Séminaires & Congrès
5, 2001, p. 119–131

DESCENTE, CHAMPS ET GERBES DE HURWITZ

par

Jean-Claude Douai

Résumé. — Nous montrons comment les notions de gerbe et de champ introduites par A. Grothendieck interviennent naturellement dans la théorie des revêtements. À un G-revêtement $\overline{f}$ de corps des modules K est associée une K-gerbe $\mathcal{G}(\overline{f})$ liée par le centre $Z(G)$ de G qui est, en fait, la gerbe résiduelle en le point Spec$K$ d'un champ algébrique plus général défini sur $Z[\frac{1}{|G|}]$. Nous montrons ensuite comment l'utilisation des approximations diophantiennes dans les gerbes et les champs conduit à des résultats du type Principe de Hasse.

***Abstract* (Descent, Stacks and Hurwitz Gerbs).** — We show that the notions of gerb and stack intoduced by Grothendieck occur naturally in the theory of coverings. To a G-covering $\overline{f}$ of the field of moduli K is associated a K-gerb $\mathcal{G}(\overline{f})$ bound by the center $Z(G)$ of G. This gerb is, in fact, the residual gerb in the point Spec$K$ of a more general algebraic stack defined over $Z[\frac{1}{|G|}]$. We can use the diophantine approximations in the gerbs and stacks to get result of the type Hasse Principle.

1. La philosophie de Grothendieck [Gr]

Comme nous voulons étudier des problèmes de modules de courbes et plus particulièrement de modules de G-revêtements (courbes avec action d'un groupe fini G), nous aurons besoin de la notion de « champ » introduite par Grothendieck, notion plus riche que celle d'espace de modules et, en particulier, que celle d'espace de modules grossiers.

Commençons par rappeler la définition d'une catégorie fibrée en groupoïdes sur une catégorie B.

Définition 1. — *Soit B une catégorie. Une* catégorie fibrée *en groupoïdes sur B est formée*

1) *pour tout $U \in \mathrm{ob}(B)$, d'un groupoïde $\mathcal{G}_U$ (appelé fibre de U),*

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 18G50, 14E20, 14Dxx, 14D22.
Mots clefs. — Champs, gerbes, revêtement, descente, modules grossiers, modules fins.

2) *pour tout* $f : V \to U$ *morphisme de* B*, d'un foncteur*

$$f^* : \mathcal{G}_U \longrightarrow \mathcal{G}_V\,, \qquad f^*(x) = x \times_U V$$

3) *pour 2 morphismes composables* $W \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} U$ *dans* B*, d'un isomorphisme de foncteurs*

$$c_{f,g} : (gf)^* \longrightarrow f^*g^*$$

satisfaisant aux conditions suivantes :

(i) $\mathrm{id}^* = \mathrm{id}$,

(ii) $c_{f,g}$ *est l'isomorphisme identique si* f *ou* g *est un isomorphisme identique,*

(iii) *étant donné trois morphismes composables* $U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} W \xrightarrow{h} Z$ *on a commutativité du diagramme d'isomorphismes*

$$\begin{array}{ccc}
\Big(h(gf)\Big)^* = \Big((hg)\cdot f\Big)^* & \longrightarrow & f^*(hg)^* \\
\downarrow & & \downarrow \\
(gf)^*h^* & \longrightarrow & (f^*g^*)h^* = f^*(g^*h^*)
\end{array}$$

Exemple. — Soit B la catégorie des schémas, $S \in \mathrm{ob}(B)$, $\mathcal{G}_S$ = groupoïde des courbes stables de genre g sur S, les morphismes de $\mathcal{G}_S$ étant les isomorphismes entre courbes stables sur S. $\mathcal{G}$ est une catégorie fibrée en groupoïdes sur la catégorie des schémas.

Nous supposerons à partir de maintenant B munie d'une topologie de Grothendieck.

Descente effective : l'exemple de base topologique. — Considérons une catégorie fibrée en groupoïdes $\mathcal{G}$ sur le site des ouverts d'un espace topologique. Soient U un objet de ce site, (U_i) un recouvrement de U. Nous avons la résolution de Čech correspondante :

$$\coprod_{i,j,k} U_{ijk} \mathrel{\substack{\to\\ \to\\ \to}} \coprod_{i,j} U_{ij} \rightrightarrows \coprod_i U_i \to U$$

où $U_{ij} = U_i \cap U_j$, $U_{ijk} = U_i \cap U_j \cap U_k$.

Au-dessus de chaque U_i, donnons-nous un objet $x_i \in \mathrm{ob}(\mathcal{G}_{U_i})$. Une condition *nécessaire* pour qu'il existe $x \in \mathrm{ob}(\mathcal{G}_U)$ tel que $x|_{U_i} \simeq x$ dans $\mathcal{G}_{U_i}$ *i.e.* pour que les x_i se recollent en x est qu'il existe une famille d'isomorphismes

$$(*) \qquad f_{ij} : (x_i|U_{ij}) \simeq (x_j|U_{ij}) \quad \text{dans} \quad \mathcal{G}_{U_{ij}}$$

satisfaisant à la condition de 1-cocycle :

$$(**) \qquad (f_{ij}|U_{ijk}) = (f_{ik}|U_{ijk}) \circ (f_{kj}|U_{ijk})$$

La donnée d'une famille d'isomorphismes

$$f_{ij} : (x_i|U_{ij}) \simeq (x_j|U_{ij})$$

comme en $(*)$ est appelée une donnée de recollement. Une donnée de recollement est appelée une donnée de descente si la condition $(**)$ de cocycle est satisfaite.

Une donnée de descente est dite *effective* s'il existe effectivement un $x \in \mathrm{ob}(\mathcal{G}_U)$ tel que $(x|U_i) \simeq x_i$. Il revient alors au même de se donner un objet x de $\mathcal{G}_U$ ou une famille d'objets x_i dans $\mathcal{G}_{U_i}$ munie d'une donnée de descente effective.

Dans ce qui suit, B sera un site de base quelconque et pourra, par exemple, être la catégorie des schémas sur un schéma donné S munie de la topologie étale (ou f.p.q.c). Supposons que les produits fibrés existent dans B. Noter que dans le site B, les morphismes ne sont plus nécessairement des monomorphismes comme dans le site précédent des ouverts d'un espace topologique, les intersections étant, quant à elles, remplacées par les produits fibrés.

Définition 2. — *Un* champ $\mathcal{C}$ *sur* B *est une catégorie fibrée en groupoïdes sur* B *telle que*

(i) *Pour un objet* U *de* B *et deux objets* x, y *de* $\mathcal{C}_U$, *le foncteur de* B/U *vers les ensembles*

$$\begin{array}{rl}\mathrm{Isom}(x,y) : (V \xrightarrow{\varphi} U) \rightsquigarrow & \mathrm{Hom}(x|_V, y|_V) \\ & \quad \| \\ & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_V}(\varphi^* x, \varphi^* y)\end{array}$$

est un faisceau.

(ii) *Si* $\varphi_i : U_i \to U$ *est une famille couvrante dans* B, *toute donnée de descente relativement aux* φ_i *sur des objets* x_i *de* $\mathcal{C}_{U_i}$ *est* effective.

La condition (i) dans la définition de champ signifie que les morphismes dans $\mathcal{C}$ se recollent.

La condition (ii), quant à elle, signifie que les objets dans $\mathcal{C}$ se recollent. Ce dernier point s'explicite comme suit (*cf.* l'exemple de base topologique) :

Soient $x_i \in \mathrm{ob}(\mathcal{C}_{U_i})$, $f_{ij} : (x_i|U_{ij}) \simeq (x_j|U_{ij})$ une famille d'isomorphismes (*i.e.* une donnée de recollement) dans $\mathcal{C}_{U_{ij}}$ satisfaisant la condition de 1-cocycles

$$(f_{ij}|U_{ijk}) = (f_{ik}|U_{ijk}) \circ (f_{kj}|U_{ijk}),$$

où $U_{ij} = U_i \times_U U_j$, $U_{ijk} = U_i \times_U U_j \times_U U_k$.

Comme dans l'exemple de base topologique, dire que la donnée de descente (x_i, f_{ij}) est *effective* signifie qu'il existe $x \in \mathrm{ob}(\mathcal{C}_U)$ et des isomorphismes $f_i : (x|U_i) \simeq x_i$ dans $\mathcal{C}_{U_i}$ tels que $(f_i|U_{ij}) = f_{ij} \circ (f_j|U_{ij})$.

La condition (i) assure alors que l'objet x muni de la famille (f_i) est unique à isomorphisme canonique près. Grothendieck a énoncé une série de cas dans lesquels toute donnée de descente dans une catégorie fibrée en groupoïdes est effective. Citons deux cas :

1) Soit B la catégorie des schémas munis de la topologie f.p.q.c. Si $\mathcal{C}$ est la catégorie fibrée en groupoïdes des schémas affines au-dessus de B, alors toute donnée de descente sur $\mathcal{C}$ est effective. En particulier, si G est un groupe affine, tout fibré principal homogène sous G est aussi affine. On pourra donc « effectivement » recoller de tels fibrés.

2) Supposons le recouvrement $U_i \to U$ réduit à un unique morphisme $\alpha : V \to U$ (supposé f.p.q.c.). Pour qu'une donnée de descente sur un schéma x'/V relativement à α soit effective, il faut et il suffit que x' soit réunion d'ouverts x'_i affines sur V qui soient stables par la donnée de descente sur x'. Il en est ainsi (critère de Weil) si α est fini et si toute partie finie de x' contenue dans une fibre de x' sur V est contenue dans un ouvert de x' affine sur V (ce qui est le cas par exemple si x'/V est quasi-projectif et alors le schéma descendu x/U est aussi quasi-projectif).

Exemples de champs. — Dans la suite, B désignera la catégorie des schémas munie de la topologie étale.

1) Soit $\mathcal{M}_g$ la catégorie fibrée en groupoïdes sur B dont les objets au-dessus d'un schéma S sont les S-courbes stables de genre g. $\mathcal{M}_g$ est un B-champ.

2) (G-variante de l'exemple précédent) : soient G un groupe fini et S un schéma au dessus de $Z[\frac{1}{|G|}]$, $\mathcal{M}_{g,G,S}$ le $B_{/S}$-champ des courbes stables de genre g munie d'une action admissible de G (*cf.* la définition 3.1 de [**Ek**]). $\mathcal{M}_{g,G}$ est un champ algébrique sur $Z[\frac{1}{|G|}]$ d'après [**Ek**] (pour la définition d'algébrique, on renvoie au paragraphe 5).

3) Soient K un corps, S une K-variété régulière, projective, géométriquement irréductible où K est un corps, G un K-groupe fini constant, D un K-diviseur de S, et $\overline{f}$ un $\overline{K}$-G-revêtement de S de corps des modules K (*cf.* § II) où $\overline{K}$ est la clôture séparable de K. Supposons $\overline{f}$ ramifié le long de $\overline{D} = D \otimes_K \overline{K}$. Soit S^* le K-ouvert $S - D$. On associe à $\overline{f}$ le $K_{\text{ét}}$-champ suivant $\mathcal{G}(\overline{f})$ où $K_{\text{ét}}$ désigne le site étale de K : pour $U = (\operatorname{Spec} E \to \operatorname{Spec} K)$ un objet de $K_{\text{ét}}$,

– les U-objets de $\mathcal{G}(\overline{f})$ sont les E-modèles f de $\overline{f}$ *i.e.* les homomorphismes $\psi_E : \Pi_E(S^*) = \Pi_1(S^* \otimes_K E) \to G$ qui induisent sur $\Pi_{\overline{K}}(S^*)$ un conjugué par G de l'homomorphisme $\psi_{\overline{K}}$ associé à $\overline{f}$ (pour le rôle des points-base dans le Π_1, *cf.* le n° 2.3 de [**D-D.1**]).

– les U-morphismes de $\mathcal{G}(\overline{f})$ sont les E-isomorphismes entre E-modèles précédents.

Les modèles précédents se recollent dans $\mathcal{G}(\overline{f})$ *i.e.* toute donnée de descente y est effective (Critère de Weil).

Les exemples 1) et 3) sont aussi des exemples de champs algébriques.

4) Pour chaque schéma $T \in \operatorname{ob}(B)$, soit $\operatorname{Cov}^{d,g}(T)$ la catégorie dont les objets sont les T-morphismes $\Pi : X \to \mathbb{P}^1_T$ où

– X est un T-schéma propre dont les fibres géométriques sont des courbes lisses, réduites connexes de genre g,

– Π un T-morphisme fini et localement libre de degré d,

– pour chaque point géométrique ξ de T, le morphisme $\Pi_\xi : X_\xi \to \mathbb{P}^1_{\kappa(\xi)}$ est séparable (*i.e.* le lieu étale de Π dans X est surjectif sur T).

– les morphismes dans $\operatorname{Cov}^{d,g}(T)$ sont les $\mathbb{P}^1_T$-isomorphismes.

$\operatorname{Cov}^{d,g}$ est un B-champ ; c'est même un B-champ algébrique de type fini sur Z.

5) Fixons un entier $d > 0$ et un sous-groupe fini $G \subset S_d$, un entier $r > 0$ et r classes de conjugaison $C_1, \ldots, C_r$ de G. Considérons les revêtements $f : X \to S = \mathbb{P}^1$ sur un corps de caractéristique 0 avec les invariants suivants :

– le groupe de monodromie (*cf.* n° 2 de [**D-D-E**] pour la définition de ce dernier) de f est G et l'action de monodromie sur une fibre non ramifiée est donnée par le plongement $G \subset S_d$ ($d = \deg f$)

– le nombre de points de ramification est r.

– la famille des classes de conjugaison dans G des générateurs distingués des groupes d'inertie au-dessus des points de ramification est $\underline{C} = \{C_1, \ldots, C_r\}$.

Soient $H_G(\underline{C})$ l'espace des revêtements du type précédent (*cf.* n° 3 de [**D-D-E**]). $H_G(\underline{C})$ est le schéma des modules grossiers d'un champ $\mathcal{H}_G(\underline{C})$ défini comme suit : soit T un Q-schéma, un T-objet de $\mathcal{H}_G(\underline{C})$ est un T-morphisme $f : X \to \mathbb{P}^1$ qui est fini et localement libre et tel que pour chaque point $\xi : \operatorname{Spec} k \to T$, $f_\xi : X_\xi \to \mathbb{P}^1_\xi$ est un revêtement du type précédent.

Le genre d'un objet de $\mathcal{H}_G(\underline{C})$ est parfaitement déterminé, d'où un foncteur oubli

$$\mathcal{H}_G(\underline{C}) \longrightarrow \mathrm{Cov}^{d,g}.$$

$\mathcal{H}_G(\underline{C})$ est un champ (algébrique sur $Z[\frac{1}{|G|}]$, *cf.* Chapitre IV de [**W**]) dont $\mathcal{G}(\overline{f})$ est la gerbe résiduelle en $\operatorname{Spec}(K[\overline{f}]) \in H_G(\underline{C})$ où $K[\overline{f}]$ désigne le corps des modules de $\overline{f}$ (*cf.* [**D-D.2**] et le théorème 11.5 de [**L-M.B**]). (Voir ci-dessous pour la définition d'une gerbe).

En fait $\mathcal{H}_G(\underline{C}) \to H_G(\underline{C})$ est une $H_G(\underline{C})$-gerbe étale localement liée par le centralisateur C de G dans S_d (*cf.* le paragraphe 4) [**D-D-E**].

Soit $S \in \mathrm{ob}(B)$, on dira aussi S-champ pour (B/S)-champ.

Définition. — Une S-gerbe est un S-champ $\mathcal{G}$ satisfaisant en plus aux deux conditions suivantes : pour tout S-objet T de B

– deux objets de la catégorie fibre $\mathcal{G}_T$ sont localement isomorphes,

– il existe un raffinement R de T tel que pour tout $U \in \mathrm{ob}(R)$, la catégorie fibre $\mathcal{G}_U$ est non vide.

Exemple. — Le $K_{\text{ét}}$-champ $\mathcal{G}(\overline{f})$ de l'exemple 3) est en fait une $K_{\text{ét}}$-gerbe.

2. Corps des modules – Cas des G-revêtements avec G abélien : la suite spectrale de descente

Reprenons la situation de l'exemple 3 du § 1. Soient S une K-variété régulière, projective, géométriquement irréductible où K est un corps, G un K-groupe fini constant, $\overline{f}$ un G-revêtement de S *a priori* seulement défini sur la clôture séparable $\overline{K}$ de K, $\overline{D}$ le lieu de ramification de $\overline{f}$. On supposera qu'il existe un K-diviseur D de S tel que $\overline{D} = D \otimes_K \overline{K}$. Posons $\overline{S} = S \otimes_K \overline{K}$, $S^* = S - D$, $\overline{S}^* = S^* \otimes_K \overline{K}$.

À quelles conditions peut-on descendre $\overline{f}$ de $\overline{K}$ à K ? *i.e.* à quelles conditions existe-t-il f défini sur K tel que $\overline{f} \simeq f \otimes_K \overline{K}$? Soit H le sous-groupe de $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ constitué des τ tels qu'il existe un isomorphisme $\overline{f} \simeq_{\overline{K}} \overline{f}^{\tau}$. Le corps $\overline{K}^H$ est appelé le corps des modules de $\overline{f}$. Supposons $K = \overline{K}^H$ i.e. que K est le corps des modules de $\overline{f}$.

La condition d'existence pour tout $\tau \in \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ d'un $\overline{K}$ isomorphisme $\overline{f} \simeq_{\overline{K}} \overline{f}^{\tau}$ se traduit par le fait que la classe $[\overline{f}]$ de $\overline{f}$ appartient à $H^{\circ}\big(K, H^1(\overline{S}^*, G)\big)$.

Supposons G abélien ; $H^{\circ}\big(K, H^1(\overline{S}^*, G)\big)$ s'insère dans la suite exacte en basses dimensions

$$(1) \quad 1 \longrightarrow H^1(K,G) \longrightarrow H^1_{\text{ét}}(S^*,G) \to H^{\circ}\big(K, H^1(\overline{S}^*,G)\big) \xrightarrow{d} H^2(K,G) \longrightarrow H^2_{\text{ét}}(S^*,G),$$

déduite de la suite spectrale de descente

$$H^p\big(\overline{K}/K, H^q_{\text{ét}}(\overline{S}^*,G)\big) \Longrightarrow H^*_{\text{ét}}(S^*,G),$$

où $d = d_2 : E_2^{0,1} \to E_2^{2,0}$ est la transgression.

Pour $\tau \in \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$, soit a_τ un isomorphisme $\overline{f} \simeq_{\overline{K}} \overline{f}^{\tau}$ donné par la condition que K est le corps des modules de $\overline{f}$ (on en choisit un). L'isomorphisme a_τ est une donnée de recollement dans le sens du paragraphe 1. La condition « K est le corps des modules de $\overline{f}$ » est donc équivalente à l'existence pour tout $\tau \in \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ d'une donnée de recollement sur $\overline{f}$. Cette donnée de recollement n'est pas en général une donnée de descente, *i.e.* la condition

$$a_{\sigma\tau} = a_\tau \circ {}^{\tau}a_\sigma$$

de 1-cocycle n'est pas en général satisfaite (*cf.* la condition ($**$) du paragraphe 1). On pose alors

$$a_{\sigma\tau} = \gamma_{\sigma,\tau} a_\tau \circ {}^{\tau}a_\sigma.$$

$\gamma_{\sigma,\tau}$ est un 2-cocycle représentant la classe $d([\overline{f}])$ où d désigne le cobord dans la suite exacte (1) : a_τ est une donnée de descente si seulement si $\gamma_{\sigma,\tau}$ est équivalent au 2-cocycle trivial (*cf.* le critère de Weil précédent). Nous avons le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & [\overline{f}] & & \\
H^1_{\text{ét}}(S^*,G) & \longrightarrow & H^{\circ}\Big(K, H^1(\overline{S}^*,G)\Big) & \xrightarrow{d} & H^2(K,G) \\
\wr| & & \wr| & & \\
\mathrm{Hom}\Big(\Pi_1(S^*),G\Big) & & \Big[\mathrm{Hom}\Big(\Pi_1(\overline{S}^*),G\Big)\Big]^{\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)} & & \\
 & & [\psi_{\overline{K}}] & &
\end{array}$$

Désignons par $[\psi_{\overline{K}}]$ l'image de $[\overline{f}]$ dans $[\mathrm{Hom}\big(\Pi_1(\overline{S}^*),G\big)]^{\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)}$. Au 2-cocycle $\gamma_{\sigma,\tau}$, on associe la K-gerbe $\mathcal{G}(\overline{f})$ des modèles de $\overline{f}$ introduite dans l'exemple 3 du paragraphe 1 : $\mathcal{G}(\overline{f})$ est triviale si seulement si elle possède une section sur K *i.e.* si seulement si il existe un K-modèle f de $\overline{f}$ et alors f est un « descendu » de $\overline{K}$ à K de $\overline{f}$; de manière équivalente, $[\overline{f}]$ dans $H^\circ\big(K, H^1(\overline{S}^*, G)\big)$ est l'image de $[f]$ dans $H^1(S^*, G)$. En d'autres termes $d([\overline{f}] = [\mathcal{G}(\overline{f})] = 0$ si et seulement si il existe un K-modèle f de $\overline{f}$.

Remarque. — Supposons que S^* admette un K-point rationnel. Alors, dans la suite (1), il existe une rétraction

$$H^2_{\text{ét}}(S^*, G) \longrightarrow H^2(K, G)$$

qui force d à être nul, auquel cas la gerbe $\mathcal{G}(\overline{f})$ admet une section. La non nullité de d est une obstruction à l'existence d'un point K-rationnel dans S^* ([**Ha-Sk**]).

En résumé. — Supposons G abélien. À un G-revêtement $\overline{f}$ de corps des modules K, nous avons associé une classe dans $H^2(K, G)$. Cette classe est représentée par la K-gerbe des modèles de $\overline{f}$. Elle est nulle si et seulement si $\overline{f}$ admet un K-modèle f.

3. Extension au cas où G n'est plus abélien et au cas des revêtements

A) $\overline{f}$ *est toujours un G-revêtement, mais G n'est plus abélien* : les automorphismes d'un U-objet quelconque de $\mathcal{G}(\overline{f})$ correspondent aux éléments de $Z(G)$ (= centre de G) (les automorphismes comme G-revêtement se distinguent des automorphismes comme G-fibré) ; la gerbe $\mathcal{G}(\overline{f})$ est alors liée au sens de [**Gi**] par $Z(G)$. On peut alors utiliser la proposition 3.1.6. § 3 - Chap. V de [**Gi**] : $d([\overline{f}]) \in H^2\big(K, Z(G)\big)$, la suite

$$H^1_{\text{ét}}(S^*, G) \longrightarrow H^\circ\big(K, H^1(\overline{S}^*, G)\big) \xrightarrow{d} H^2\big(K, Z(G)\big)$$

est encore exacte (en un sens évident).

Remarque. — Supposons $d([\overline{f}]) = 0$ dans $H^2\big(K, Z(G)\big)$; deux relèvements de $[\overline{f}]$ dans $H^1_{\text{ét}}(S^*, G) \simeq \operatorname{Hom}\big(\Pi_1(S^*), G\big)$ diffèrent par torsion par un élément de $Z^1(K, G)$ si on les considère comme G-fibrés, mais d'un élément de $Z^1\big(K, Z(G)\big)$ si on les considère comme G-revêtements.

B) $\overline{f}$ *est un revêtement simple* : la gerbe $\mathcal{G}(\overline{f})$ qu'il faut alors considérer est la suivante (nous fixons dans ce qui suit la représentation $G \subset S_d$ ($d = \deg \overline{f}$) correspondant à l'action de monodromie de G sur une fibre non ramifiée) :

U-Objets de $\mathcal{G}(\overline{f})$ sont les E-modèles de $\overline{f}$
i.e. les homomorphismes $\psi_E : \Pi_E(S^*) \to N$
où $N = \operatorname{Norm}_G(S_d)$ qui induisent sur $\Pi_{\overline{K}}(S^*)$
un conjugué $\psi_{\overline{K}}^{\varphi}$ de $\psi_{\overline{K}}$ par $\varphi \in N$,

U-Morphismes entre deux tels ψ_E et ψ'_E sont les éléments
$\varphi \in N$ tel que $\psi'_E(x) = \varphi \cdot \psi_E(x) \cdot \varphi^{-1}, \forall\, x \in \Pi_E(S^*)$.

La classe de la gerbe $\mathcal{G}(\overline{f})$ appartient alors à un ensemble $H^2(K, L_C)$ où L_C est un K-lien localement représentable par le centralisateur C de G dans S_d. L'ensemble $H^2(K, L_C)$ est muni d'un sous-ensemble de classes neutres $H^2(K, L_C)'$: $\mathcal{G}(\overline{f})$ admet une section si seulement si $[\mathcal{G}(\overline{f})] \in H^2(K, L_C)'$. Pour plus de détails, nous renvoyons à [**D-D.1**] et à [**D-D.2**].

4. Familles de revêtements. Gerbes de Hurwitz. Gerbes résiduelles

• Soit $H_G(\underline{C})$ l'espace de Hurwitz introduit dans l'exemple 5 du paragraphe I : $H_G(\underline{C})$ est défini sur une extension finie K de $\mathbb{Q}$ déterminée par les conditions de rationalité des classes de $\underline{C}$.
• Soit H une composante irréductible régulière de $H_G(\underline{C})$ définie sur K.

Question. — Existe-t-il une *famille de Hurwitz* sur H, *i.e.* un K-morphisme fini, plat $\mathcal{F} : \Im \to H \times \mathbb{P}^1$ dans lequel $\Im$ et H sont des K-variétés quasi-projectives, tel que, pour chaque $h = [f] \in H$, la fibre-revêtement $\mathcal{F}_h \to \mathbb{P}^1$ est isomorphe au revêtement f ?

Résultats

• De telles familles existent localement pour la topologie complexe (Fried) ou pour la topologie étale ([**D-D-E**]).
• Si les revêtements n'ont pas d'automorphisme *i.e.* si $C = \mathrm{Cen}_{S_d}(G) = \{1\}$, l'espace H est un espace de modules fins : les familles locales se recollent pour fournir une famille globale.
• Il y a une obstruction cohomologique à l'existence de familles de Hurwitz dans $H^2(H, L_C)$, en fait dans l'image

$$H^2\big(\pi_1(H), L_C\big) \hookrightarrow \check{H}^2(H, L_C) \hookrightarrow H^2(H, L_C).$$

La classe correspondante dans $H^2(H, L_C)$ est représentée par la gerbe $\mathcal{G} = \mathcal{H}_G(\underline{C})$ de l'exemple 5 du paragraphe 1 dite « Gerbe de Hurwitz ». $\mathcal{G}$ est munie évidemment d'une donnée de recollement (puisqu'elle provient de $\check{H}^2(H, L_C)$).
• Dans le cas où G est abélien, nous avons la suite exacte (2) (qui induit la suite exacte (1) du paragraphe 2 par spécialisation) :

$$(2)\qquad \begin{aligned} 1 \longrightarrow H^1_{\text{ét}}(H, G) &\longrightarrow H^1_{\text{ét}}\big(H \times (\mathbb{P}^1_K)^*, G\big) \\ &\longrightarrow H^\circ\big(H, \widetilde{H}^1_{\text{ét}}\big((\mathbb{P}^1_{\overline{K}})^*, G\big)\big) \xrightarrow{d} H^2_{\text{ét}}(H, G) \longrightarrow H^2_{\text{ét}}\big(H \times (\mathbb{P}^1_K)^*, G\big) \\ &\qquad\qquad \| \\ &H^1_{\text{ét}}\big((\mathbb{P}^1_{\overline{K}})^*, G\big)^{\pi_1(H)} \end{aligned}$$

déduite de la suite spectrale

$$H^p_{\text{ét}}\big(H, \widetilde{H}^q((\mathbb{P}^1_{\overline{K}})^*, G)\big) \Longrightarrow H^*_{\text{ét}}\big(H \times (\mathbb{P}^1_K)^*, G\big).$$

$((\mathbb{P}^1)^* = \mathbb{P}^1 -$ les r points de ramification).

[En fait, dans la suite (2), il serait sans doute préférable de remplacer le produit $H \times (\mathbb{P}^1_K)^*$ par le produit fibré $H \times_{\mathcal{U}_r} \mathcal{U}_{r+1}$ défini dans le n° 3.1.3 de [**D-D-E**]].
• Nous obtenons une extension de la suite (2) (en se restreignant aux 4 premiers termes) au cas où G n'est plus abélien analogue à celle du § 3, A).

Théorème 1 **([D-D-E])**. — *Soit $\overline{f}$ un revêtement de $\mathbb{P}^1$ correspondant à un point $h =$* $\mathrm{Spec}\, K([\overline{f}])$ *de H. Alors la gerbe $\mathcal{G}(\overline{f})$ définie au § 3 est le pull-back de la gerbe de Hurwitz $\mathcal{G}$ par le morphisme* $\mathrm{Spec}\big(K([\overline{f}])\big) \to H$.

• Le théorème précédent éclaire le parallélisme entre les deux propriétés (i) et (ii) suivantes :

(i) « Le corps des modules d'un revêtement est l'intersection de ses corps de définition »,

(ii) « Le corps des fonctions $\overline{K}(H)$ de l'espace de Hurwitz H est l'intersection de tous les corps de fonctions des espaces de paramètres S irréductibles définis sur $\overline{K}$ au-dessus desquels il existe une famille de Hurwitz de type d'inertie $\underline{C}$ et de morphisme $S \to H$ dominant ».

• La catégorie des revêtements de $\mathbb{P}^1/Z$ correspondant à une donnée $\underline{C}$ est un champ algébrique sur $Z\left[\frac{1}{|G|}\right]$ (*cf.* l'exemple 5 du § 1)

5. Champs algébriques

[Ce numéro est le fruit de discussions avec M. Emsalem.]

Définition 3. — *Un champ $\mathcal{X}$ sur un schéma S est dit* algébrique [**L-M.B**, chap. IV] *s'il satisfait aux deux propriétés suivantes :*

1) *$\forall U$ schéma affine sur S, $x, y \in \mathrm{ob}(\mathcal{X}_U)$,*

$$\mathrm{Isom}_{\mathcal{X}_U}(x,y) : (V \to U) \rightsquigarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{X}_V}(x/V, y/V)$$

(qui est un faisceau par la propriété de préchamp) est un U-schéma quasi-compact (même de type fini) ([**L-M.B**] *demande seulement que ce soit un U-espace algébrique et non un U-schéma).*

2) *Il existe un S-schéma X (appelé « présentation » de $\mathcal{X}$) et un 1-morphisme de S-champ : $X \xrightarrow{P} \mathcal{X}$ surjectif et lisse.*

La condition sur P dans 2) signifie ceci : Appelons « P-structure » sur $y \in \mathrm{ob}(\mathcal{X}_U)$ la donnée d'un relèvement $\widetilde{y} : U \to X$ et d'un U-isomorphisme $P \circ \widetilde{y} \simeq y$. Alors, le foncteur qui à $x : U \to \mathcal{X} \in \mathrm{ob}(\mathcal{X}_U)$ associe l'ensemble des P-structures sur x est lisse et surjectif. C'est un U-schéma par 1).

Exemples de champs algébriques

1) Le champ $\mathcal{M}_g$ dont la catégorie des objets au-dessus de S est la catégorie des courbes stables de genre g sur S (*cf.* [**De-Mu**]). $\mathcal{M}_g$ admet une présentation $P : H_g \xrightarrow{\text{oubli}} \mathcal{M}_g$ où H_g est le sous-schéma de $\mathrm{Hilb}^{P_g}_{5g-6}$ des courbes stables tri-canoniquement plongées dans $\mathbb{P}^{5g-6}$ où $P_g(n) = (6n-1)(g-1)$ est le polynôme de Hilbert.

• $P : H_g \to \mathcal{M}_g$ est représentable, lisse et surjectif : si $\pi : C \to S$ est une courbe stable sur S définissant un morphisme $\gamma : S \to \mathcal{M}_g$, alors $H_g \times_{\mathcal{M}_g} S$ est le schéma lisse des isomorphismes entre $\mathbb{P}^{5g-6}$ sur S et $P\big(\pi_*(\omega_{C/S}^{\otimes 3})\big)$:

$$\begin{tikzcd} H_g \times_{\mathcal{M}_g} S \arrow[r] \arrow[d] & H_g \arrow[d] \\ S \arrow[r, "\gamma"] & \mathcal{M}_g \end{tikzcd}$$

• $\mathcal{M}_g$ est donc un champ algébrique (la condition 1) de la définition 3 résulte par exemple du théorème 1.11 de [**De-Mu**]).
• $\mathcal{M}_g$ est le champ quotient de H_g par $PGL(r)$ où $r = 5g - 6$

$$\mathcal{M}_g = \Big[H_g/PGL(r)\Big]$$

• *Définition du champ* $[U/G]$ où le groupe G opère sur le schéma U : c'est le S-champ dont la catégorie des sections sur un S-schéma T est la catégorie des e.p.h. (espace principal homogène) E sur T de groupe structural G muni d'un G-morphisme $\varphi : E \to U$. Le e.p.h. $G \times U \to U$ (avec action de G sur le 1er facteur) est une section q de $[U/G]$ sur U ($q : U \to [U/G]$). $[U/G]$ est représentable si seulement si U est un e.p.h. sur un schéma Y et alors $[U/G] \sim Y$.
• On peut couvrir $\mathcal{M}_g$ par des cartes locales *i.e.* par des champs quotients $\big[X_i/G_i\big]$ où les X_i sont des schémas affines et G_i des groupes finis comme suit :
soit $x_0 \in H_g$, alors il existe un sous-schéma lisse X_{x_0} passant par x_0 de dimension $(3g-3)$ contenu dans H_g tel que

a) X_{x_0} est affine,
b) X_{x_0} est G_{x_0}-invariant (G_{x_0} est le stabilisateur de x_0 dans $G = PGL(r)$),
c) pour chaque $y \in X_{x_0}$, $G_y \subset G_{x_0}$,
d) il existe un voisinage U de x_0 dans X_{x_0} G_{x_0}-invariant tel que

$$\{\gamma \in G = PGL(r) \mid \gamma U \cap U \neq \varnothing\} = G_{x_0},$$

e) la restriction à X_{x_0} de la famille universelle Z_g dans $\mathbb{P}^r \times H_g$ est une déformation universelle de chacune de ses fibres et en particulier de la courbe $C \leftrightarrow x_0$.
• $G \cdot X_{x_0}$ contient un ouvert de Zariski de H_g. Par compacité, on peut recouvrir H_g par un nombre fini de $G \times X_i$. D'où une fonction étale surjective.

$$\coprod_{i=1}^{n} \Big[X_i/G_i\Big] \twoheadrightarrow \mathcal{M}_g$$

2) On a déjà mentionné dans l'exemple 2 du § 1 que le champ $\mathcal{M}_{g,G}$ des G-courbes stables de genre g était un champ algébrique sur $Z[\frac{1}{|G|}]$. Dans la suite, nous supposerons toujours $|G|$ premier aux caractéristiques résiduelles. On travaille avec la version G-équivariante de l'exemple 1) (*cf.* [**B**]). Soit $H_{g,G}$ le sous-schéma de H_g constitué des points fixés par l'action de G

$$\mathcal{M}_{g,G} = \big[H_{g,G}/A\big] = \text{champ quotient de } H_{g,G} \text{ par le centralisateur}$$

A de G dans $PGL(r)$ (en particulier $\mathcal{M}_{g,G}$ est algébrique, *cf.* [**B**]).

$$\begin{array}{rccc}
 & H_{g,G} & \longrightarrow & H_g \\
 & \downarrow & & \downarrow P \\
\text{Champs des Modules fins :} & \mathcal{M}_{g,G} & \xrightarrow{\text{oubli}} & \mathcal{M}_g \\
 & \downarrow & & \downarrow \\
\text{Espaces de Modules grossiers :} & M_{g,G} & \xrightarrow{\text{fini}} & M_g
\end{array}$$

Soit $M_{g,G}(\underline{C})$ le sous-schéma de l'espace des modules grossiers $M_{g,G}$ correspondant à une donnée de Hurwitz $\underline{C}$ (*cf.* le paragraphe 4). Nous avons le diagramme suivant (avec les notations naturelles) :

$$\begin{array}{rccccccc}
\text{Produit fibré } F & \longrightarrow & H_{g,G}(\underline{C}) & \longrightarrow & H_{g,G} & \longrightarrow & H_g \\
\downarrow P & & \downarrow P & & \downarrow P & & \downarrow P \\
\mathcal{G}(\overline{f}) & \hookrightarrow & \mathcal{M}_{g,G}(\underline{C}) & \hookrightarrow & \mathcal{M}_{g,G} & \xrightarrow{\text{oubli}} & \mathcal{M}_g \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
h[\overline{f}] & \hookrightarrow & M_{g,G}(\underline{C}) & \hookrightarrow & M_{g,G} & \xrightarrow{\text{fini}} & M_g
\end{array}$$

$h[\overline{f}] = \mathrm{Spec}\big(K([\overline{f}])\big)$ = spectre du corps des modules du revêtement $\overline{f}$. [(1)]

Le produit fibré $F = H_{g,G}(\underline{C}) \times_{\mathcal{M}_{g,G}(\underline{C})} \mathcal{G}(\overline{f})$ est un espace principal homogène sous le groupe linéaire A au-dessus de $\mathcal{G}(\overline{f})$ (par Bertin [**B**], $A = \Pi_i GL(n_i)$), pour certains n_i) et $H_{g,G}(\underline{C}) \times_{M_{g,G}(\underline{C})} h[\overline{f}]$ est un $K([\overline{f}])$-espace homogène de A avec stabilisateurs géométriques le groupe des automorphismes $\mathrm{Aut}\,\overline{f}$ de $\overline{f}$. D'où

Proposition 1. — *La gerbe $\mathcal{G}(\overline{f})$ admet une présentation P (au sens du 2) de la définition 3 du début du paragraphe 5) qui est définie sur le corps des modules de $\overline{f}$.*

$\mathcal{G}(\overline{f})$ est donc un champ algébrique sur $h[\overline{f}]$.

6. Applications – Résultats

Une première application de la proposition 1 précédente donne

Proposition 2. — *Soit $\overline{f}$ un G-revêtement de corps des modules Q. Supposons que p ne divise pas $|G|$ et que les points de ramification ne coalescent pas $\mod p$ (i.e. p est un bon premier). Alors f admet un modèle sur Q^{tp} (Q^{tp} = nombres totalement p-adiques).*

(1) En fait, la notion de corps des modules ici diffère légèrement de la notion de corps des modules utilisée précédemment : jusqu'ici, nous considérions comme morphismes entre revêtements ceux qui induisent l'identité sur $\mathbb{P}^1$, alors qu'ici nous devons considérer aussi ceux qui induisent un automorphisme de $\mathbb{P}^1$.

Démonstration. — Au G-revêtement $\overline{f}$, on associe la gerbe $\mathcal{G}(\overline{f})$ de ses modèles : elle est définie sur Q puisque $\overline{f}$ est de corps des modules Q. Par hypothèse, $\mathcal{G}(\overline{f})$ admet un Q_p-modèle (*cf.* [**D-H**], [**Em**]), donc une section $\operatorname{Spec} Q_p \xrightarrow{x} \mathcal{G}(\overline{f})$. Puisque $\mathcal{G}(\overline{f})$ est un champ algébrique, par le théorème 6.3 de [**L-M.B**], il existe un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "P"] \\ \operatorname{Spec} Q_p \arrow[ur, "x_1"] \arrow[r, "x"'] & \mathcal{G}(\overline{f}) \end{tikzcd}$$

dans lequel x_1 relève x et X est un schéma affine et P lisse. À la manière de Pop ([**P**] ; cf aussi [**M.B**]), on approche le Q_p-point x_1 de X par un Q^{tp}-point dont l'image par P est un Q^{tp}-point dans $\mathcal{G}(\overline{f})$.

La preuve de la proposition 2 fournit aussi :

Théorème 2. — *Soit G un Q^{tp}-groupe algébrique, L un lien localement représentable par G, l'application*

$$H^2(Q^{tp}, L) \longrightarrow H^2(Q^{tp} \otimes_Q Q_p, L)$$

est injective (i.e. si la classe d'une gerbe dans $H^2(Q^{tp}, L)$ a une image neutre, elle est déjà neutre dans $H^2(Q^{tp}, L)$).

Ce résultat s'inscrit dans la lignée de celui de Moret-Bailly [**M.B**] qui utilise le champ $\big[\operatorname{Spec} Q/G\big]$ pour montrer la bijectivité

$$H^1(Q^{tp}, G) \simeq H^1(Q^{tp} \otimes_Q Q_p, G)$$

dans le cas où G satisfait l'une des hypothèses suivantes :

– G est connexe,

– G est commutatif et $G(Q_p)$ est Zariski-dense dans G_{Q_p}.

En particulier si $G = \widetilde{G}$ est semi-simple simplement connexe, $H^1(Q^{tp}, \widetilde{G}) = 0$ et, si G est seulement semi-simple, on peut montrer que toutes les classes de $H^2(Q^{tp}, L)$ sont neutres. (2)

Remerciements. — L'auteur tient à remercier le referee pour ses corrections et son aide.

(2) Avec J. Burési, nous avons défini un site p-adique étale analogue au site réel étale et une topologie “both” analogue à celle de Scheiderer pour le cas réel permettant de comparer les cohomologies de Q^{tp} et de $Q^{tp} \otimes_Q Q_p$.

Références

[B] Bertin J. « Compactification des Schémas de Hurwitz », C.R. Acad. Sc. Paris, 322, Série I, 1063–1066 (1996).

[D-D.1] Dèbes P., Douai J.C. « Algebraic covers : field of moduli versus field of definition », Annales Sci E.N.S., 4ième série, 30, (1997), 303–338.

[D-D.2] Dèbes P., Douai J.C. « Gerbes and Covers », Comm. in Algebra, 27/2 (1999), 577–594.

[D-D-E] Dèbes P., Douai J.C., Emsalem M. « Familles de Hurwitz et cohomologie non abélienne », Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 50,1 (2000), 111–147.

[D-H] Dèbes P., Harbater D. « Field of definition of p-adic covers », Journal. für die reine und angew Math., 498, (1998), 223–236.

[De-Mu] Deligne P., Mumford D. « On the irreductibility of the moduli space of curves », Publ. I.H.E.S. 36 (1969), 75–110.

[Em] Emsalem M. « On reduction of covers of Arithmetic surfaces », Contemporary Math., 245, 1999, 117–132.

[Ek] Ekedahl T. « Boundary behaviour of Hurwitz schemes », Progress in Math., Birkhaüser, 129 (1995), 173–198.

[Fr] Fried M. « Fields of definition of function fields and Hurwitz families, Groups as Galois groups », Comm. in Algebra, 1 (1977), 17–82.

[Gi] Giraud J. « Cohomologie non abélienne », Grundlehren Math. Wiss 179, Springer-Verlag (1971).

[Gr] Grothendieck A. « Techniques de descente et théorèmes d'existence en géométrie algébrique. 1. Descente par morphismes fidèlement plats », Séminaire Bourbaki, déc. 1959, 190.

[Ha-Sk] Harari D., Skorobogatov A.N. « Non abelian cohomology and rational points », Preprint (1999).

[L-M.B] Laumon G., Moret-Bailly L. « Champs algébriques », Vol. 39, Ergebnisse der Math und ihrer Grenzgebiete, Springer (2000).

[M.B] Moret-Bailly L. « Problèmes de Skolem sur les champs algébriques » Compositio Math.125 (2001), 1–30.

[P] Pop F. « Embedding problems over large fields, », Ann. of Math. 144 (1996), 1–34.

[W] Wevers S. « Construction of Hurwitz spaces », Thèse Université d'Essen (Oct. 1998).

J.-C. Douai, UFR de Mathématiques, UMR AGAT CNRS, Université des Sciences et Technologies de Lille, F-59655 Villeneuve d'Ascq Cedex, France • *E-mail :* douai@agat.univ-lille1.fr