Séminaires & Congrès
5, 2001, p. 27–41

MÉTHODES TOPOLOGIQUES ET ANALYTIQUES EN THÉORIE INVERSE DE GALOIS : THÉORÈME D'EXISTENCE DE RIEMANN

par

Pierre Dèbes

Résumé. **—** Cet exposé couvre la partie classique de la théorie des revêtements et du groupe fondamental, avec la théorie de Galois en perspective. On aboutit au théorème d'existence de Riemann, qui fait le lien entre les aspects topologique, analytique et algébrique des revêtements de la droite. Le problème inverse de Galois géométrique sert de fil conducteur. Un exposé détaillé est proposé en annexe du volume.

***Abstract* (Riemann's existence theorem). —** With Galois theory in perspective we cover the classical part of the theory of covers and fundamental groups. We end at Riemann's existence theorem which makes the connection between the topological, the analytic and the algebraic aspects of the covers of the line. The geometric inverse Galois problem is used as a motivation and a guide into the theory. A more detailed treatment is offered in an appendix of the volume.

Cet exposé a été donné lors du colloque « Revêtements » à St-Étienne en mars 2000 et lors du Von Neumann symposium « Arithmetic Fundamental Groups and Noncommutative Algebra » en août 1999 au M.S.R.I. à Berkeley. Dans les deux cas, le but était de couvrir la partie classique de la théorie des revêtements et du groupe fondamental avant d'en aborder la partie arithmétique. Les méthodes employées sont topologiques et analytiques, avec en perspective la théorie de Galois. Nous avons essayé de donner une vue globale de ce premier volet en donnant des énoncés précis et en dégageant les idées directrices. Le lecteur trouvera plus de détails dans l'annexe [De2] de ce volume qui contient quatre chapitres extraits d'un cours de DEA donné à Lille sur le sujet en 1994/95.

***Classification mathématique par sujets* (2000). —** 14H30, 30F10, 55-99, 12F12, 14H05.
***Mots clefs.* —** Revêtements, groupes fondamentaux, monodromie, revêtements galoisiens, surfaces de Riemann, fonctions méromorphes, fonctions algébriques, corps de fonctions, théorème d'existence de Riemann.

1. Résultats principaux

Le théorème d'existence de Riemann (TER) est un résultat central de la théorie des revêtements. On l'invoque généralement pour justifier l'équivalence des aspects algébrique, analytique et topologique de la notion de revêtement d'une surface de Riemann compacte. Nous en donnerons plusieurs formes et essaierons d'en distinguer les diverses composantes. Outre Riemann, il convient de citer Hurwitz à qui revient une part importante des résultats présentés ici.

Le lien avec la théorie de Galois est que le TER permet de résoudre le

Problème inverse de Galois sur $\mathbb{C}(T)$. — *Tout groupe fini G est le groupe de Galois d'une extension $E/\mathbb{C}(T)$ (où $\mathbb{C}(T)$ est le corps des fractions rationnelles en l'indéterminée T et E est un corps).*

Ce résultat constitue le point de départ de l'approche moderne du problème inverse de Galois classique sur $\mathbb{Q}$: il s'agit de « descendre » de $\mathbb{C}(T)$ à $\mathbb{Q}(T)$; le théorème d'irréductibilité de Hilbert permettrait alors d'obtenir le résultat sur $\mathbb{Q}$ lui-même (*Cf.* [De1]).

Le TER est plus précisément un résultat de classification. En termes d'extensions de corps et de réalisation de groupes, on peut en donner la première forme suivante.

***Théorème d'existence de Riemann* (forme pratique).** — *Supposons donnés*

– un groupe fini G

– un entier $r > 0$

– r classes de conjugaison $C_1, \ldots, C_r$ de G.

Pour tous $t_1, \ldots, t_r \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, r points distincts, il existe une correspondance bijective entre

l'ensemble des extensions de corps $E/\mathbb{C}(T)$ *– galoisiennes de groupe G* *– ramifiées en $t_1, \ldots, t_r$* *– de générateurs distingués de l'inertie en t_i dans C_i, $i = 1, \ldots, r$* *modulo les $\mathbb{C}(T)$-isomorphismes*	*et*	*l'ensemble des r-uplets $(g_1, \ldots, g_r) \in G^r$ tels que* *– $\langle g_1, \ldots, g_r \rangle = G$* *– $g_1 \cdots g_r = 1$* *– $g_i \in C_i$, $i = 1, \ldots, r$* *modulo la conjugaison (composante par composante) par des éléments de G.*

La notion de « générateurs distingués de l'inertie » est expliquée plus bas. Si on préfère, on peut laisser de côté les points où ces générateurs et les classes $C_1, \ldots, C_r$ interviennent ; l'énoncé obtenu est juste un peu moins précis.

Le problème inverse sur $\mathbb{C}(T)$ découle de cette première forme du TER : tout groupe fini G possède un r-uplet $(g_1, \ldots, g_r)$ comme ci-dessus, pourvu que r soit assez grand (supérieur strictement au rang $\mathrm{rg}(G)$, *i.e.*, au nombre minimal de générateurs de G).

Cette première forme du TER ne s'exprime pas en termes de revêtements. Nous allons expliquer dans la suite comment ils apparaissent, et démontrer le résultat dans ce contexte. Nous travaillerons plus généralement avec des revêtements non nécessairement galoisiens, même si nous garderons le cas galoisien présent à l'esprit, en vue de l'application à la théorie de Galois.

2. Revêtements algébriques et extensions de corps de fonctions

Cette section est pure géométrie algébrique mais n'en utilise que des notions standard ; le chapitre 1 du livre de Hartshorne [Ha] par exemple est suffisant.

Étant donnés

– K un corps de base algébriquement clos (*e.g.* $K = \mathbb{C}$),

– B une K-variété projective régulière géométriquement irréductible (*e.g.* $B = \mathbb{P}^1$),

on appelle *revêtement algébrique de B sur K* un morphisme algébrique $\mathrm{f} : X \to B$, fini, génériquement non-ramifié et défini sur K avec X une variété normale et géométriquement irréductible. Dans le cas $B = \mathbb{P}^1$, la donnée d'un revêtement équivaut à celle d'une fonction rationnelle non-constante $\mathrm{f} : X \cdots\to \mathbb{P}^1$ avec X une courbe projective lisse.

Au revêtement $\mathrm{f} : X \to B$ est associée l'*extension de corps de fonctions* $K(X)/K(B)$. C'est une extension finie séparable avec $K(X)/K$ régulière (*i.e.* $K(X) \cap \overline{K} = K$).

Il est classique que le foncteur « corps des fonctions » fournit une *équivalence de catégories* entre la catégorie des K-revêtements algébriques de B et celle des extensions finies séparables et régulières (sur K) de $K(B)$. Le foncteur inverse est donné par le procédé de *normalisation* : étant donné $E/K(B)$ comme ci-dessus, on considère, pour tout ouvert affine $U = \mathrm{Spec}(R)$ de B, la clôture intégrale $\widetilde{R}$ de R in E ; les morphismes associés $\mathrm{Spec}(\widetilde{R}) \to \mathrm{Spec}(R)$ se recollent pour fournir le revêtement f cherché.

Une autre description de la normalisation peut être donnée dans le cas de revêtements de $\mathbb{P}^1$ sur $\mathbb{C}$. Si $E/\mathbb{C}(T)$ est une extension finie, le revêtement f lui correspondant est le suivant : $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ [resp. X] est l'ensemble des *places* (triviales sur $\mathbb{C}$) de $\mathbb{C}(T)$ [resp. de E] et f est l'application de restriction [Ha ; Ch. I p.45].

Dans cette équivalence de catégories, nous avons les *correspondances* suivantes :

• $\deg(\mathrm{f})$	$=$	$[K(X) : K(B)]$
• $\mathrm{Aut}(\mathrm{f})$	$\underset{\text{anti}}{\simeq}$	$\mathrm{Aut}(K(X)/K(B))$
• f revêtement galoisien	ssi	$K(X)/K(B)$ extension galoisienne
i.e. $\lvert\mathrm{Aut}(\mathrm{f})\rvert = \deg(\mathrm{f})$		*i.e.* $\lvert\mathrm{Aut}(K(X)/K(B))\rvert = [K(X) : K(B)]$

Rappelons aussi les *invariants* classiques d'un revêtement $\mathrm{f} : X \to \mathbb{P}^1$ sur $\mathbb{C}$:

– le groupe : $G = \mathrm{Gal}(\widehat{\mathbb{C}(X)}/\mathbb{C}(T))$ plongé dans S_d ($d = \deg(\mathrm{f})$) *via* son action sur les d conjugués d'un élément primitif de $\mathbb{C}(X)/\mathbb{C}(T)$,

– les points de branchement : $t_1,\dots,t_r\in\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, *i.e.*, les points t tels que la clôture galoisienne $\widehat{\mathbb{C}(X)}$ n'est pas totalement décomposée sur $\mathbb{C}((T-t))$,

– l'invariant canonique de l'inertie : $\mathbf{C}^{\mathrm{alg}}=(C_1^{\mathrm{alg}},\dots,C_r^{\mathrm{alg}})$ défini comme suit. Soit $\widehat{\mathbb{C}(X)}/\mathbb{C}(T)$ la clôture galoisienne de l'extension $\mathbb{C}(X)/\mathbb{C}(T)$; son groupe de Galois est le groupe G. Pour $i=1,\dots,r$, l'extension d'algèbres

$$\widehat{\mathbb{C}(X)}\otimes_{\mathbb{C}(T)}\mathbb{C}((T-t_i))/\mathbb{C}((T-t_i))$$

s'écrit comme produit d'extensions *locales* de corps $E_{ij}/\mathbb{C}((T-t_i))$. D'après le théorème de Puiseux, ces extensions, qui sont galoisiennes, sont nécessairement de la forme $E_{ij}\simeq\mathbb{C}((\,(T-t_i)^{1/e_i}))$ pour un certain entier e_i (l'indice de ramification). Les groupes de Galois de ces extensions locales sont les *groupes d'inertie* ; ils sont conjugués dans G et cycliques. La classe C_i^{alg} est la classe de conjugaison dans G des *générateurs distingués* des groupes d'inertie I en t_i, *i.e.*, ceux qui correspondent à $e^{2i\pi/e_i}$ dans les isomorphismes

$$\begin{cases} I \longrightarrow \mu_{e_i}=\{\text{racines } e_i\text{-èmes de } 1\}\\ \sigma \longmapsto \qquad \dfrac{\sigma(\,(T-t_i)^{1/e_i})}{(T-t_i)^{1/e_i}}\end{cases}$$

3. Revêtements topologiques

Cette section est pure topologie. Nous rappelons deux points fondamentaux de la théorie du groupe fondamental : la structure du groupe fondamental de la sphère de Riemann privée d'un certain nombre de points et la correspondance entre revêtements topologiques et représentation du groupe fondamental. Nous nous limitons aux énoncés. Le lecteur pourra se reporter à l'annexe [De2] pour plus de détails, précisément au chapitre 1 pour le premier point et au chapitre 2 pour le second.

Groupe fondamental de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ privé de r points $t_1,\dots,t_r$. — On a

$$\pi_1(\mathbb{P}^1(\mathbb{C})\setminus\{t_1,\dots,t_r\},t_o)\quad\simeq\quad\begin{array}{l}\text{groupe libre à } r \text{ générateurs}\\ \gamma_1,\dots,\gamma_r \text{ modulo la}\\ \text{relation } \gamma_1\cdots\gamma_r=1\end{array}$$

On peut préciser comment réaliser cet isomorphisme : on peut prendre pour $\gamma_1,\dots,\gamma_r$ des lacets « tournant une fois dans le sens direct » autour de $t_1,\dots,t_r$ respectivement et ne se croisant pas mutuellement.

Revêtements et groupe fondamental

Théorème. — *Soit $\mathcal{B}$ un espace topologique connexe par arcs, localement connexe par arcs et localement simplement connexe (e.g. $\mathcal{B}=\mathbb{P}^1(\mathbb{C})\setminus\{t_1,\dots,t_r\}$). Soit $t_o\in\mathcal{B}$. Il existe une correspondance bijective entre*

l'ensemble des revêtements		*l'ensemble des*
connexes de degré d	*et*	*représentations transitives*
$f : \mathcal{X} \to \mathcal{B}$		$\phi : \pi_1(\mathcal{B}, t_o) \to S_d$
modulo l'équivalence des revêtements		*modulo l'équivalence*
		des représentations.

On rappelle que deux revêtements $f : \mathcal{X} \to \mathcal{B}$ et $g : \mathcal{Y} \to \mathcal{B}$ sont dits équivalents s'il existe un homéomorphisme $\chi : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ tel que $g \circ \chi = f$, et que deux représentations $\phi, \psi : \pi_1(\mathcal{B}, t_o) \to S_d$ sont dites équivalentes s'il existe $\omega \in S_d$ tel que $\phi = \omega\psi\omega^{-1}$.

En combinant ce résultat au précédent, on obtient, dans le cas des revêtements de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{t_1, \dots, t_r\}$, une correspondance bijective entre

l'ensemble des revêtements		l'ensemble des r-uplets transitifs
connexes de degré d de	et	$(g_1, \dots, g_r) \in (S_d)^r$ tels que
$\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{t_1, \dots, t_r\}$		$g_1 \cdots g_r = 1$
modulo l'équivalence		modulo conjugaison (composante par
des revêtements		composante) par des éléments de S_d.

La correspondance $f \to \phi$ est fournie par la *monodromie* : étant donnée une classe de lacets $[\gamma] \in \pi_1(\mathcal{B}, t_o)$ et un point $x \in f^{-1}(t_o)$, il existe un unique relèvement de γ à un chemin sur $\mathcal{X}$ commençant en x. Ce chemin se termine en un point $y \in f^{-1}(t_o)$. On a construit de cette façon une permutation de la fibre $f^{-1}(t_o)$, qui, après numérotation de cette fibre, donne l'élément $\phi([\gamma]) \in S_d$. Le *groupe de monodromie* est le sous-groupe de S_d de toutes les permutations obtenues de cette façon, *i.e.*, le groupe $\phi(\pi_1(\mathcal{B}, t_o))$.

Correspondances :

• $\deg(f) \overset{\text{déf}}{=} \operatorname{card}\left(f^{-1}(t_o)\right)$	$=$	d
• groupe de monodromie $\mathrm{G}(f)$	$\simeq$	$G \overset{\text{déf}}{=} \phi(\pi_1(\mathcal{B}, t_o))$
• gpe d'automorphismes $\mathrm{Aut}(f)$	$\simeq$	$\mathrm{Cen}_{S_d}(G)$
• f revêtement galoisien		
i.e. $\lvert\mathrm{Aut}(f)\rvert = d$	ssi	$\lvert\mathrm{Cen}_{S_d}(G)\rvert = d$
ssi	l'action	de
$\mathrm{Aut}(f)$ sur $f^{-1}(t_o)$		$\mathrm{Cen}_{S_d}(G)$ sur $\{1, \dots, d\}$
est transitive	(et libre)	et alors
$\mathrm{Aut}(f)$	$\simeq$	$\mathrm{Cen}_{S_d}(G)$
$\mid\wr$ anti		$\mid\wr$ anti
$\mathrm{G}(f)$	$\simeq$	$G\ (= \mathrm{Nor}_G(G(1))/G(1)\ )$

(où $G(1) \subset G$ est le fixateur de 1 dans la représentation $G \hookrightarrow S_d$).

Cette section fournit en particulier le résultat suivant.

Corollaire. — *Pour tout groupe fini* G*, si* r *est un entier* $> \mathrm{rg}(G)$ *et* $t_1, \dots, t_r$ *sont* r *points distincts dans* $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$*, alors* G *est groupe de monodromie et groupe d'automorphismes d'un revêtement topologique galoisien de* $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{t_1, \dots, t_r\}$*.*

Démonstration. — L'action par translation à gauche de G sur lui-même fournit un plongement $G \hookrightarrow S_d$ (la représentation régulière de G). Si $r > \mathrm{rg}(G)$, il existe un r-uplet $(g_1, \ldots, g_r)$ dont les composantes engendrent G et sont de produit égal à 1. Le centralisateur $\mathrm{Cen}_{S_d}(G)$ est anti-isomorphe à G ; la correspondance est donnée par l'action par translation *à droite* par les éléments de G. Il s'agit d'une action transitive (et libre). D'après les correspondances ci-dessus, ces données permettent de construire un revêtement comme dans l'énoncé. □

Comme pour les revêtements algébriques, on a un *invariant lié à la ramification* pour les revêtements topologiques de $\mathcal{B} = \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{t_1, \ldots, t_r\}$. On appelle *cycles de ramification* les permutations $g_1, \ldots, g_r$ de la fibre $f^{-1}(t_o)$ induites par monodromie le long de $\gamma_1, \ldots, \gamma_r$ respectivement, c'est-à-dire, $g_i = \phi(\gamma_i)$, $i = 1, \ldots, r$. Ces cycles dépendent du choix des générateurs $\gamma_1, \ldots, \gamma_r$ mais on peut voir que leurs classes de conjugaisons n'en dépendent pas ; on les note $C_1^{\mathrm{top}}, \ldots, C_r^{\mathrm{top}}$. On peut d'ailleurs définir les classes C_i^{top} de façon plus intrinsèque. Il existe, dans le groupe $\pi_1(\mathcal{B}, t_o)$, une classe de conjugaison des lacets « tournant une fois autour de t_i dans le sens direct ». Si $D_i \subset \mathcal{B}$ est un petit disque autour de t_i, le plongement $D_i \setminus \{t_i\} \hookrightarrow \mathcal{B} = \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{t_1, \ldots, t_r\}$ fournit un homomorphisme $\pi_1(D_i \setminus \{t_i\}) \to \pi_1(\mathcal{B})$. La classe « tourner une fois autour de t_i dans le sens direct » est la classe de conjugaison de l'image du générateur (orienté) du groupe monogène $\pi_1(D_i \setminus \{t_i\})$. La classe C_i^{top} est alors l'image de cette classe par la représentation $\phi : \pi_1(\mathcal{B}) \to S_d$. On appellera *invariant topologique de la ramification* le r-uplet

$$\mathbf{C}^{\mathrm{top}} = (C_1^{\mathrm{top}}, \ldots, C_r^{\mathrm{top}}).$$

Via les sections 2 et 3, la forme pratique du TER devient un résultat d'identification des notions de revêtement algébrique et de revêtement topologique. C'est sous cette forme que nous allons démontrer le TER. Le sens « topologique → algébrique » où on doit enrichir la structure est le plus profond. Nous commencerons par l'autre sens : « algébrique → topologique ».

4. D'algébrique à topologique

Données. — $\mathrm{f} : X \to \mathbb{P}^1$ revêtement algébrique sur $\mathbb{C}$ de

- groupe $G \hookrightarrow S_d$
- points de branchement $\{t_1, \ldots, t_r\}$
- invariant canonique de l'inertie $\mathbf{C}^{\mathrm{alg}} = (C_1^{\mathrm{alg}}, \ldots, C_r^{\mathrm{alg}})$

Posons : $\mathcal{B} = \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{t_1, \ldots, t_r\}$
$\mathcal{X} = X(\mathbb{C}) \setminus \mathrm{f}^{-1}(\mathcal{B})$
$f : \mathcal{X} \to \mathcal{B}$ restriction de f à $\mathcal{X}$.

***Théorème d'Existence de Riemann* (partie directe)**

(i) *$f : \mathcal{X} \to \mathcal{B}$ est un revêtement topologique.*

(ii) *$\mathcal{X}$ est connexe.*

(iii) $\mathrm{Aut}(f) \simeq \mathrm{Aut}(\mathrm{f})$

(iv) *f est un revêtement topologique galoisien ssi* f *est un revêtement algébrique galoisien.*

(v)
$$\begin{array}{ccc} \mathrm{G}(f) & \simeq & \mathrm{Gal}(\widehat{K(X)}/K(T)) \\ \mid\wr\,\mathrm{anti} & & \mid\wr\,\mathrm{anti} \\ \mathrm{Aut}(\widehat{f}) & \simeq & \mathrm{Aut}(\widehat{\mathrm{f}}) \end{array}$$

(vi) *Via l'isomorphisme* $\mathrm{G}(f) \simeq \mathrm{Gal}(\widehat{K(X)}/K(T))$, *les classes de conjugaison C_i^{top} et C_i^{alg} se correspondent l'une à l'autre, $i = 1, \ldots, r$.*

Démonstration. — L'assertion (i) résulte essentiellement du théorème des fonctions implicites. Localement, au voisinage de tout point $t_o \in \mathcal{B}$, f est du type suivant

$$\begin{array}{ccc} V \subset C : P(t,y) = 0 & & (t,y) \\ \Big\downarrow & & \Big\downarrow \\ U \subset \quad \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) & & t \end{array}$$

Ici U [resp. V] est un ouvert de Zariski de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ [resp. de la courbe affine $C : P(t,y) = 0$] où $P(T,Y) \in \mathbb{C}[T,Y]$ est irréductible et tel que $P(t_o, Y)$ a d racines distinctes simples. Le théorème des fonctions implicites fournit d sections $t \mapsto (t, y_i(t))$, $i = 1, \ldots, d$ avec $y_i(t)$ série formelle en $t - t_o$ convergente pour $|t - t_o|$ assez petit. Cela montre que f est une application analytique entre surfaces de Riemann (ouvertes), en particulier un revêtement.

Les autres assertions sont plus profondes. Leur preuve est reportée à la section 8. $\square$

5. De topologique à analytique compact

On commence ici le sens « topologique $\to$ algébrique » du TER. Partant d'un revêtement topologique de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{t_1, \ldots, t_r\}$, une première étape consiste à prolonger f au-dessus des points manquants pour obtenir un morphisme de surfaces de Riemann compactes.

Données. — $f : \mathcal{X} \to \mathcal{B}$ revêtement topologique de $\mathcal{B} = \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{t_1, \ldots, t_r\}$

- de groupe de monodromie $\mathrm{G}(f) = G \hookrightarrow S_d$
- d'invariant topologique de la ramification $\mathbf{C}^{\mathrm{top}} = (C_1^{\mathrm{top}}, \ldots, C_r^{\mathrm{top}})$.

Théorème de Complétion. — *Il existe un unique morphisme de surfaces de Riemann compactes (à isomorphisme analytique près) $\overline{f} : \overline{\mathcal{X}} \to \overline{\mathcal{B}}$ (où $\overline{\mathcal{B}} = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$) tel que* *la restriction* $\overline{f} : \overline{f}^{-1}(\mathcal{B}) \to \mathcal{B}$ *est équivalente à* $f : \mathcal{X} \to \mathcal{B}$ *comme revêtement topologique. De plus* $\overline{\mathcal{X}} \setminus \overline{f}^{-1}(\mathcal{B})$ *est fini. En particulier si* $\mathcal{X}$ *est connexe, alors* $\overline{\mathcal{X}}$ *l'est aussi.*

Théorème de Prolongement des Morphismes. — *Soient* $\overline{f} : \overline{\mathcal{X}} \to \overline{\mathcal{B}}$ *et* $\overline{f'} : \overline{\mathcal{X}'} \to \overline{\mathcal{B}}$ *deux revêtements analytiques compacts prolongeant les revêtements topologiques* $f : \mathcal{X} \to \mathcal{B}$ *et* $f' : \mathcal{X}' \to \mathcal{B}$ *respectivement. Soit* $\chi : \mathcal{X} \to \mathcal{X}'$ *un morphisme de revêtements topologiques (i.e.,* $f' \circ \chi = f$*). Alors* χ *se prolonge de façon unique en une application analytique* $\overline{\chi} : \overline{\mathcal{X}} \to \overline{\mathcal{X}'}$ *telle que* $\overline{f'} \circ \overline{\chi} = \overline{f}$.

Démonstration. — Voir annexe [De2], Ch. 4, § 1. L'idée principale est la suivante. Localement, autour de chaque point t_i, le revêtement f peut être vu comme un revêtement du disque unité épointé $D \setminus \{0\}$. Comme $\pi_1(D \setminus \{0\}) \simeq \mathbb{Z}$, il n'existe qu'un seul revêtement connexe de degré d donné de $D \setminus \{0\}$. Ce revêtement est l'application $z \to z^d$. Il se prolonge de façon évidente en un morphisme analytique $D \to D$: on envoie 0 sur 0. □

Dans les résultats précédents, la base $\mathcal{B} = \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{t_1, \ldots, t_r\}$ peut être plus généralement une surface de Riemann compacte privée d'un nombre fini de points.

6. D'analytique à algébrique

Le but de cette section est l'« algébrisation » de l'application analytique $\overline{f}$ construite ci-dessus à partir du revêtement topologique f, c'est-à-dire, la seconde étape de la partie « réciproque » du TER. En fait, on peut partir d'une application analytique $\overline{f} : \overline{\mathcal{X}} \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ générale : comme l'indique le premier énoncé ci-dessous, elle provient automatiquement d'un revêtement topologique.

Données. — $\overline{f} : \overline{\mathcal{X}} \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ application analytique non-constante sur une surface de Riemann compacte connexe (*i.e.* une fonction méromorphe sur $\overline{\mathcal{X}}$).

Analytique → Topologique

(a) *Il n'y a qu'un nombre fini de points* $t_1, \ldots, t_r \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ *où l'application* $\overline{f}$ *est ramifiée.*

(b) *Si* $\mathcal{B} = \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{t_1, \ldots, t_r\}$ *et* $\mathcal{X} = \overline{f}^{-1}(\mathcal{B})$*, alors l'application* $\overline{f}$ *induit un revêtement topologique fini* $f : \mathcal{X} \to \mathcal{B}$.

Démonstration. — *Cf.* annexe [De2], Ch. 4, Th. 2.3. Il faut comprendre ici « $\overline{f}$ ramifiée » au sens de l'analyse complexe : *via* des cartes, l'application $\overline{f}$ est donnée localement au voisinage de tout point $x_o \in \overline{\mathcal{X}}$ par des séries entières convergentes $\sum_{n \geqslant 0} a_n z^n$ (z est un paramètre local en x_o) ; le point x_o est *ramifié* si $a_1 = 0$. Pour le (b), on montre que la restriction $f : \mathcal{X} \to \mathcal{B}$ de $\overline{f}$ est propre (*i.e.*, l'image réciproque d'un compact est un compact) ; combiné au fait que f est non-ramifié, cela entraîne que f est un revêtement topologique fini (annexe [De2], Ch. 4, Th. 2.1). $\square$

Pour l'algébrisation, on introduit l'ensemble $M(\overline{\mathcal{X}})$ des fonctions méromorphes sur $\overline{\mathcal{X}}$; $M(\overline{\mathcal{X}})$ est un corps (car $\overline{\mathcal{X}}$ est connexe) qui contient $\overline{f}$.

***Théorème d'Existence de Riemann* (réciproque)**

(i) $\left[M(\overline{\mathcal{X}}) : \mathbb{C}(\overline{f})\right] = \deg(f)$

(ii) $\mathrm{Aut}(f) \underset{\text{anti}}{\simeq} \mathrm{Aut}(M(\overline{\mathcal{X}}) / \mathbb{C}(\overline{f}))$

(iii) $M(\overline{\mathcal{X}}) / \mathbb{C}(\overline{f})$ *est une extension galoisienne de corps si et seulement si le revêtement topologique* f *est galoisien. Et dans ce cas* $\mathrm{Gal}(M(\overline{\mathcal{X}}) / \mathbb{C}(\overline{f})) \simeq \mathrm{G}(f)$

(iv) *Le revêtement algébrique* $\mathrm{f} : X \to \mathbb{P}^1$ *associé à l'extension de corps* $M(\overline{\mathcal{X}}) / \mathbb{C}(\overline{f})$ *(par le procédé de normalisation) induit un revêtement topologique de* $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{t_1, \ldots, t_r\}$ *qui est équivalent au revêtement* $f : \mathcal{X} \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{t_1, \ldots, t_r\}$.

La preuve de ce résultat est expliquée dans la section 9.

7. Preuve du Théorème d'Existence de Riemann premier point

Le lemme démontré ici sera utilisé dans les deux parties, directe et réciproque, du TER.

Lemme. — *Pour toute fonction méromorphe* $\overline{f} : \overline{\mathcal{X}} \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ *non constante sur une surface de Riemann connexe compacte* $\overline{\mathcal{X}}$, *on a*

$$\left[M(\overline{\mathcal{X}}) : \mathbb{C}(\overline{f})\right] \leqslant \deg(f)$$

où f *désigne le revêtement topologique induit.*

Démonstration. — *Cf.* annexe [De2], Ch. 4, Lemme 2.5. Par un résultat standard d'algèbre, il suffit de montrer que toute fonction méromorphe $\overline{g} \in M(\overline{\mathcal{X}})$ est algébrique sur le corps $\mathbb{C}(\overline{f})$ de degré $\leqslant d = \deg(f)$. La situation est la suivante :

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) & \xleftarrow[\overline{g}]{} & \overline{\mathcal{X}} & & \{x_1, \ldots, x_d\} \\ & & {\scriptstyle \overline{f}}\downarrow & & \downarrow \\ & & \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) & & t \end{array}$$

L'idée est de considérer les « fonctions symétriques » :

$$\sigma_1(t) = \sum_{x \in \overline{f}^{-1}(t)} \overline{g}(x) \qquad , \ldots , \qquad \sigma_d(t) = \prod_{x \in \overline{f}^{-1}(t)} \overline{g}(x)$$

Celles-ci sont *a priori* définies pour tout $t \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ tel que, pour tout $x \in \overline{f}^{-1}(t)$, f non ramifié en x et $\overline{g}(x) \neq \infty$. Mais on montre que ces fonctions peuvent être prolongées en des fonctions méromorphes sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. D'après le résultat classique suivant (*Cf.* annexe [De2], Ch. 4, Th. 2.6), $\sigma_1, \ldots, \sigma_d$ sont des fractions rationnelles.

Sous-lemme. — *Le corps $M(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}))$ des fonctions méromorphes sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ est isomorphe au corps $\mathbb{C}(T)$ des fractions rationnelles en une indéterminée T.*

Cela conclut la preuve du lemme puisque par construction, on a

$$\overline{g}^d - \sigma_1(\overline{f})\overline{g}^{d-1} + \cdots + (-1)^d \sigma_d(\overline{f}) = 0.$$

8. Preuve du Théorème d'Existence de Riemann partie directe

Cf. annexe [De2] Ch. 4, § 2.5. Les conclusions à démontrer concernent le revêtement topologique f déduit par restriction d'un revêtement algébrique donné f :

$$\begin{array}{ccccc} X & & & \mathcal{X} = X(\mathbb{C}) \setminus \mathrm{f}^{-1}(\mathcal{B}) & \\ {\scriptstyle \mathrm{f}}\Big\downarrow & \text{rev. alg.} & \longrightarrow & f \Big\downarrow & \text{rev. top.} \\ \mathbb{P}^1 & & & \mathcal{B} = \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{t_1, \ldots, t_r\} & \end{array}$$

• Soit $\mathcal{C}$ une composante connexe de $\mathcal{X}$ et $\overline{\mathcal{C}}$ l'adhérence de $\mathcal{C}$ dans $X(\mathbb{C})$. La fonction f induit une fonction méromorphe non constante $\mathrm{f} : \overline{\mathcal{C}} \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ sur la surface de Riemann compacte connexe $\overline{\mathcal{C}}$. Le lemme de la section 7 donne $[M(\overline{\mathcal{C}}) : \mathbb{C}(\mathrm{f})] \leqslant \deg(f|_{\mathcal{C}}) \leqslant \deg(\mathrm{f})$. Combiné à $[M(\overline{\mathcal{C}}) : \mathbb{C}(\mathrm{f})] \geqslant \deg(\mathrm{f})$ (provenant de $\mathbb{C}(X) \subset M(\overline{\mathcal{C}})$), cela fournit :

$$[M(\overline{\mathcal{C}}) : \mathbb{C}(\mathrm{f})] = \deg(f|_{\mathcal{C}}) = \deg(f) = \deg(\mathrm{f}) = [\mathbb{C}(X) : \mathbb{C}(\mathrm{f})]$$

On conclut que :
– $\mathcal{C} = \mathcal{X}$ est connexe (*i.e.* l'assertion (i))
– $M(\overline{\mathcal{X}}) \simeq \mathbb{C}(X)$

Cette seconde conclusion permet de « boucler la boucle » : le procédé d'algébrisation, appliqué au revêtement topologique f de cette section, redonne bien le revêtement algébrique f de départ.

• Le morphisme de restriction $\mathrm{Aut}(\mathrm{f}) \to \mathrm{Aut}(f)$ est injectif. De même l'homomorphisme

$$\begin{cases} \mathrm{Aut}(f) \longrightarrow \mathrm{Aut}\left(M(\overline{\mathcal{X}}) / \mathbb{C}(\overline{f})\right) \ (\simeq \mathrm{Aut}\,(\mathbb{C}(X) / \mathbb{C}(T))) \\ \quad \chi \quad \longmapsto \quad \chi^* : g \mapsto g \circ \overline{\chi} \end{cases}$$

En effet, soit $\chi \neq 1 \in \mathrm{Aut}(f)$. On choisit $x \in \mathcal{X} \subset X(\mathbb{C})$ de telle façon qu'on connaisse une fonction $\overline{g} \in \mathbb{C}(X)$ qui sépare les points de $f^{-1}(f(x))$; cela est facilement réalisable. On a $\chi(x) \neq x$ pour tout $x \in \mathcal{X}$ (l'action de $\mathrm{Aut}(f)$ est libre). En particulier, $\overline{g}(x) \neq \overline{g}(\chi(x))$, d'où $\chi^*(\overline{g}) \neq g$.

Cela permet de conclure que

– $\mathrm{Aut}(f) \simeq \mathrm{Aut}(\mathrm{f})$

– f est un revêtement topologique galoisien ssi f est un revêtement algébrique galoisien.

– $\mathrm{G}(f) \simeq \mathrm{Gal}(\widehat{\mathbb{C}(X)}/\mathbb{C}(T))$

ce qui correspond aux assertions (iii), (iv) et (v).

• Reste à expliquer la correspondance « cycles de ramification/générateurs de l'inertie » énoncée dans l'assertion (vi). Précisons l'isomorphisme $\mathrm{G}(f) \simeq \mathrm{Gal}(\widehat{\mathbb{C}(X)}/\mathbb{C}(T))$. Les éléments $\phi_{t_o}(\gamma)$ (avec $\gamma \in \pi_1(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{t_1, \ldots, t_r\})$ agissent sur les *points* de la fibre $f^{-1}(t_o)$, *via* la propriété de *relèvement des chemins*. À ces éléments $\phi_{t_o}(\gamma) \in G(f)$ correspondent, dans l'isomorphisme ci-dessus, des éléments de $\mathrm{Gal}(\widehat{\mathbb{C}(X)}/\mathbb{C}(T))$ qui agissent sur les *fonctions* dans $\widehat{\mathbb{C}(X)}$, par *prolongement analytique*. Pour $\gamma = \gamma_i$ un chemin « tournant une fois » autour de t_i, les éléments qu'on obtient sont bien, à conjugaisons près, ceux de C_i^{top} et C_i^{alg} respectivement, $i = 1, \ldots, r$. □

9. Preuve du Théorème d'Existence de Riemann réciproque

Cf. annexe [De2] Ch. 4, § 2.3. Les conclusions à démontrer concernent le corps des fonctions méromorphes d'une surface de Riemann compacte connexe $\overline{\mathcal{X}}$ donnée comme revêtement analytique de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$:

$$\begin{array}{ccccc} \overline{\mathcal{X}} & & & & M(\overline{\mathcal{X}}) \\ {\scriptstyle \overline{f}}\big\downarrow & \text{rev. anal.} & \longrightarrow & & \big\uparrow \ \text{ext. de corps de fonctions} \\ \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) & & & & \mathbb{C}(\overline{f}) \end{array}$$

Comme pour la partie directe, la preuve utilise l'existence d'une fonction méromorphe séparant certains points. Nous devons ici invoquer le résultat suivant, qui est une conséquence (profonde) du théorème de Riemann-Roch sur les surfaces de Riemann. Nous renvoyons aux ouvrages classiques du domaine (voir bibliographie).

***Théorème d'Existence de Riemann* (forme analytique)**. — *Soit $\mathcal{S}$ une surface de Riemann connexe et $x_1, \ldots, x_d$ d points distincts sur $\mathcal{S}$. Alors il existe $\overline{g} \in M(\mathcal{S})$ tel que les valeurs $\overline{g}(x_1), \ldots, \overline{g}(x_d)$ sont deux à deux distinctes.*

• L'assertion (i), *i.e.* $\big[M(\overline{\mathcal{X}}) : \mathbb{C}(\overline{f})\big] = \deg(f)$ en résulte aussitôt. En effet, en utilisant une fonction $\overline{g} \in M(\overline{\mathcal{X}})$ qui sépare les points $x_1, \ldots, x_d$ d'une fibre non ramifiée $f^{-1}(t_o)$, on obtient que toute équation polynomiale $P(\overline{f}(x), \overline{g}(x)) = 0$ satisfait $\deg_{\overline{g}}(P) \geqslant \deg(f)$ (la substitution $x = x_i$ donne $P(t_o, \overline{g}(x_i)) = 0$). Cela fournit $\big[M(\overline{\mathcal{X}}) : \mathbb{C}(\overline{f})\big] \geqslant \deg(f)$. L'inégalité inverse a déjà été établie (*cf.* section 7).

• D'après le théorème de prolongement des morphismes de la section 5, tout automorphisme $\chi \in \mathrm{Aut}(f)$ se prolonge de façon unique en un automorphisme analytique

$\overline{\chi} : \overline{\mathcal{X}} \to \overline{\mathcal{X}}$, lequel vérifie $\overline{f} \circ \overline{\chi} = \overline{f}$. De façon similaire au deuxième point de la preuve de la partie directe, mais en utilisant ici la forme analytique du TER, on montre que l'homomorphisme

$$\begin{cases} \mathrm{Aut}(f) \longrightarrow \mathrm{Aut}\left(M(\overline{\mathcal{X}})\,/\,\mathbb{C}(\overline{f})\right) \\ \quad \chi \quad \longmapsto \quad \chi^* : g \mapsto g \circ \overline{\chi} \end{cases}$$

est injectif. On conclut que :

– si le revêtement topologique f est galoisien alors l'extension $M(\overline{\mathcal{X}})/\mathbb{C}(\overline{f})$ est galoisienne

– et dans ce cas $\quad \mathrm{Gal}(M(\overline{\mathcal{X}})/\mathbb{C}(\overline{f})) \simeq \mathrm{G}(f)$

Remarque. — On a obtenu ici seulement la moitié de l'assertion (iii). Cette moitié, combinée au corollaire de la section 3, suffit cependant pour le problème inverse de Galois sur $\mathbb{C}(T)$. En particulier, le passage par le cadre géométrique des revêtements algébriques n'est pas nécessaire pour cette partie. Au contraire, la seconde moitié de (iii) et l'énoncé (iv) (qui boucle la boucle) utilisent la normalisation des courbes.

• Le procédé de normalisation fournit un revêtement algébrique f : $X \to \mathbb{P}^1$ tel que $\mathbb{C}(X) \simeq M(\overline{\mathcal{X}})$ au-dessus de $\mathbb{C}(\overline{f})$. D'après la partie directe du TER, on a aussi $\mathbb{C}(X) = M(X(\mathbb{C}))$. Les deux surfaces de Riemann $X(\mathbb{C})$ et $\overline{\mathcal{X}}$ ont donc des corps de fonctions méromorphes conjugués sur $\mathbb{C}(\overline{f})$. Les deux revêtement analytiques $X(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ et $\overline{\mathcal{X}} \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ sont alors nécessairement analytiquement équivalents ; on utilise ici un lemme classique selon lequel les points d'une surface de Riemann compacte connexe sont en bijection avec les valuations normalisées sur le corps de ses fonctions méromorphes (par la correspondance $x \to \mathrm{ord}_x(-)$) ; nous renvoyons aux ouvrages donnés en bibliographie. En particulier, les revêtements topologiques de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{t_1, \ldots, t_r\}$ induits par ces revêtements analytiques sont équivalents. Cela démontre (iv).

• L'isomorphisme $\mathrm{Aut}(M(\overline{\mathcal{X}})/\mathbb{C}(\overline{f})) \to$ Aut(f) (obtenu par normalisation), composé avec le morphisme de restriction Aut(f) $\to \mathrm{Aut}(f)$ fournit un homomorphisme

$$\mathrm{Aut}(M(\overline{\mathcal{X}})/\mathbb{C}(\overline{f})) \to \mathrm{Aut}(f)$$

qui est injectif. En utilisant ce qui déjà été prouvé, on obtient les isomorphismes suivants, et en particulier, l'assertion (ii) :

$$\mathrm{Aut}(M(\overline{\mathcal{X}})/\mathbb{C}(\overline{f})) \underset{\text{anti}}{\simeq} \mathrm{Aut}(f) \underset{\text{anti}}{\simeq} \mathrm{G}(f).$$

10. Théorème d'Existence de Riemann (forme catégorique)

Les arguments développés dans les sections précédentes permettent en fait de démontrer qu'étant donné $\boldsymbol{t} = \{t_1, \ldots, t_r\} \subset \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, les catégories suivantes sont équivalentes :

• [(au sein de la catégorie des) *Corps de degré de transcendance* 1 *sur* $\mathbb{C}$]
Extensions finies de $\mathbb{C}(T)$ ramifiées seulement au-dessus de $\boldsymbol{t}$
& $\mathbb{C}(T)$-isomorphismes de corps

• [*Courbes irréductibles projectives lisses sur* $\mathbb{C}$]
Revêtements algébriques finis de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ ramifiés seulement au-dessus de $\boldsymbol{t}$
& morphismes de revêtements algébriques

• [*Surfaces de Riemann connexes compactes*]
Revêtements analytiques de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ ramifiés seulement au-dessus de $\boldsymbol{t}$
& morphismes de revêtements analytiques

• [*Espaces topologiques connexes*]
Revêtements topologiques finis de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \mathbf{t}$
& morphismes de revêtements topologiques

• [*Représentations transitives de groupes fondamentaux*]
Représentations transitives de $\pi_1(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \boldsymbol{t})$ dans un groupe symétrique
& applications compatibles entre ensemble finis

• [*r-uplets d'éléments d'un groupe fini*]
r-uplets de permutations de produit égal à 1 et engendrant un sous-groupe transitif
& applications compatibles entre ensemble finis

11. Théorème d'Existence de Riemann (généralisation)

Le théorème d'existence de Riemann se généralise sous certaines conditions aux revêtements d'une *variété algébrique* de dimension supérieure. Les énoncés donnés ci-dessous se situent dans ce contexte (sans être les plus généraux). Le théorème de Grauert-Remmert [SGA1] généralise le théorème de complétion de la section 5. Le principe GAGA, dû à Serre [Se2], étend les résultats de la section 6.

Données :

- B une variété projective régulière irréductible définie sur $\mathbb{C}$
- D un fermé de B.

On pose $\overline{\mathcal{B}} = B(\mathbb{C})$ et $\mathcal{B} = (B \setminus D)(\mathbb{C})$.

Théorème de Grauert-Remmert. — *Soit $\mathcal{X} \to \mathcal{B}$ un revêtement topologique de $\mathcal{B}$. Alors il existe un unique revêtement analytique ramifié (à isomorphisme analytique près)*

$$\overline{f} : \overline{\mathcal{X}} \to \overline{\mathcal{B}}$$

tel que la restriction $\overline{f} : \overline{f}^{-1}(\mathcal{B}) \to \mathcal{B}$ est équivalente à $f : \mathcal{X} \to \mathcal{B}$ comme revêtement topologique.

Principe GAGA. — *Tout faisceau analytique cohérent sur $\overline{\mathcal{B}}$ est algébrique, et sa cohomologie algébrique coïncide avec sa cohomologie analytique.*

Corollaire. — *Soit $f : \mathcal{X} \to \mathcal{B}$ un revêtement topologique. Alors il existe un revêtement algébrique ramifié $\mathrm{f} : X \to B$ (avec X une variété normale et irréductible) tel que le revêtement topologique induit $X(\mathbb{C}) \to \mathcal{B}$ est équivalent à $f : \mathcal{X} \to \mathcal{B}$.*

12. De $\mathbb{C}$ à $\overline{\mathbb{Q}}$

Le revêtement algébrique $\mathrm{f} : X \to \mathbb{P}^1$ qu'on obtient à partir d'un revêtement topologique est *a priori* défini sur $\mathbb{C}$. Nous expliquons dans cette section comment utiliser le théorème d'existence de Riemann pour obtenir un revêtement défini sur $\overline{\mathbb{Q}}$ et résoudre en particulier le problème inverse de Galois sur $\overline{\mathbb{Q}}(T)$. La preuve que nous donnons s'inspire de la preuve du Lemme 1.2 de [Fr].

Données :

$$\begin{array}{ccccc} X & & & & E \\ \mathrm{f}\big\downarrow & \begin{array}{c}\text{revêtement algébrique}\\ \text{défini sur } \mathbb{C}\end{array} & \longleftrightarrow & \big\uparrow & \begin{array}{c}\text{extension finie}\\ \text{de corps}\end{array} \\ \mathbb{P}^1 & & & & \mathbb{C}(T) \end{array}$$

Théorème. — *Si les points de branchement $t_1, \ldots, t_r$ sont dans $\mathbb{P}^1(\overline{\mathbb{Q}})$, alors le revêtement f est défini sur $\overline{\mathbb{Q}}$, ou, de façon équivalente, l'extension $E/\mathbb{C}(T)$ provient par extension des scalaires d'une extension $E_o/\overline{\mathbb{Q}}(T)$. De plus, les automorphismes de l'extension $E/\mathbb{C}(T)$ induisent par restriction des automorphismes de l'extension $E_o/\overline{\mathbb{Q}}(T)$. En particulier, si $E/\mathbb{C}(T)$ est galoisien, $E_o/\overline{\mathbb{Q}}(T)$ l'est aussi et* $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{C}(T)) = \mathrm{Gal}(E_o/\overline{\mathbb{Q}}(T))$.

Démonstration

• f peut être défini, par exemple par une équation affine $P(z_1, \ldots, z_s, \theta, t, y) = 0$, sur une extension de type fini $\overline{\mathbb{Q}}(z_1, \ldots, z_s, \theta)$ de $\overline{\mathbb{Q}}$, où $z_1, \ldots, z_s$ sont algébriquement indépendants sur $\overline{\mathbb{Q}}$ (et donc peuvent être vus comme indéterminées) et θ est solution d'une équation polynomiale $h(z_1, \ldots, z_s, \theta) = 0$.

• Pour tout $s+1$-uplet $(z_1^o, \ldots, z_s^o, \theta^o) \in \mathbb{C}^{s+1}$ tel que $h(z_1^o, \ldots, z_s^o, \theta^o) = 0$ sauf éventuellement dans un fermé de Zariski Z, l'équation $P(z_1^o, \ldots, z_s^o, \theta^o, t, y) = 0$ définit un revêtement de $\mathbb{P}^1$ (théorème de Bertini).

• Tous ces revêtements de $\mathbb{P}^1$ ont mêmes points de branchement (à savoir $t_1, \ldots, t_r$) et même monodromie (calculée relativement au même choix de lacets $\gamma_1, \ldots, \gamma_r$ engendrant $\pi_1(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{t_1, \ldots, t_r\})$; pour le second point, noter que la monodromie varie continûment en fonction du point $(z_1^o, \dots, z_s^o, \theta^o)$ et est à valeurs dans un ensemble fini.

• Du point précédent résulte que les revêtements *topologiques* induits par les équations $P(z_1^o, \dots, z_s^o, \theta^o, t, y) = 0$ sont équivalents. Par le théorème d'existence de Riemann, les revêtements *algébriques* associés sont équivalents ; c'est-à-dire, la famille de revêtements $P(z_1, \dots, z_s, \theta, t, y) = 0$ est *constante*. En particulier, soit $(z_1^o, \dots, z_s^o, \theta^o)$ une solution hors du fermé Z de $h(z_1, \dots, z_s, \theta) = 0$ à coordonnées dans $\overline{\mathbb{Q}}$ (il en existe). Le revêtement de départ f (qui correspond à une certaine spécialisation dans $\mathbb{C}$ de $(z_1, \dots, z_s, \theta)$) est isomorphe comme revêtement algébrique (sur $\mathbb{C}$) au revêtement f_o induit par l'équation $P(z_1^o, \dots, z_s^o, \theta^o, t, y) = 0$. Par construction, le revêtement f_o est défini sur $\overline{\mathbb{Q}}$.

• Soit χ un automorphisme du revêtement algébrique $\mathrm{f} : X \to \mathbb{P}^1$. Notons $\mathrm{f}_o : X_o \to \mathbb{P}^1_{\overline{\mathbb{Q}}}$ le $\overline{\mathbb{Q}}$-modèle de f obtenu ci-dessus. Similairement à ce qui précède, on peut voir χ comme une *famille*, paramétrée par une $\overline{\mathbb{Q}}$-variété irréductible V, d'automorphismes de la famille (constante) $\mathrm{f}_o \times_{\overline{\mathbb{Q}}} V$. Pour tout $\mathbf{v} \in V(\overline{\mathbb{Q}})$ hors d'un fermé de Zariski, la spécialisation $\chi_{\mathbf{v}}$ de χ en $\mathbf{v}$ induit un automorphisme du revêtement f_o. Cela montre le second point du théorème concernant les automorphismes. □

Références

[De1] P. Dèbes, *Théorie de Galois et géométrie — une introduction*, ce volume.

[De2] P. Dèbes, *Revêtements topologiques*, ce volume, annexe.

[DoDo] R. Douady et A. Douady, *Algèbre et théories galoisiennes*, Cassini, 3ème edition, (2000).

[FaKa] H. Farkas and I. Kra, *Riemann Surfaces*, GTM 71, Springer-Verlag, (1980).

[Fo] O. Forster, *Lectures on Riemann Surfaces*, GTM 81, Springer-Verlag, (1980).

[Fr] M. Fried, *Fields of definition of function fields and Hurwitz families–Groups as Galois groups*, Comm. Algebra **5/1**, (1977), 17-82.

[Ha] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, GTM 52, Springer-Verlag, (1977).

[SGA1] A. Grothendieck, SGA1, *Revêtements étales et groupe fondamental*, LNM 224, Springer-Verlag, (1970).

[Re] E. Reyssat, *Quelques aspects des surfaces de Riemann*, Birkhauser, (1989).

[Se1] J-P. Serre, *Topics in Galois Theory*, Research Notes in Mathematics 1, Jones and Bartlett publishers, (1992).

[Se2] J-P. Serre, *Géométrie algébrique et géométrie analytique*, Ann. Inst. Fourier, **6**, (1956), 1–42 (= Collected Papers no. 32).

[Vo] H. Völklein, *Groups as Galois Groups*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 53, Cambridge University Press, (1996).

P. Dèbes, Université de Lille I, Mathématiques, 59655 Villeneuve d'Ascq Cedex, France
E-mail : Pierre.Debes@univ-lille1.fr