ .

TABLA 18: Cálculo de  $TA^*$  y  $TD^*$  para varios valores de  $K$ .

$K$	$TA^*$	$TD^*$	$K$	$TA^*$	$TD^*$
1	0.7	1.5	9	3.1	4.5
2	0.8	1.5	10	3.8	5.5
3	0.9	1.5	11	4.3	5.8
4	1.8	3.1	12	7.4	9.1
5	2.1	3.5	13	11.6	13.8
6	2.3	3.6	14	11.6	13.8
7	2.7	3.9	15	15.3	17.7
8	2.8	4.0	16	13.7	17.8

Los resultados de la tabla 18 muestran que las conclusiones no se modifican variando  $K$  puesto que  $TA^*$  sigue siendo el mínimo y es menor que el percentil  $\chi^2(0.05, K - 1)$  para  $K = 2, \dots, 20$ .

El uso adecuado de la prueba propuesta exige al analista la formulación adecuada de los modelos que se van a comparar. Esta es una diferencia con otras pruebas cuya utilización, para usuarios inexpertos, se convierte generalmente en una “caja negra”, en las cuales las componentes exógenas, tales como cambios estructurales, no son tenidas en cuenta.

## 6. Conclusiones

Se presenta un procedimiento que permite el contraste de hipótesis específicas sobre el comportamiento de la tendencia frecuentemente encontrado en series de

<sup>3</sup>Los resultados de las estimaciones se encuentran en el Apéndice B.

tiempo. Este procedimiento tiene ventajas, en términos de su potencia y tamaño, frente a la tradicional prueba de Dicker y Fuller.

Cuando el término de error es ruido blanco gaussiano, la prueba  $TMIN^*$  posee una alta potencia y no presenta grandes distorsiones del tamaño de la prueba, aun en tamaños muestrales pequeños.

Cuando el término de error es un proceso gaussiano autocorrelacionado, en los casos analizados la prueba asintótica presenta buena potencia. Se observa que la potencia decrece cuando la raíz del polinomio autorregresivo se acerca a uno. Aunque este es un fenómeno que ocurre en todas las pruebas de raíces unitarias, la prueba propuesta tiene un mejor comportamiento que la prueba de Dickey y Fuller Aumentada. En general, a medida que  $n$  crece, la potencia de la prueba tiende a 1.

En cuanto al tamaño de la prueba asintótica, cuando los errores son AR(1) y el valor  $\phi$  es pequeño, positivo o negativo, existen distorsiones importantes cuando  $n \leq 50$ . Si los errores son MA(1), con valores positivos del parámetro  $\theta$ , las distorsiones se hacen cada vez mayores a medida que  $\theta$  tiende a 1. Sin embargo, en ambas situaciones se tiene que el tamaño de la prueba converge a su valor nominal a medida que el tamaño muestral aumenta.

De la comparación de la prueba asintótica  $TMIN^*$  con la prueba de Dickey y Fuller Aumentada se concluye que la primera tiene, en general, mayor potencia, sobre todo cuando  $\phi \rightarrow 1$ . En cuanto al tamaño de la prueba, los resultados muestran que la prueba  $TMIN^*$  nunca alcanza distorsiones tan severas como la prueba ADF.

Finalmente, el uso adecuado de la prueba propuesta exige al analista la formulación adecuada de los modelos que se confrontan. Esto podría interpretarse como una desventaja, pero en realidad forma parte de la metodología de análisis en cualquier uso de la estadística.

[Recibido: septiembre de 2008 — Aceptado: noviembre de 2009]

## Referencias

- Arellano, C. & Pantula, S. G. (1995), 'Testing for Trend Stationarity versus Difference Stationarity', *Journal of Time Series Analysis* **16**, 147–164.
- Box, G. E. P. & Pierce, D. A. (1970), 'Distribution of the residual autocorrelations in autoregressive-integrated moving average time series models', *Journal of the American Statistical Association* **65**, 1509–1526.
- Castaño, E. (1995), 'Identificación de un modelo ARIMA contaminado', *Lecturas de Economía* **42**, 49–70.
- Chen, C. & Liu, M. L. (1990), Joint estimation of model parameters and outlier effects in time series, Working papers series, scientific computing associates, P.O. Box 625, DeKalb, Illinois 60115.

- Choi, I. (1992), 'Durbin-Hausman Tests for a Unit Roots', *Oxford Bulletin of Economics and Statistics* **54**, 289–304.
- Choi, I. & Yu, B. C. (1997), 'A General Framework for testing  $I(m)$  contra  $I(m+k)$ ', *Journal of Economic Theory and Econometrics* **3**, 103–138.
- Cleveland, W. S. (1993), *Visualizing Data*, Hobart Press, Michigan, United States.
- Cleveland, W. S. (1994), *The Elements of Graphing Data*, Hobart Press, Michigan, United States.
- Cochrane, J. H. (1988), 'How Big is the Random Walk in GNP?', *Journal of Political Economy* **96**, 893–920.
- Cochrane, J. H. (1991), 'A Critique of the Application of Unit Root Tests', *Journal of Economics Dynamics and Control* **15**, 275–284.
- DeJong, D. N., Nankervis, J. C., Savin, N. E. & Whiteman, C. H. (1992a), 'Integration Versus Trend Stationarity in Time Series', *Econometrica* **60**, 423–433.
- DeJong, D. N., Nankervis, J. C., Savin, N. E. & Whiteman, C. H. (1992b), 'The Powers Problems of the Unit Root Tests in Time Series with Autoregressive Errors', *Journal of Econometrics* **53**, 323–343.
- Dickey, D. A. & Fuller, W. A. (1979), 'Distribution of the Estimators for Autoregressive Time Series with a Unit Root', *Journal of the American Statistical Association* **76**, 427–431.
- Elliot, G., Rothenber, T. J. & Stock, J. H. (1996), 'Efficient Tests for an Autoregressive Unit Root', *Econometrica* **64**, 813–836.
- Flores de Frutos, R. & Jerez, M. (2002), Testing for Invertibility in Univariate ARIMA Process, Technical report, Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales, Departamento de Economía Cuantitativa, Universidad Complutense de Madrid.
- Fuller, W. A. (1976), *Introduction to Statistical Time Series*, Wiley-Interscience, New York, United States.
- Hall, A. (1989), 'Testing for a Unit Root in the Presence of Moving Average Error', *Biometrika* **76**, 49–56.
- Harvey, A. (1989), *Forecasting, Structural Time Series Models and the Kalman Filter*, Cambridge University Press, Cambridge, England.
- Harvey, A. (2000), Trend Analysis, Mimeo, Faculty of Economics and Politics, University of Cambridge.
- Jones, R. H. (1993), *Longitudinal Data with Serial Correlation: A State Space Approach*, Chapman and Hall, London, England.
- Kitagawa, G. & Gersch, W. (1996), *Smoothness Priors Analysis of Time Series*, Springer-Verlag, Berlín, Alemania.



- Ljung, G. M. (1986), 'Diagnostic Testing of Univariate Time Series Models', *Biometrika* **73**, 725–730.
- Ljung, G. M. & Box, G. E. P. (1978), 'On a Measure of Lack of Fit in Time Series Models', *Biometrika* **65**, 297–303.
- Nelson, C. R. & Plosser, C. I. (1982), 'Trends and random walks in macroeconomic time series', *Journal of Monetary Economics* **10**, 139–162.
- Ng, S. & Perron, P. (1996), 'Unit Roots Tests in ARMA Models with Data-Dependent Methods for the Selection of Truncation Lag', *Journal of the American Statistical Association* **90**, 268–281.
- Pankratz, A. (1983), *Forecasting with Univariate Box-Jenkins Models*, Wiley-Interscience, New York, United States.
- Phillips, P. & Perron, P. (1988), 'Testing for a Unit Root in Time Series Regression', *Biometrika* **75**, 335–346.
- Saikkonen, P. & Luukkonen, R. (1993), 'Testing for a moving average unit root in autoregressive integrated moving average models', *Journal of the American Statistical Association* **88**, 596–601.
- Sargan, J. D. & Bhargava, A. (1983), 'Maximum Likelihood Estimation of Regression Models with First Order Moving Average Errors When the Roots Lies on the Unit Circle', *Econometrica* **51**, 799–820.
- SCA-Corp. (2001), *The SCA Statistical System, versión VI.3a*, SCA Corp., Dekalb, Illinois.
- Schwartz, G. (1978), 'Estimating the Dimension of a Model', *The Annals of Statistics* **6**, 461–464.
- Schwert, G. W. (1989), 'Tests for Unit Roots: A Monte Carlo Investigation', *Journal of Business and Economic Statistics* **7**, 147–159.
- Shephard, N. (1993), 'Distribution of the ML Estimator of an MA(1) Model and a Local Level Model', *Econometric Theory* **9**, 377–401.
- Shephard, N. & Harvey, A. (1990), 'On the Probability of Estimating a Deterministic Component in the local Level Model', *Journal of Time Series Analysis* **11**, 339–347.
- Tanaka, K. (1990), 'Testing for a Moving Average Unit Root', *Econometric Theory* **6**, 433–444.
- Tsay, R. S. (1993), 'Testing for Noninvertible Models with Applications', *Journal of Business and Economic Statistics* **11**, 225–233.
- Wei, W. (2006), *Time Series Analysis Univariate and Multivariate Methods*, Pearson Addison Wesley, Boston, United States.

West, M. & Harrison, J. (1989), *Bayesian Forecasting and Dynamic Models*, Springer-Verlag, New York, United States.

Young, P. (1984), *Recursive Estimation and Time-Series Analysis*, Springer-Verlag, Berlín, Alemania.

## Apéndice A.

TABLA 19: Potencia de  $TMIN^*$  para errores AR(1).

$n = 25$	$TMIN^*$			$ADF$		
$\phi$	0.05	0.025	0.01	0.05	0.025	0.01
-0.95	0.929	0.925	0.923	0.899	0.805	0.653
-0.80	0.913	0.909	0.908	0.875	0.771	0.604
-0.50	0.896	0.893	0.891	0.790	0.654	0.470
-0.20	0.866	0.862	0.859	0.654	0.497	0.318
0.00	0.918	0.915	0.913	0.941	0.871	0.742
0.20	0.777	0.770	0.766	0.393	0.254	0.137
0.50	0.658	0.649	0.645	0.199	0.112	0.053
0.80	0.488	0.479	0.475	0.080	0.041	0.017
0.95	0.414	0.405	0.401	0.058	0.029	0.013
$n = 50$	$TMIN^*$			$ADF$		
$\phi$	0.05	0.025	0.01	0.05	0.025	0.01
-0.95	0.988	0.987	0.985	1.000	1.000	1.000
-0.80	0.985	0.983	0.982	1.000	1.000	0.999
-0.50	0.979	0.977	0.976	1.000	0.999	0.994
-0.20	0.970	0.968	0.968	0.997	0.990	0.962
0.00	0.986	0.984	0.983	1.000	1.000	1.000
0.20	0.943	0.939	0.937	0.942	0.869	0.728
0.50	0.883	0.877	0.873	0.657	0.490	0.312
0.80	0.670	0.663	0.660	0.162	0.088	0.040
0.95	0.467	0.460	0.457	0.059	0.030	0.012
$n = 100$	$TMIN^*$			$ADF$		
$\phi$	0.05	0.025	0.01	0.05	0.025	0.01
-0.95	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
-0.80	1.000	1.000	0.999	1.000	1.000	1.000
-0.50	0.999	0.999	0.998	1.000	1.000	1.000
-0.20	0.998	0.997	0.997	1.000	1.000	1.000
0.00	1.000	1.000	0.999	1.000	1.000	1.000
0.20	0.994	0.993	0.992	1.000	1.000	1.000
0.50	0.978	0.975	0.974	0.998	0.991	0.964
0.80	0.811	0.806	0.803	0.544	0.372	0.216
0.95	0.459	0.452	0.449	0.080	0.041	0.018
$n = 250$	$TMIN^*$			$ADF$		
$\phi$	0.05	0.025	0.01	0.05	0.025	0.01
-0.95	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
-0.80	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
-0.50	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
-0.20	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
0.00	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
0.20	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
0.50	1.000	0.999	0.999	1.000	1.000	1.000
0.80	0.943	0.940	0.939	1.000	0.998	0.987
0.95	0.513	0.506	0.502	0.253	0.147	0.069

TABLA 20: Potencia de  $TMIN^*$  para errores MA(1).

$n = 25$	$TMIN^*$			$ADF$		
$\theta$	0.05	0.025	0.01	0.05	0.025	0.01
-0.95	0.766	0.754	0.746	0.560	0.440	0.300
-0.80	0.786	0.777	0.771	0.569	0.444	0.300
-0.50	0.764	0.757	0.754	0.599	0.456	0.292
-0.20	0.673	0.665	0.662	0.823	0.696	0.511
0.00	0.918	0.915	0.913	0.941	0.871	0.742
0.20	0.759	0.752	0.750	0.976	0.962	0.926
0.50	0.877	0.872	0.870	0.985	0.981	0.971
0.80	0.915	0.909	0.906	0.988	0.983	0.971
0.95	0.917	0.911	0.907	0.989	0.984	0.970
$n = 50$	$TMIN^*$			$ADF$		
$\theta$	0.05	0.025	0.01	0.05	0.025	0.01
-0.95	0.950	0.943	0.938	0.764	0.703	0.621
-0.80	0.953	0.948	0.945	0.819	0.763	0.684
-0.50	0.923	0.918	0.915	0.966	0.940	0.869
-0.20	0.840	0.769	0.766	0.993	0.991	0.986
0.00	0.986	0.984	0.983	1.000	1.000	1.000
0.20	0.872	0.866	0.864	0.997	0.995	0.993
0.50	0.973	0.970	0.968	0.998	0.997	0.997
0.80	0.988	0.986	0.984	0.999	0.999	0.999
0.95	0.988	0.985	0.983	0.999	0.999	0.999
$n = 100$	$TMIN^*$			$ADF$		
$\theta$	0.05	0.025	0.01	0.05	0.025	0.01
-0.95	1.000	0.999	0.997	0.924	0.873	0.803
-0.80	0.999	0.998	0.996	0.967	0.937	0.885
-0.50	0.989	0.987	0.986	0.998	0.996	0.990
-0.20	0.920	0.875	0.873	1.000	1.000	0.999
0.00	1.000	1.000	0.999	1.000	1.000	1.000
0.20	0.955	0.951	0.949	1.000	1.000	1.000
0.50	0.999	0.998	0.997	1.000	1.000	1.000
0.80	1.000	1.000	0.999	1.000	1.000	1.000
0.95	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
$n = 250$	$TMIN^*$			$ADF$		
$\theta$	0.05	0.025	0.01	0.05	0.025	0.01
-0.95	1.000	1.000	1.000	0.999	0.996	0.990
-0.80	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999
-0.50	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
-0.20	0.986	0.974	0.973	1.000	1.000	1.000
0.00	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
0.20	0.998	0.997	0.997	1.000	1.000	1.000
0.50	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
0.80	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
0.95	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

TABLA 21: Tamaño de  $TMIN^*$  para errores AR(1).

$n = 25$	$TMIN^*$			$ADF$		
$\phi$	0.05	0.025	0.01	0.05	0.025	0.01
-0.95	0.200	0.185	0.176	0.049	0.025	0.010
-0.80	0.253	0.244	0.239	0.051	0.026	0.011
-0.50	0.391	0.385	0.382	0.052	0.027	0.011
-0.20	0.453	0.446	0.443	0.053	0.028	0.012
0.00	0.119	0.102	0.093	0.049	0.026	0.012
0.20	0.293	0.282	0.276	0.056	0.029	0.013
0.50	0.148	0.130	0.120	0.060	0.032	0.014
0.80	0.092	0.070	0.057	0.069	0.037	0.017
0.95	0.092	0.068	0.053	0.072	0.039	0.018
$n = 50$	$TMIN^*$			$ADF$		
$\phi$	0.05	0.025	0.01	0.05	0.025	0.01
-0.95	0.057	0.031	0.014	0.068	0.036	0.016
-0.80	0.051	0.028	0.013	0.060	0.031	0.013
-0.50	0.065	0.043	0.031	0.054	0.026	0.011
-0.20	0.243	0.229	0.223	0.051	0.026	0.011
0.00	0.055	0.030	0.015	0.049	0.024	0.010
0.20	0.403	0.396	0.392	0.049	0.025	0.010
0.50	0.161	0.146	0.139	0.049	0.024	0.010
0.80	0.065	0.042	0.029	0.049	0.023	0.009
0.95	0.070	0.038	0.021	0.048	0.023	0.010
$n = 100$	$TMIN^*$			$ADF$		
$\phi$	0.05	0.025	0.01	0.05	0.025	0.01
-0.95	0.067	0.034	0.015	0.051	0.025	0.010
-0.80	0.053	0.027	0.011	0.050	0.025	0.011
-0.50	0.056	0.031	0.018	0.050	0.025	0.011
-0.20	0.237	0.223	0.216	0.050	0.025	0.011
0.00	0.052	0.028	0.012	0.048	0.022	0.010
0.20	0.128	0.109	0.098	0.051	0.025	0.011
0.50	0.051	0.025	0.010	0.052	0.026	0.011
0.80	0.051	0.026	0.011	0.057	0.029	0.013
0.95	0.061	0.031	0.013	0.067	0.036	0.016
$n = 250$	$TMIN^*$			$ADF$		
$\phi$	0.05	0.025	0.01	0.05	0.025	0.01
-0.95	0.068	0.034	0.015	0.051	0.025	0.010
-0.80	0.052	0.026	0.011	0.051	0.025	0.010
-0.50	0.049	0.025	0.011	0.052	0.025	0.010
-0.20	0.077	0.055	0.043	0.051	0.025	0.010
0.00	0.049	0.023	0.010	0.051	0.025	0.009
0.20	0.055	0.030	0.017	0.051	0.025	0.010
0.50	0.049	0.025	0.011	0.051	0.025	0.011
0.80	0.052	0.026	0.011	0.052	0.027	0.011
0.95	0.064	0.034	0.014	0.059	0.031	0.013

TABLA 22: Tamaño de  $TMIN^*$  para errores MA(1).

$n = 25$	$TMIN^*$			$ADF$		
$\theta$	0.05	0.025	0.01	0.05	0.025	0.01
-0.95	0.134	0.103	0.084	0.204	0.134	0.074
-0.80	0.123	0.100	0.088	0.196	0.129	0.070
-0.50	0.137	0.123	0.117	0.154	0.097	0.051
-0.20	0.188	0.179	0.175	0.111	0.071	0.037
0.00	0.119	0.102	0.093	0.049	0.026	0.012
0.20	0.325	0.318	0.315	0.176	0.113	0.060
0.50	0.504	0.498	0.496	0.491	0.370	0.241
0.80	0.660	0.654	0.651	0.881	0.800	0.660
0.95	0.673	0.666	0.662	0.939	0.882	0.768
$n = 50$	$TMIN^*$			$ADF$		
$\theta$	0.05	0.025	0.01	0.05	0.025	0.01
-0.95	0.083	0.046	0.022	0.130	0.082	0.045
-0.80	0.059	0.032	0.014	0.128	0.080	0.044
-0.50	0.047	0.025	0.012	0.113	0.067	0.034
-0.20	0.051	0.031	0.021	0.067	0.038	0.019
0.00	0.055	0.030	0.015	0.049	0.024	0.010
0.20	0.087	0.071	0.062	0.167	0.102	0.056
0.50	0.197	0.184	0.178	0.548	0.472	0.378
0.80	0.567	0.561	0.557	0.936	0.928	0.920
0.95	0.725	0.718	0.714	0.992	0.989	0.986
$n = 100$	$TMIN^*$			$ADF$		
$\theta$	0.05	0.025	0.01	0.05	0.025	0.01
-0.95	0.073	0.039	0.018	0.089	0.051	0.026
-0.80	0.056	0.028	0.012	0.087	0.049	0.025
-0.50	0.048	0.023	0.010	0.096	0.054	0.028
-0.20	0.046	0.023	0.009	0.057	0.030	0.014
0.00	0.052	0.028	0.012	0.048	0.022	0.010
0.20	0.047	0.022	0.009	0.163	0.105	0.060
0.50	0.054	0.030	0.018	0.328	0.267	0.217
0.80	0.259	0.243	0.234	0.879	0.855	0.828
0.95	0.741	0.733	0.728	0.999	0.999	0.998
$n = 250$	$TMIN^*$			$ADF$		
$\theta$	0.05	0.025	0.01	0.05	0.025	0.01
-0.95	0.068	0.035	0.016	0.065	0.036	0.016
-0.80	0.052	0.027	0.012	0.066	0.035	0.016
-0.50	0.049	0.024	0.010	0.061	0.034	0.016
-0.20	0.048	0.024	0.010	0.058	0.031	0.014
0.00	0.049	0.023	0.010	0.051	0.025	0.009
0.20	0.048	0.023	0.010	0.107	0.068	0.037
0.50	0.048	0.024	0.010	0.199	0.139	0.089
0.80	0.056	0.031	0.016	0.680	0.616	0.548
0.95	0.580	0.569	0.563	1.000	0.999	0.999

## Apéndice B.

A continuación se presentan las estimaciones de máxima verosimilitud bajo normalidad de los modelos empleados en el ejemplo de la sección 5. Los valores entre paréntesis corresponden a los valores  $p$  de las pruebas.

TABLA 23: Modelo con componente AR(3) bajo  $H_0$ .

Parámetro	Variable	Valor	STD	$T$
$\beta_0$	UNOS	2.0349	0.3885	5.2
$\delta_1$	OUT49	5.7570	1.2846	4.4
$\delta_2$	OUT59	-7.9147	1.4851	-5.3
$\delta_3$	OUT60	-5.1757	1.4926	-3.4
$\delta_4$	OUT71	-7.9311	1.9950	-3.9
$\phi_3$	Z	0.3966	0.1202	3.3

No se detectaron observaciones atípicas

Número total de observaciones: 71

Número efectivo de observaciones: 67

Estadístico  $F$ : 13.141(0)

Error estándar de la regresión: 2.034

Criterio de Schwartz: 4.541

Jarque-Bera (normalidad): 2.497(0.287)

TABLA 24: Modelo con componente AR(4) bajo  $H_1$ .

Parámetro	Variable	Valor	STD	$T$
$\beta_0$	UNOS	107.339	4.4040	24.3
$\beta_1$	TIEMPO	2.1321	0.1021	20.8
$\delta_1$	OUT49	5.7020	1.2510	4.5
$\delta_2$	OUT59	-7.8985	1.4478	-5.4
$\delta_3$	OUT60	-5.1837	1.4493	-3.5
$\delta_4$	OUT71	-8.3119	1.9571	-4.2
$\phi_1$	Z	0.9448	0.0832	11.3
$\phi_3$	Z	0.3656	0.1412	2.5
$\phi_4$	Z	-0.4387	0.1172	-3.7

No se detectaron observaciones atípicas

Número total de observaciones: 71

Número efectivo de observaciones: 67

Estadístico  $F$ : 3732.543(0)

Error estándar de la regresión: 1.983

Criterio de Schwartz: 4.628

Jarque-Bera (normalidad): 3.458(0.177)