Surveys in Mathematics and its Applications

ISSN 1842-6298 (electronic), 1843-7265 (print)
Volume 14 (2019), 231 – 259

RÉALISATION DU FLOT GÉODÉSIQUE SUR LE GROUPE $SO(n)$ COMME FLOT SUR DES ORBITES DE KOTANT-KIRILLOV

(REALIZATION OF GEODESIC FLOW ON THE GROUP $SO(n)$ AS A FLOW ON KOSTANT-KIRILLOV ORBITS)

Ahmed Lesfari

Abstract. The aim of this paper is to realize the geodesic flow on the group $SO(n)$ as a flow on the Kostant-Kirillov orbits. We study the adjoint and coadjoint orbits of a Lie group with an application in the case of the orthogonal special group $SO(n)$. We will see how to explicitly determine a symplectic structure in the orbit of the coadjoint representation of a Lie group. Special attention is given to the groups $SO(3)$ and $SO(4)$.

1 Généralités

On a rassemblé dans cette section quelques notions sur divers thèmes, à la fois pour leurs intérêts propres et parce que cela conduit à clarifier un certain nombre de résultats obtenus dans ce papier. Pour de plus amples information, on pourra consulter avec profit [2, 3, 4, 5, 7, 10, 13, 15, 16, 17, 18, 19].

Soit M une variété différentiable de dimension paire. Une structure symplectique (ou forme symplectique) sur M est une 2-forme différentielle ω fermée, c.-à-d., $d\omega = 0$ et partout non dégénérée, c.-à-d.,

$$\forall p \in M, \quad \forall \xi \neq 0, \quad \exists \eta : \omega(\xi, \eta) \neq 0, \quad (\xi, \eta \in T_pM),$$

où T_pM est l'espace tangent à M au point p. Le couple (M, ω) (ou simplement M) s'appelle variété symplectique. Dès lors, en un point $p \in M$, on dispose d'une forme bilinéaire antisymétrique non dégénérée sur l'espace tangent T_pM, ce qui explique que la dimension de la variété M est paire.

2010 Mathematics Subject Classification: 53D05; 53D30.
Keywords: Symplectic manifolds; Symplectic structures.

Exemple 1. *L'espace $M=\mathbb{R}^{2m}$ muni de la 2-forme*

$$\omega=\sum_{k=1}^{m}dx_k\wedge dy_k,$$

(où $x_1,...,x_m,y_1,...,y_m$ sont des coordonnées locales) est une variété symplectique. Les vecteurs

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p,...,\left(\frac{\partial}{\partial x_m}\right)_p,\left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right)_p,...,\left(\frac{\partial}{\partial y_m}\right)_p,\quad p\in M,$$

constituent une base symplectique de l'espace tangent T_pM. De même, l'espace $\mathbb{C}^m$ (coordonnées $z_1,...,z_m$), muni de la forme

$$\omega=\frac{i}{2}\sum_{k=1}^{m}dz_k\wedge d\overline{z}_k,$$

est une variété symplectique. Notons que cette forme coincide avec celle ci-dessus moyannant l'identification $\mathbb{C}^m\simeq\mathbb{R}^{2m}$, $z_k=x_k+iy_k$.

Rappelons que si M est une variété différentiable de dimension m, alors il existe sur son fibré tangent $TM=\bigcup_{p\in M}T_pM$ (c.-à-d., la réunion des espaces tangents à M en p), une structure de variété différentiable de dimension paire $2m$ et il nous permet de transporter imméditement aux variétés toute la théorie des équations différentielles ordinaires. Rappelons aussi que l'espace cotangent à M en p, noté T_p^*M, est l'espace dual de T_pM (c.-à-d., l'ensemble de toutes les formes linéaires sur T_pM) et que le fibré cotangent, noté T^*M, est défini comme l'union de tous les espaces cotangents à la variété M. On montre que le fibré cotangent T^*M possède une structure symplectique et dans les coordonnées locales $(x_1,\ldots,x_m,y_1,\ldots,y_m)$, cette structure est donnée par $\omega=\sum_{k=1}^{m}dx_k\wedge dy_k$. Les espaces de phases des systèmes Hamiltoniens étudiés plus loin sont des variétés symplectiques et souvent ce sont des fibrés cotangents équipés de la structure canonique.

Proposition 2. *Soit*

$$I:T_x^*M\longrightarrow T_xM,\quad \omega_\xi^1\longmapsto\xi,$$

une application telle que :

$$\omega_\xi^1(\eta)=\omega(\eta,\xi),\quad\forall\eta\in T_xM.$$

Alors I est l'isomorphisme engendré par la forme symplectique ω.

Démonstration: Soit

$$I^{-1} : T_xM \longrightarrow T_x^*M, \quad \xi \longmapsto I^{-1}(\xi) \equiv \omega_\xi^1,$$

l'application définie par

$$I^{-1}(\xi)(\eta) = \omega_\xi^1(\eta) = \omega(\eta, \xi),\ \forall \eta \in T_xM.$$

Comme ω est bilinéaire, on a évidemment

$$I^{-1}(\xi_1 + \xi_2)(\eta) = I^{-1}(\xi_1)(\eta) + I^{-1}(\xi_2)(\eta),\ \forall \eta \in T_xM.$$

Pour montrer que l'application I^{-1} est bijective, il suffit de montrer qu'elle est injective puisque $\dim T_xM = \dim T_x^*M$. On a

$$KerI^{-1} = \{\xi \in T_xM : \omega(\eta, \xi) = 0,\ \forall \eta \in T_xM\} = \{0\},$$

car la forme ω est non-dégénérée. Donc I^{-1} est un isomorphisme et par conséquent, I est aussi un isomorphisme puisque on l'obtient par l'inverse d'un isomorphisme. La proposition est démontrée. □

Un champ de vecteurs (on dit aussi section du fibré tangent) sur M est une application, notée X, qui à tout point $x \in M$ associe un vecteur tangent $X_x \in T_xM$. Autrement dit, c'est une application $X : M \longrightarrow TM$, telle que si $\pi : TM \longrightarrow M$, est la projection naturelle, on ait $\pi \circ X = id_M$. Dans un système $(x_1, ..., x_m)$ de coordonnées locales dans un voisinage $U \subset M$, le champ de vecteurs X s'écrit sous la forme

$$X = \sum_{k=1}^{m} f_k(x) \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad x \in U,$$

où les fonctions $f_1, \ldots, f_m : U \longrightarrow \mathbb{R}$, sont les composantes de X par rapport à $(x_1, ..., x_m)$. Un champ de vecteurs X est différentiable si ses composantes $f_k(x)$ sont des fonctions différentiables. Cette définition de différentiabilité ne dépend pas évidemment du choix du système de coordonnées locales. Au champ de vecteurs X correspond un système d'équations différentielles

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, ..., x_m), \\ &\vdots \\ \frac{dx_m}{dt} &= f_m(x_1, ..., x_m). \end{aligned}$$

On suppose dans la suite que le champ de vecteurs X est différentiable (de classe $\mathcal{C}^\infty$) et à support compact, ce qui sera en particulier le cas si la variété M est compacte. Etant donné un point $x \in M$, on note $g_t^X(x)$ (ou $g_t(x)$) la position de x après un déplacement d'une durée $t \in \mathbb{R}$. On a ainsi une application

$$g_t^X : M \longrightarrow M, \quad t \in \mathbb{R},$$

qui est un difféomorphisme. Au champ de vecteurs X est lié un groupe à un paramètre de difféomorphismes g_t^X sur M, c.-à-d., une application différentiable (de classe $\mathcal{C}^\infty$) : $M \times \mathbb{R} \longrightarrow M$, vérifiant une loi de groupe :
(i) $\forall t \in \mathbb{R}$, $g_t^X : M \longrightarrow M$ est un difféomorphisme.
(ii) $\forall t, s \in \mathbb{R}, g_{t+s}^X = g_t^X \circ g_s^X$.

La condition ii) signifie que la correspondance $t \longmapsto g_t^X$, est un homomorphisme du groupe additif $\mathbb{R}$ dans le groupe des difféomorphismes de M dans M. Elle implique que l'on a $g_{-t}^X = \left(g_t^X\right)^{-1}$, car $g_0^X = id_M$ est la transformation identique qui laisse chaque point invariant. Ce groupe à un paramètre de difféomorphismes g_t^X sur M, s'appelle flot et il admet le champ de vecteurs X pour champ de vitesses

$$\frac{d}{dt} g_t^X(x) = X\left(g_t^X(x)\right),$$

avec la condition initiale : $g_0^X(x) = x$. Evidemment

$$\left.\frac{d}{dt} g_t^X(x)\right|_{t=0} = X(x).$$

Donc par ces formules $g_t^X(x)$ est la courbe sur la variété qui passe par x et telle que la tangente en chaque point est le vecteur $X\left(g_t^X(x)\right)$. Par ailleurs, on montre que le champ de vecteurs X est générateur d'un unique groupe à un paramètre de difféomorphismes de M.

On déduit de ce qui précède que la forme symplectique ω induit pour chaque fonction différentiable $H : M \longrightarrow \mathbb{R}$, appelée Hamiltonien, un champ de vecteurs Hamilonien

$$IdH : M \longrightarrow T_x M, \quad x \longmapsto IdH(x).$$

Autrement dit, le système différentiel défini par

$$\dot{x}(t) = X_H(x(t)) = IdH(x),$$

est un champ de vecteurs Hamilonien associé à la fonction H. Les champs de vecteurs Hamiltoniens forment une sous-algèbre de Lie de l'espace des champs de vecteurs. Notons que le flot g_t^X laisse invariante la forme symplectique ω.

Proposition 3. *La matrice associée à un système Hamiltonien forme une structure symplectique.*

Démonstration: Soit $(x_1, \ldots, x_m)$ un système de coordonnées locales sur M. On a

$$\dot{x}(t) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial H}{\partial x_k} I\left(dx_k\right) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial H}{\partial x_k} \xi^k, \tag{1.1}$$

où $I\left(dx_k\right) = \xi^k \in T_x M$ est défini de telle manière que :

$$\forall \eta \in T_x M, \quad \eta_k = dx_k(\eta) = \omega\left(\eta, \xi^k\right), \quad (k^{\text{ème}}\text{composante de } \eta).$$

En désignant par $(\eta_1, \ldots, \eta_m)$ et $\left(\xi_1^k, \ldots, \xi_m^k\right)$ les composantes de η et ξ^k respectivement, on obtient

$$\eta_k = \omega\left(\sum_{i=1}^m \eta_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \sum_{j=1}^m \xi_j^k \frac{\partial}{\partial x_j}\right) = (\eta_1, \ldots, \eta_m)\, J^{-1} \begin{pmatrix} \xi_1^k \\ \vdots \\ \xi_m^k \end{pmatrix},$$

où J^{-1} est la matrice définie par

$$J^{-1} \equiv \left(\omega\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right)\right)_{1\le i,j\le m}. \tag{1.2}$$

Cette matrice est inversible et on peut donc chercher ξ^k tel que :

$$J^{-1} \begin{pmatrix} \xi_1^k \\ \vdots \\ \xi_m^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \\ \vdots & \\ 0 & \\ 1 & \leftrightsquigarrow k^{\text{ème}} \text{ place} \\ 0 & \\ \vdots & \\ 0 & \end{pmatrix}.$$

D'où,

$$\begin{pmatrix} \xi_1^k \\ \vdots \\ \xi_m^k \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

avec $\xi^k = k^{\text{ème}}$ colonne de J, c'est-à-dire $\xi_i^k = J_{ik}$, $1 \le i \le m$. Par conséquent,

$$\xi^k = \sum_{i=1}^m J_{ik} \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

On montre aisément que la matrice J est antisymétrique et de (1.1) on déduit que :

$$\dot{x}(t) = \sum_{k=1}^m \frac{\partial H}{\partial x_k} \sum_{i=1}^m J_{ik} \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{k=1}^m J_{ik} \frac{\partial H}{\partial x_k}\right) \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

En écrivant

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^m \frac{dx_i(t)}{dt} \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^m \dot{x}_i(t) \frac{\partial}{\partial x_i},$$

on obtient l'équation :

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{k=1}^{m} J_{ik} \frac{\partial H}{\partial x_k}, \; 1 \leq i \leq j \leq m,$$

ou sous forme matricielle

$$\dot{x}(t) = J(x) \frac{\partial H}{\partial x},$$

et qui n'est autre que le champ Hamiltonien associé à la fonction H. $\square$

Soit (M, ω) une variété symplectique. A tout couple de fonctions différentiables (F, G) sur M, on associe la fonction

$$\{F, G\} = d_u F(X_G) = X_G F(u) = \omega(X_G, X_F),$$

où X_F et X_G sont les champs de vecteurs Hamiltoniens associés aux fonctions F et G respectivement. On dit que $\{F, G\}$ est le crochet de Poisson des fonctions F et G. On vérifie aisément que le crochet de Poisson, c.-à-d., l'application bilinéaire

$$\{,\} : \mathcal{C}^\infty(M) \times \mathcal{C}^\infty(M) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(M), \; (F, G) \longmapsto \{F, G\},$$

définie ci-dessus (où $\mathcal{C}^\infty(M)$ est l'algèbre commutative des fonctions régulières sur M) est antisymétrique :

$$\{F, G\} = -\{G, F\},$$

vérifie la formule de Leibniz :

$$\{FG, H\} = F\{G, H\} + G\{F, H\},$$

et satisfait à l'identité de Jacobi :

$$\{\{H, F\}, G\} + \{\{F, G\}, H\} + \{\{G, H\}, F\} = 0,$$

pour tous $F, G, H \in \mathcal{C}^\infty(M)$. La variété M est dite variété de Poisson ou encore variété Hamiltonienne. La formule de Leibniz assure que l'application $G \longmapsto \{G, F\}$ est une dérivation. L'antisymétrie et l'identité de Jacobi assure que $\{,\}$ est un crochet de Lie, elles munissent $\mathcal{C}^\infty(M)$ d'une structure d'algèbre de Lie de dimension infinie.

Considérons maintenant la variété $M = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ et soit $p \in M$. En vertu du théorème de Darboux (les variétés symplectiques (M, ω) de dimension $2m$ sont localement isomorphes à $(\mathbb{R}^{2m}, \omega)$), on peut choisir dans un voisinage du point p, un système de coordonnées locales $(y_1, \ldots, y_m, x_1, \ldots, x_m)$ tel que la forme ω s'exprime sous la forme

$$\omega = \sum_{i=1}^{m} dx_i \wedge dy_i.$$

Dès lors

$$X_H F = \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial H}{\partial x_i} \frac{\partial F}{\partial y_i} - \frac{\partial H}{\partial y_i} \frac{\partial F}{\partial x_i} \right) = \{H, F\},\ \forall F \in \mathcal{C}^\infty(M).$$

La variété M munie des coordonnées locales $y_1, \ldots, y_m, x_1, \ldots, x_m$ et du crochet de Poisson canonique ci-dessus est une variété de Poisson. Toute fonction F vérifiant la propriété $X_H F = 0$, est dite intégrale première de X_F, cela signifie que F est constante sur les trajectoires de X_H. En particulier, on a $X_H H = 0$. Deux fonctions F et G sont dites en involution quand leur crochet $\{F, G\}$ est nul. Nous avons ainsi une caractérisation complète du champ de vecteurs Hamiltonien

$$\dot{x}(t) = X_H(x(t)) = J \frac{\partial H}{\partial x}, \quad J = J(x), \quad x \in M, \tag{1.3}$$

où $H : M \longrightarrow \mathbb{R}$, est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ (Hamiltonien) et J est une matrice antisymétrique à éléments satisfaisant à l'identité de Jacobi ci-dessus où

$$\{H, F\} = \left\langle \frac{\partial H}{\partial x}, J \frac{\partial F}{\partial x} \right\rangle = \sum_{i,j} J_{ij} \frac{\partial H}{\partial x_i} \frac{\partial F}{\partial x_j},$$

sont les crochets de Poisson.

Exemple 4. *Les équations d'Euler du mouvement de rotation d'un corps solide autour d'un point fixe, pris comme origine du repère lié au solide, lorsqu'aucune force extérieure n'est appliquée au système, peuvent s'écrire sous la forme [6, 9, 11] :*

$$\begin{aligned} \dot{m}_1 &= (\lambda_3 - \lambda_2)\, m_2 m_3, \\ \dot{m}_2 &= (\lambda_1 - \lambda_3)\, m_1 m_3, \\ \dot{m}_3 &= (\lambda_2 - \lambda_1)\, m_1 m_2, \end{aligned}$$

où (m_1, m_2, m_3) est le moment angulaire du solide et $\lambda_i \equiv I_i^{-1}$, I_1, I_2 et I_3 étant les moments d'inertie. Ces équations s'écrivent sous la forme d'un champ de vecteurs Hamiltonien (1.3) avec $x = (m_1, m_2, m_3)^\intercal$ et

$$H = \frac{1}{2} \left(\lambda_1 m_1^2 + \lambda_2 m_2^2 + \lambda_3 m_3^2 \right),$$

l'Hamiltonien. Pour déterminer la matrice $J = (J_{ij})_{1 \le i,j \le 3}$, on procède comme suit: comme J est antisymétrique, alors

$$J_{ii} = 0, \quad J_{ij} = -J_{ji}, \quad 1 \le i, j \le 3,$$

d'où

$$J = \begin{pmatrix} 0 & J_{12} & J_{13} \\ -J_{12} & 0 & J_{23} \\ -J_{13} & -J_{23} & 0 \end{pmatrix}.$$

Dès lors,

$$\begin{pmatrix} \dot{m}_1 \\ \dot{m}_2 \\ \dot{m}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & J_{12} & J_{13} \\ -J_{12} & 0 & J_{23} \\ -J_{13} & -J_{23} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 m_1 \\ \lambda_2 m_2 \\ \lambda_3 m_3 \end{pmatrix}, \tag{1.4}$$

$$= \begin{pmatrix} (\lambda_3 - \lambda_2)\, m_2 m_3 \\ (\lambda_1 - \lambda_3)\, m_1 m_3 \\ (\lambda_2 - \lambda_1)\, m_1 m_2 \end{pmatrix}. \tag{1.5}$$

En comparant (1.4) et (1.5) , on déduit immédiatement que :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -m_3 & m_2 \\ m_3 & 0 & -m_1 \\ -m_2 & m_1 & 0 \end{pmatrix} \in so(3),$$

est la matrice du champ de vecteurs Hamiltonien.

Exemple 5. *Les équations du flot géodésique sur le groupe $SO(4)$ peuvent s'écrivent sous la forme [8, 12] :*

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= (\lambda_3 - \lambda_2)\, x_2 x_3 + (\lambda_6 - \lambda_5)\, x_5 x_6, \\ \dot{x}_2 &= (\lambda_1 - \lambda_3)\, x_1 x_3 + (\lambda_4 - \lambda_6)\, x_4 x_6, \\ \dot{x}_3 &= (\lambda_2 - \lambda_1)\, x_1 x_2 + (\lambda_5 - \lambda_4)\, x_4 x_5, \\ \dot{x}_4 &= (\lambda_3 - \lambda_5)\, x_3 x_5 + (\lambda_6 - \lambda_2)\, x_2 x_6, \\ \dot{x}_5 &= (\lambda_4 - \lambda_3)\, x_3 x_4 + (\lambda_1 - \lambda_6)\, x_1 x_6, \\ \dot{x}_6 &= (\lambda_2 - \lambda_4)\, x_2 x_4 + (\lambda_5 - \lambda_1)\, x_1 x_5, \end{aligned} \tag{1.6}$$

où $\lambda_1, ..., \lambda_6$ sont des constantes. Ces équations s'écrivent sous la forme d'un champ de vecteurs Hamiltonien

$$\dot{x}(t) = J\frac{\partial H}{\partial x}, \quad x \in \mathbb{R}^6,$$

avec

$$H = \frac{1}{2}\left(\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \cdots + \lambda_6 x_6^2\right).$$

En procédant de façon similaire à l'exemple précédent, on obtient

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -x_3 & x_2 & 0 & -x_6 & x_5 \\ x_3 & 0 & -x_1 & x_6 & 0 & -x_4 \\ -x_2 & x_1 & 0 & -x_5 & x_4 & 0 \\ 0 & -x_6 & x_5 & 0 & -x_3 & x_2 \\ x_6 & 0 & -x_4 & x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_5 & x_4 & 0 & -x_2 & x_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2 Orbites de Kostant-Kirillov d'un groupe de Lie

Soit G un groupe de Lie et g un élément de G. Le groupe de Lie G opère sur lui-même par une translation à gauche :

$$L_g : G \longrightarrow G, \quad h \longmapsto gh,$$

et une translation à droite :

$$R_g : G \longrightarrow G, \quad h \longmapsto hg.$$

En vertu de l'associativité de la loi du groupe, on a

$$L_g L_h = L_{gh}, \quad R_g L_h = R_{hg}, \quad L_{g^{-1}} = L_g^{-1}, \quad R_{g^{-1}} = R_g^{-1}.$$

En particulier, les applications R_g et L_g sont des difféomorphismes de G. En outre, toujours à cause de l'associativité, R_g et L_g commutent. Considérons l'automorphisme intérieur

$$R_g^{-1} L_g : G \longrightarrow G, \quad h \longmapsto ghg^{-1},$$

du groupe G. Il laisse l'unité e du groupe G fixe,

$$R_g^{-1} L_g(e) = geg^{-1} = e.$$

On peut définir la dérivée de $R_g^{-1} L_g$ en l'unité e, c.-à-d., l'application induite des espaces tangents comme suit

$$Ad_g : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}, \quad \xi \longmapsto \frac{d}{dt} R_g^{-1} L_g(e^{t\xi})\Big|_{t=0},$$

où $\mathcal{G} = T_e G$ est l'algèbre de Lie du groupe G; c'est l'espace tangent à G en son unité e. Cette définition a bien un sens car $R_g^{-1} L_g(e^{t\xi})$ est une courbe dans G et passe par l'identité en $t = 0$. Dès lors $g\xi g^{-1} \in \mathcal{G}$, et on a

Proposition 6. *Pour tout élément $\xi \in \mathcal{G}$, on a*

$$Ad_g(\xi) = g\xi g^{-1}, \quad Ad_{gh} = Ad_g . Ad_h, \quad g, h \in G.$$

Démonstration: On a

$$Ad_g(\xi) = \frac{d}{dt} R_g^{-1} L_g(e^{t\xi})\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} g e^{t\xi} g^{-1}\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} g \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n \xi^n}{n!} \right) g^{-1}\Bigg|_{t=0},$$

d'où,

$$Ad_g(\xi) = \frac{d}{dt} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} g\xi^n g^{-1}\Bigg|_{t=0} = \frac{d}{dt} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \underbrace{g\xi g^{-1}.g\xi g^{-1}...g\xi g^{-1}}_{n-fois}\Bigg|_{t=0},$$

et par conséquent,

$$Ad_g(\xi) = \frac{d}{dt}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}(g\xi g^{-1})^n\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}e^{t(g\xi g^{-1})}\Big|_{t=0} = g\xi g^{-1}.$$

On vérifie aisément que $Ad_{gh} = Ad_g.Ad_h$. En effet, on a

$$\begin{aligned} Ad_{gh}(\xi) &= gh\xi(gh)^{-1} = gh\xi h^{-1}g^{-1}, \\ Ad_g.Ad_h(\xi) &= Ad_g(h\xi h^{-1}), = gh\xi h^{-1}g^{-1}, \end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration. □

L'application

$$Ad_g : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}, \quad \xi \longmapsto \frac{d}{dt}R_g^{-1}L_g(e^{t\xi})\Big|_{t=0} = g\xi g^{-1}, \quad g \in G,$$

s'appelle représentation adjointe du groupe G. L'orbite adjointe de ξ est définie par

$$\mathcal{O}_G(\xi) = \{Ad_g(\xi) : g \in G\} \subset \mathcal{G}.$$

Proposition 7. *L'application Ad_g est un homéomorphisme d'algèbre,*

$$Ad_g[\xi,\eta] = [Ad_g\xi, Ad_g\eta], \quad (\xi,\eta \in \mathcal{G}).$$

Démonstration: On a

$$Ad_g[\xi,\eta] = Ad_g(\xi\eta - \eta\xi) = g(\xi\eta - \eta\xi)g^{-1} = g\xi\eta g^{-1} - g\eta\xi g^{-1},$$

d'où,

$$Ad_g[\xi,\eta] = g\xi g^{-1}g\eta g^{-1} - g\eta g^{-1}g\xi g^{-1} = \left[g\xi g^{-1}, g\eta g^{-1}\right] = [Ad_g\xi, Ad_g\eta],$$

la démonstration s'achève. □

Considérons maintenant l'application

$$Ad : G \longrightarrow \text{End}(\mathcal{G}), \quad g \longmapsto Ad(g) \equiv Ad_g,$$

où $\text{End}(\mathcal{G})$ est l'espace des opérateurs linéaires sur l'algèbre $\mathcal{G}$. Elle est différentiable et sa dérivée Ad_{*e} en l'unité du groupe G est une application linéaire de l'algèbre $T_eG = \mathcal{G}$ dans l'espace vectoriel $T_I\text{End}(\mathcal{G}) = \text{End}(\mathcal{G})$. Cette application sera notée

$$ad \equiv Ad_{*e} : \mathcal{G} \longrightarrow \text{End}(\mathcal{G}), \quad \xi \longmapsto ad_\xi = \frac{d}{dt}Ad_{g(t)}\Big|_{t=0},$$

où $g(t)$ est un groupe à un paramètre avec $\frac{d}{dt}g(t)\Big|_{t=0} = \xi$, $g(0) = e$.

Proposition 8. *Soit $\xi \in \mathcal{G}$ et $\eta \in End(\mathcal{G})$. En posant $ad_\xi \equiv Ad_{*e}(\xi)$, alors*

$$ad_\xi(\eta) = [\xi, \eta].$$

Démonstration: On a

$$ad_\xi(\eta) = Ad_{*e}(\xi)(\eta) = \frac{d}{dt} Ad_{g(t)}(\eta)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\left(g(t)\eta g^{-1}(t)\right)\Big|_{t=0},$$

d'où,

$$ad_\xi(\eta) = \dot{g}(t)\eta g^{-1}(t)\big|_{t=0} - g(t)\eta g^{-1}(t)\dot{g}(t)g^{-1}(t)\big|_{t=0},$$

et par conséquent,

$$ad_\xi(\eta) = \dot{g}(0)\eta - \eta\dot{g}(0) = \xi\eta - \eta\xi = [\xi, \eta].$$

La démonstration s'achève. □

Soit T_g^*G l'espace cotangent au groupe G en g; c'est le dual de l'espace tangent T_gG. Donc un élément $\zeta \in T_g^*G$ est une forme linéaire sur T_gG et sa valeur sur $\eta \in T_gG$ sera désignée par $\zeta(\eta) \equiv \langle \zeta, \eta \rangle$. Soit $\mathcal{G}^* = T_e^*G$ l'espace vectoriel dual de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$; c'est l'espace cotangent au groupe G en son unité e. L'opérateur dual $Ad_g^* : \mathcal{G}^* \longrightarrow \mathcal{G}^*$, de Ad_g est défini par

$$\left\langle Ad_g^*(\zeta), \eta \right\rangle = \langle \zeta, Ad_g\eta \rangle, \quad \zeta \in \mathcal{G}^*, \eta \in \mathcal{G}.$$

Ad_g^* s'appelle représentation coadjointe du groupe de Lie G. On définit l'orbite coadjointe appelée orbite de Kostant-Kirillov, au point $x \in \mathcal{G}^*$ par

$$\mathcal{O}_G^*(x) = \left\{ Ad_g^*(x) : g \in G \right\} \subset \mathcal{G}^*.$$

Proposition 9. *Les opérateurs transposés Ad_g^* forment une représentation du groupe de Lie G, c'est-à-dire qu'ils satisfont aux relations : $Ad_{gh}^* = Ad_h^*.Ad_g^*$.*

Démonstration: En effet, soit $\zeta \in \mathcal{G}^*$, $\eta \in \mathcal{G}$. On a

$$\left\langle Ad_{gh}^*(\zeta), \eta \right\rangle = \langle \zeta, Ad_{gh}(\eta) \rangle = \langle \zeta, Ad_h.Ad_g(\eta) \rangle,$$

d'où,

$$\left\langle Ad_{gh}^*(\zeta), \eta \right\rangle = \left\langle Ad_g^*(\zeta), Ad_h(\eta) \right\rangle = \left\langle Ad_h^*.Ad_g^*(\zeta), \eta \right\rangle,$$

ce qui achève la démonstration. □

Soit l'application

$$Ad^* : G \longrightarrow \mathrm{End}(\mathcal{G}^*), \quad g \longmapsto Ad^*(g) \equiv Ad_g^*,$$

et considérons sa dérivée en l'unité du groupe

$$ad^* \equiv (Ad^*)_{*e} : \mathcal{G} \longrightarrow \mathrm{End}(\mathcal{G}^*), \quad \xi \longmapsto ad_\xi^*.$$

Proposition 10. *Soit $\xi,\eta\in\mathcal{G}$ et $\zeta\in\mathcal{G}^*$. En posant*

$$\left\langle ad^*_\xi(\zeta),\eta\right\rangle=\langle\zeta,[\xi,\eta]\rangle=\langle\{\xi,\zeta\},\eta\rangle,$$

où

$$\{,\}:\mathcal{G}\times\mathcal{G}^*\longrightarrow\mathcal{G}^*,\quad(\xi,\zeta)\longmapsto\{\xi,\zeta\},$$

est une forme linéaire, alors

$$ad^*_\xi(\zeta)=\{\xi,\zeta\}.$$

Démonstration: On a

$$\left\langle ad^*_\xi(\zeta),\eta\right\rangle=\langle(Ad^*)_{*e}(\zeta),\eta\rangle=\left\langle\frac{d}{dt}Ad^*_{e^{t\xi}}(\zeta)\Big|_{t=0},\eta\right\rangle,$$

où $e^{t\xi}\big|_{t=0}=e$, $\frac{d}{dt}e^{t\xi}\Big|_{t=0}=\xi$. Dès lors,

$$\left\langle ad^*_\xi(\zeta),\eta\right\rangle=\frac{d}{dt}\left\langle Ad^*_{e^{t\xi}}(\zeta),\eta\right\rangle\Big|_{t=0}=\frac{d}{dt}\left\langle\zeta,Ad_{e^{t\xi}}(\eta)\right\rangle\Big|_{t=0},$$

d'où,

$$\left\langle ad^*_\xi(\zeta),\eta\right\rangle=\left\langle\zeta,\frac{d}{dt}Ad_{e^{t\xi}}(\eta)\Big|_{t=0}\right\rangle=\langle\zeta,ad_\xi\eta\rangle=\langle\zeta,[\xi,\eta]\rangle=\langle\{\xi,\zeta\},\eta\rangle,$$

ce qui achève la démonstration. □

3 Détermination des orbites adjointes et coadjointes dans le cas du groupe $SO(n)$

Nous allons montrer comment trouver l'orbite adjointe et l'orbite coadjointe dans le cas du groupe $SO(n)$. Rappelons que $SO(n)$ est le groupe spécial orthogonal d'ordre n, c.-à-d., l'ensemble des matrices X de type $n\times n$ telles que : $X^\top.X=I$ (ou $X^{-1}=X^\top$) et $\det X=1$. $SO(n)$ est un goupe de Lie. L'espace tangent à l'identité du groupe $SO(n)$, que l'on note $so(n)$, est constitué par les matrices $n\times n$ antisymétriques, c.-à-d., des matrices A telles que : $A^\top+A=0$. Le commutateur de deux matrices antisymétriques est encore une matrice antisymétrique (en effet, si $A,B\in so(n)$, alors $[A,B]=AB-BA\in so(n)$). Ce produit définit une structure d'algèbre de Lie sur $so(n)$; c'est l'algèbre de Lie du groupe $SO(n)$. En outre, on a

$$\dot{X}=AX,\quad A\in so(n),$$

et par conséquent, l'espace tangent à l'identité de $SO(n)$ est $T_ISO(n)=so(n)$. Soit

$$R_Y^{-1}L_Y:SO(n)\longrightarrow SO(n),\quad X\longmapsto YXY^{-1},\quad Y\in SO(n),$$

l'automorphisme intérieur du groupe $SO(n)$. On vérifie que $YXY^{-1}\in SO(n)$.

Lors de la recherche de l'orbite coadjointe, nous aurons besoin du lemme suivant:

Lemme 11. *L'algèbre de Lie $so(n)$ munie du commutateur $[,]$ des matrices est isomorphe à l'espace $\mathbb{R}^{\frac{n(n-1)}{2}}$ muni du produit vectoriel $\wedge$. L'isomorphisme est donné par*

$$a \wedge b \longmapsto [A, B] = AB - BA,$$

où $a, b \in \mathbb{R}^{\frac{n(n-1)}{2}}$ et $A, B \in so(n)$.

Démonstration: Sans restreindre la généralité, nous allons donner la preuve dans le cas $n = 3$. Soit $a = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ et

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix} \in so(3).$$

Au produit scalaire de $\mathbb{R}^3$ est associé la forme de Killing dans $so(3)$,

$$(A, B) = -\frac{1}{2}\mathrm{tr}(A.B).$$

En effet, on a

$$(A, B) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3,$$

$$A.B = \begin{pmatrix} -a_3b_3 - a_2b_2 & a_2b_1 & a_3b_1 \\ a_1b_2 & -a_3b_3 - a_1b_1 & a_3b_2 \\ a_1b_3 & a_2b_3 & -a_2b_2 - a_1b_1 \end{pmatrix} \in so(3),$$

et

$$-\frac{1}{2}\mathrm{tr}(A.B) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

De même, au produit vectoriel de $\mathbb{R}^3$ est associé le commutateur des matrices,

$$a \wedge b = [A, B].$$

En effet, on a

$$a \wedge b = (a_2b_3 - a_2b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1),$$

et

$$[A, B] = AB - BA = \begin{pmatrix} 0 & a_2b_1 - a_1b_2 & a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 & 0 & a_3b_2 - a_2b_3 \\ a_1b_3 - a_3b_1 & a_2b_3 - a_3b_2 & 0. \end{pmatrix},$$

ce qui achève la démonstration. □

Proposition 12. *L'orbite de la représentation adjointe du groupe $SO(n)$ est*

$$\mathcal{O}_{SO(n)}(A) = \left\{YAY^{-1} : Y \in SO(n)\right\}, \quad A \in so(n).$$

Démonstration: Soit $Y \in SO(n)$, $A \in so(n)$. Par définition, la représentation adjointe du groupe $SO(n)$ est

$$Ad_Y : so(n) \longrightarrow so(n), \quad A \longmapsto YAY^{-1}.$$

Il suffit donc de bien s'assurer que $YAY^{-1} \in so(n)$. On a

$$(YAY^{-1})^\top = (Y^{-1})^\top A^\top Y^\top = -YAY^\top = -YAY^{-1},$$

d'où le résultat. □

Proposition 13. *Soit $A \in so(n)$. L'orbite coadjointe du groupe $SO(n)$ est*

$$\mathcal{O}^*_{SO(n)}(A) = \left\{Y^{-1}AY : Y \in SO(n)\right\},$$

ou encore

$$\mathcal{O}^*_{SO(n)}(A) = \left\{C \in so(n) : C = Y^{-1}AY,\ \textit{spectre de } C = \textit{spectre de } A\right\}.$$

Démonstration: Soit

$$Ad : SO(n) \longrightarrow \mathrm{End}(so(n)), \quad Y \longmapsto Ad_Y,$$

avec $Ad_Y(A) = YAY^{-1}$, $A \in so(n)$, et soit

$$ad : so(n) \longrightarrow \mathrm{End}(so(n)), \quad \dot{Y}(0) \longmapsto ad_{\dot{Y}(0)},$$

avec

$$ad_{\dot{Y}(0)}\bullet = [\dot{Y}(0), \bullet] : so(n) \longrightarrow so(n), \quad A \longmapsto [\dot{Y}(0), A],$$

où $Y(t)$ est une courbe dans $SO(n)$ avec $Y(0) = I$. Or $(\mathbb{R}^{n\times n})^* \simeq \mathbb{R}^{n\times n}$, et d'après le lemme précédent, on a l'isomorphisme $(so(n))^* \simeq so(n)$. On peut donc définir Ad^* par $Ad^*_Y : so(n) \longrightarrow so(n)$, avec $A, B \in so(n)$, comme suit

$$\langle Ad^*_Y(A), B\rangle = \langle A, Ad_Y B\rangle = \left\langle A, YBY^{-1}\right\rangle = -\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(AYBY^{-1}\right),$$

d'où,

$$\langle Ad^*_Y(A), B\rangle = -\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(Y^{-1}AYB\right) = \left\langle Y^{-1}AY, B\right\rangle,$$

et par conséquent,

$$Ad^*_Y(A) = Y^{-1}AY.$$

On vérifie que $Y^{-1}AY \in so(n)$. En effet, on a

$$\left(Y^{-1}AY\right)^\top = Y^\top A^\top \left(Y^{-1}\right)^\top = -Y^{-1}AY,$$

car $Y \in SO(n)$ et $A \in so(n)$. Donc

$$\mathcal{O}^*_{SO(n)}(A) = \left\{Y^{-1}AY : Y \in SO(n)\right\},$$

ou ce qui revient au même

$$\mathcal{O}^*_{SO(n)}(A) = \left\{C \in so(n) : \exists Y \in SO(n), C = Y^{-1}AY\right\}.$$

Notons que

$$\begin{aligned} \det(C - \lambda I) &= \det\left(Y^{-1}AY - Y^{-1}\lambda IY\right), \\ &= \det\left(Y^{-1}(A - \lambda I)Y\right), \\ &= \det Y^{-1}. \det(A - \lambda I). \det Y, \\ &= \det(A - \lambda I). \end{aligned}$$

Dès lors, les matrices C et A ont même polynôme caractéristique, donc elles ont même spectre. Par conséquent,

$$\mathcal{O}^*_{SO(n)}(A) = \left\{C \in so(n) : C = Y^{-1}AY, \text{ spectre de } C = \text{spectre de } A\right\},$$

ce qui achève la preuve. □

Proposition 14. *Avec les notations de la proposition 10, on a*

$$\{A, B\} = [B, A], \quad (A, B \in so(n)).$$

Démonstration: Appliquons la proposition 10 au cas du groupe $SO(n)$. Reprenons la forme linéaire tout en tenant compte du fait que : $(so(n))^* = so(n)$,

$$\{,\} : so(n) \times so(n) \longrightarrow so(n), \quad (A, B) \longmapsto \{A, B\},$$

ainsi que les applications

$$Ad^* : SO(n) \longrightarrow \mathrm{End}(so(n)), \quad Y \longmapsto Ad^*_Y(B) = Y^{-1}BY, \quad B \in so(n),$$

$$ad^* : so(n) \longrightarrow \mathrm{End}(so(n)), \quad A \longmapsto ad^*_A,$$

où

$$\langle ad^*_A(B), C\rangle = \langle B, [A, C]\rangle = \langle \{A, B\}, C\rangle.$$

On a

$$\langle \{A, B\}, C\rangle = \langle B, [A, C]\rangle = -\frac{1}{2}\mathrm{tr}(B.[A, C]) = -\frac{1}{2}\mathrm{tr}(BAC - BCA),$$

d'où,

$$\langle \{A, B\}, C\rangle = -\frac{1}{2}\mathrm{tr}([B, A].C) = \langle [B, A], C\rangle.$$

Dès lors, $\{A, B\} = [B, A]$, et la preuve s'achève. □

4 Détermination des structures symplectiques dans le cas des groupes $SO(3)$ et $SO(4)$

Nous allons voir dans cette section, comment déterminer explicitement une structure symplectique sur l'orbite de la représentation coadjointe avec une application dans le cas de $SO(3)$ et $SO(4)$. Soit $x \in \mathcal{G}^*$ et ξ le vecteur tangent en x à l'orbite. Comme $\mathcal{G}^*$ est un espace vectoriel, alors évidemment $\xi \in T_x\mathcal{G}^* = \mathcal{G}^*$. Rappelons que

$$\mathcal{O}_G^*(x) = \{Ad_g^*(x) : g \in G\} \subset \mathcal{G}^*.$$

Pour $x \in \mathcal{O}_G^*(x)$, il existe $g \in G$ tel que : $x = Ad_g^*$. Soit $a \in \mathcal{G}$ et e^{ta} un groupe à un paramètre dans G avec

$$e^{ta}\Big|_{t=0} = g, \qquad \frac{d}{dt}Ad_{e^{ta}}^*(x)\Big|_{t=0} = \xi.$$

Or

$$\frac{d}{dt}Ad_{e^{ta}}^*(x)\Big|_{t=0} \equiv ad_a^*(x) = \{a, x\},$$

donc le vecteur ξ peut-être représenté comme le vecteur vitesse du mouvement de x sous l'action d'un groupe e^{ta}, $a \in \mathcal{G}$. Autrement dit, tout vecteur ξ tangent à l'orbite $\mathcal{O}_G^*(x)$ s'exprime en fonction de $a \in \mathcal{G}$ par

$$\xi = \{a, x\}, \quad a \in \mathcal{G}, \quad x \in \mathcal{G}^*. \tag{4.1}$$

Par conséquent, on peut déterminer la valeur d'une 2-forme Ω sur l'orbite $\mathcal{O}_G^*(x)$ comme suit : soient ξ_1 et ξ_2 deux vecteurs tangents à l'orbite de x. D'après ce qui précède, on a

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \{a_1, x\}, \quad a_1 \in \mathcal{G}, \quad x \in \mathcal{G}^*, \\ \xi_2 &= \{a_2, x\}, \quad a_2 \in \mathcal{G}, \quad x \in \mathcal{G}^*. \end{aligned}$$

On vérifie aisément que la 2-forme différentielle

$$\Omega(\xi_1, \xi_2)(x) = \langle x, [a_1, a_2]\rangle, \quad a_1, a_2 \in \mathcal{G}, \quad x \in \mathcal{G}^*, \tag{4.2}$$

sur $\mathcal{O}_G^*(x)$ est bien définie; sa valeur ne dépend pas du choix de a_1 et a_2. En outre, elle est antisymétrique, non-dégénérée et fermée.

4.1 Cas du groupe $SO(3)$

Pour déterminer la structure symplectique sur l'orbite $\mathcal{O}_{SO(3)}^*(X)$, on procède comme suit : d'après (4.2), on a

$$\Omega(\xi_1, \xi_2)(X) = \langle X, [A, B]\rangle,$$

où $A, B \in so(3)$, $X \in (so(3))^* = so(3)$ et en vertu de (4.1) ,

$$\xi_1 = \{A, X\}, \quad \xi_2 = \{B, X\},$$

sont deux vecteurs tangents à l'orbite en X ou ce qui revient au même d'après la proposition 14,

$$\xi_1 = [X, A], \quad \xi_2 = [X, B].$$

En utilisant le lemme 11, c.-à-d., l'isomorphisme entre $(so(3), [,])$ et $(\mathbb{R}^3, \wedge)$, on a aussi

$$\xi_1 = x \wedge a, \quad \xi_2 = x \wedge b,$$

avec

$$\Omega(\xi_1, \xi_2)(x) = \langle x, a \wedge b \rangle.$$

D'après la proposition 13, l'orbite coadjointe de $SO(3)$ est

$$\mathcal{O}^*_{SO(3)}(A) = \{C \in so(3) : C = Y^{-1}AY, \text{ spectre de } C = \text{ spectre de } A\},$$

où $A \in so(3)$ et $Y \in SO(3)$. Déterminons le spectre de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix} \in so(3).$$

On a

$$\det(A - \lambda I) = -\lambda(\lambda^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) = 0,$$

d'où,

$$\lambda = 0, \qquad \lambda = \pm i\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

Donc

$$\mathcal{O}^*_{SO(3)}(A) = \{C \in so(3) : c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = r^2\},$$

avec

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -c_3 & c_2 \\ c_3 & 0 & -c_1 \\ -c_2 & c_1 & 0 \end{pmatrix} \in so(3),$$

et $r^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$. L'algèbre $so(3)$ étant isomorphe à $\mathbb{R}^3$, on en déduit que l'orbite $\mathcal{O}^*_{SO(3)}(A)$ est isomorphe à une sphère S^2 de rayon r. Comme les vecteurs ξ_1, ξ_2 appartiennent au plan tangent $T_X\mathcal{O}^*_{SO(3)}$ en X, ils appartiennent aussi au plan tangent T_xS^2 en x. Soit

$$S^2 = \left\{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 : y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = r^2\right\},$$

la sphère de rayon r, alors le plan tangent à cette sphère en x de coordonnées (x_1, x_2, x_3) est

$$\begin{aligned} T_x S^2 &= \left\{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 : y_1 x_1 + y_2 x_2 + y_3 x_3 = 0\right\}, \\ &= \left\{\left(y_1, y_2, -\frac{y_1 x_1 + y_2 x_2}{x_3}\right)\right\}. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Soit $z = (z_1, z_2, z_3) \in T_x S^2$ et déterminons $a = (a_1, a_2, a_3)$ tel que : $x \wedge a = z$. Cette dernière est équivalente au système

$$\begin{pmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ -\frac{z_1 x_1 + z_2 x_2}{x_3} \end{pmatrix},$$

dont la solution est

$$a = \left(\frac{x_1 a_3 + z_2}{x_3}, \frac{x_2 a_3 - z_1}{x_3}, a_3\right), \quad a_3 \in \mathbb{R}.$$

La forme symplectique sur S^2 que l'on cherche à déterminer ne dépend pas du choix des coordonnées locales (c.-à-d., elle est intrinsèque), on peut donc choisir comme coordonnées locales x_1, x_2 et le même raisonnement sera valable pour les autres cas, c.-à-d., x_2, x_3 et x_3, x_1. Nous allons donc calculer a et b relativement à la base $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}\right)$ de $T_x S^2$ avec

$$\frac{\partial}{\partial x_1} = \left(1, 0, -\frac{x_1}{x_3}\right), \qquad \frac{\partial}{\partial x_2} = \left(0, 1, -\frac{x_2}{x_3}\right).$$

On a

$$a = (a_1, a_2, a_3) = \left(\frac{x_1 b_3 + 1}{x_3}, \frac{x_2 b_3}{x_3}, b_3\right).$$

D'où,

$$\begin{aligned} a \wedge b &= (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1), \\ &= \left(-\frac{b_3}{x_3}, \frac{a_3}{x_3}, \frac{x_1 b_3 - x_2 a_3 + 1}{x_3^2}\right). \end{aligned}$$

Dès lors,

$$\Omega\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}\right) = (x, a \wedge b) = \frac{1}{x_3},$$

et par conséquent,

$$\Omega = \frac{dx_1 \wedge dx_2}{x_3}.$$

La forme symplectique étant intrinsèque, on a finalement

$$\Omega = \frac{dx_1 \wedge dx_2}{x_3} = \frac{dx_2 \wedge dx_3}{x_1} = \frac{dx_3 \wedge dx_1}{x_2}.$$

Exemple 15. *Montrons que la structure symplectique obtenue ici est équivalente à celle associée aux équations d'Euler (voir exemple 4). En effet, d'après la formule* (1.2) *, on sait que*

$$J^{-1} = \left(\omega\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right)\right)_{i,j=1,2},$$

donc la matrice associée à la forme

$$\Omega = \frac{dx_1 \wedge dx_2}{x_3},$$

est $\begin{pmatrix} 0 & -x_3 \\ x_3 & 0 \end{pmatrix}$*. Montrons qu'il y'a équivalence entre*

$$\dot{x}(t) = J\frac{\partial H}{\partial x}, \quad où \quad \begin{cases} x = & (m_1, m_2, m_3)^\top, \\ H = & \frac{1}{2}\left(\lambda_1 m_1^2 + \lambda_2 m_2^2 + \lambda_3 m_3^2\right), \\ J = & \begin{pmatrix} 0 & -m_3 & m_2 \\ m_3 & 0 & -m_1 \\ -m_2 & m_1 & 0 \end{pmatrix}, \end{cases}$$

et

$$\dot{x}(t) = \mathbf{J}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x}, \quad où \quad \begin{cases} x = & (m_1, m_2, m_3)^\top, \\ \mathbf{H} = & H(m_1, m_2, m_3), \\ \mathbf{J} = & \begin{pmatrix} 0 & -m_3 \\ m_3 & 0 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

En effet, on a

$$\dot{m}_1 = -m_3\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial m_2} = -m_3\left(\frac{\partial H}{\partial m_2} + \frac{\partial H}{\partial m_3}\frac{\partial m_3}{\partial m_2}\right),$$

et

$$\dot{m}_2 = m_3\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial m_1} = m_3\left(\frac{\partial H}{\partial m_1} + \frac{\partial H}{\partial m_3}\frac{\partial m_3}{\partial m_1}\right).$$

Or d'après l'exemple 4, on a

$$dm_3 = -\frac{m_1 dm_1 + m_2 dm_2}{m_3},$$

d'où,

$$\frac{dm_3}{dm_2} = -\frac{m_2}{m_3}, \qquad \frac{dm_3}{dm_1} = -\frac{m_1}{m_3},$$

et par conséquent,

$$\dot{m}_1 = (\lambda_3 - \lambda_2)\, m_2 m_3, \qquad \dot{m}_2 = (\lambda_1 - \lambda_3)\, m_1 m_3.$$

4.2 Cas du groupe $SO(4)$

Pour déterminer la structure symplectique sur l'orbite coadjointe du groupe $SO(4)$, on peut procéder comme dans le cas précédent mais le calcul serait plus long. On peut obtenir aisément le résultat en utilisant une approche géométrique en observant que $so(4)$ se décompose en deux copies de $so(3)$ et que les orbites génériques sont un produit de deux sphères. Plus précisément, à partir de $SO(4) = SO(3) \otimes SO(3)$, il est plus intéressant de considérer les coordonnées (x_1, x_2, x_3), (x_4, x_5, x_6) avec

$$(x_1, x_2, x_3) \oplus (x_4, x_5, x_6) \in so(4) \simeq so(3) \oplus so(3).$$

Nous allons suivre ce qui a été fait ci-dessus pour déterminer la structure symplectique sur l'orbite $\mathcal{O}^*_{SO(4)}(X)$. D'après (4.2) , on a

$$\Omega(\xi_1, \xi_2)(X) = \langle X, [A, B]\rangle,$$

où $A, B \in so(4)$, $X \in (so(4))^* = so(4)$ et en vertu de (4.1) ,

$$\xi_1 = \{A, X\}, \qquad \xi_2 = \{B, X\},$$

sont deux vecteurs tangents à l'orbite en X. D'après la proposition 14, on a donc

$$\xi_1 = [X, A], \quad \xi_2 = [X, B].$$

Comme $(so(4), [,])$ et $(\mathbb{R}^6, \wedge)$ sont isomorphes (lemme 11), alors

$$\xi_1 = x \wedge a, \qquad \xi_2 = x \wedge b,$$

avec

$$\Omega(\xi_1, \xi_2)(x) = \langle x, a \wedge b\rangle.$$

D'après la proposition 13, l'orbite coadjointe de $SO(4)$ est

$$\mathcal{O}^*_{SO(4)}(A) = \{C \in so(4) : C = Y^{-1}AY, \text{ spectre de } C = \text{ spectre de } A\},$$

où $A \in so(4)$ et $Y \in SO(4)$. Déterminons le spectre de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 & -a_4 \\ a_3 & 0 & -a_1 & -a_5 \\ -a_2 & a_1 & 0 & -a_6 \\ a_4 & a_5 & a_6 & 0 \end{pmatrix} \in so(4).$$

On a

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^4 + \lambda^2(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 + a_6^2) + (a_1a_4 + a_2a_5 + a_3a_6)^2.$$

Donc $\mathcal{O}^*_{SO(4)}(A)$ est l'ensemble des matrices

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -c_3 & c_2 & -c_4 \\ c_3 & 0 & -c_1 & -c_5 \\ -c_2 & c_1 & 0 & -c_6 \\ c_4 & c_5 & c_6 & 0 \end{pmatrix} \in so(4),$$

telles que :

$$\begin{array}{rcl} c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 + c_4^2 + c_5^2 + c_6^2 & = & a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 + a_6^2, \\ c_1c_4 + c_2c_5 + c_3c_6 & = & a_1a_4 + a_2a_5 + a_3a_6. \end{array}$$

L'algèbre $so(4)$ étant isomorphe à $\mathbb{R}^6$, on en déduit que le plan tangent $T_X\mathcal{O}^*_{SO(4)}$ en X, est isomorphe à l'ensemble des $(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6) \in \mathbb{R}^6$ tels que :

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 + u_4x_4 + u_5x_5 + u_6x_6 = 0, \tag{4.4}$$
$$u_1x_4 + u_2x_5 + u_3x_6 + u_4x_1 + u_5x_2 + u_6x_3 = 0. \tag{4.5}$$

Notons que :

$$(x_1, x_2, x_3) \wedge (a_1, a_2, a_3) = (a_3x_2 - a_2x_3 \quad a_1x_3 - a_3x_1 \quad a_2x_1 - a_1x_2),$$

$$(x_4, x_5, x_6) \wedge (a_4, a_5, a_6) = (a_6x_5 - a_5x_6 \quad a_4x_6 - a_6x_4 \quad a_5x_4 - a_4x_5).$$

$$(x_1, x_2, x_3) \wedge (a_4, a_5, a_6) = (a_6x_2 - a_5x_3 \quad a_4x_3 - a_6x_1 \quad a_5x_1 - a_4x_2).$$

$$(x_4, x_5, x_6) \wedge (a_1, a_2, a_3) = (a_3x_5 - a_2x_6 \quad a_1x_6 - a_3x_4 \quad a_2x_4 - a_1x_5).$$

Soit $\xi_1 = (u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6)$, $\xi_2 = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6) \in T_X\mathcal{O}^*_{SO(4)}$ et déterminons $a = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6) \in \mathbb{R}^6$, $b = (b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6) \in \mathbb{R}^6$ tels que :

$$x \wedge a = \xi_1, \qquad x \wedge b = \xi_2.$$

(i) Prenons d'abord le cas où $x \wedge a = \xi_1$. On obtient les équations suivantes :

$$\begin{array}{rcl} a_3x_2 - a_2x_3 + a_6x_5 - a_5x_6 & = & u_1, \\ a_1x_3 - a_3x_1 + a_4x_6 - a_6x_4 & = & u_2, \\ a_2x_1 - a_1x_2 + a_5x_4 - a_4x_5 & = & u_3, \qquad (4.6) \\ a_6x_2 - a_5x_3 + a_3x_5 - a_2x_6 & = & u_4, \\ a_4x_3 - a_6x_1 + a_1x_6 - a_3x_4 & = & u_5, \\ a_5x_1 - a_4x_2 + a_2x_4 - a_1x_5 & = & u_6. \qquad (4.7) \end{array}$$

Nous allons voir qu'en fait ce système est compatible, plus précisément les équations (4.6) et (4.7) peuvent s'exprimer comme conbinaisons linéaires des aures. En effet, d'après l'équation (4.4) , on a

$$u_3 = -\frac{1}{x_3}(u_1x_1 + u_2x_2 + u_4x_4 + u_5x_5 + u_6x_6), \quad x_3 \neq 0.$$

En remplaçant cette expression dans l'équation (4.5), on exprime u_6 en fonction de u_1, u_2, u_4, u_5 comme suit :

$$\begin{aligned} u_6 = \frac{1}{x_3^2 - x_6^2} & \left[u_1(x_1x_6 - x_3x_4) + u_2(x_2x_6 - x_3x_5) \right. \\ & \left. + u_4(x_4x_6 - x_1x_3) + u_5(x_5x_6 - x_2x_3) \right], \quad x_3^2 - x_6^2 \neq 0. \end{aligned} \tag{4.8}$$

De même, on tire de l'équation (4.5) l'expression suivante :

$$u_6 = -\frac{1}{x_6}(u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 + u_4x_4 + u_5x_5), \quad x_6 \neq 0$$

et après avoir remplacé cette dernière dans l'équation (4.4) , on obtient u_3 en fonction de u_1, u_2, u_4, u_5 :

$$\begin{aligned} u_3 = \frac{1}{x_3^2 - x_6^2} & \left[u_1(x_4x_6 - x_1x_3) + u_2(x_5x_6 - x_2x_3) \right. \\ & \left. + u_4(x_1x_6 - x_3x_4) + u_5(x_2x_6 - x_3x_5) \right], \quad x_3^2 - x_6^2 \neq 0. \end{aligned} \tag{4.9}$$

En remplaçant u_3 (resp. u_6) par son expression ci-dessus dans l'équation (4.6) (resp. (4.7)), on montre aisément qu'effectivement les équations (4.6) et (4.7) sont conbinaisons linéaires des autres. Dès lors, la résolution du système précédent se ramène à celle du système de quatre équations à six inconnus suivant :

$$\begin{aligned} a_3x_2 - a_2x_3 + a_6x_5 - a_5x_6 &= u_1, \\ a_1x_3 - a_3x_1 + a_4x_6 - a_6x_4 &= u_2, \\ a_6x_2 - a_5x_3 + a_3x_5 - a_2x_6 &= u_4, \\ a_4x_3 - a_6x_1 + a_1x_6 - a_3x_4 &= u_5, \end{aligned}$$

que l'on peut l'écrire sous la forme :

$$a_2x_3 + a_5x_6 = -u_1 + a_3x_2 + a_6x_5 \equiv \alpha, \tag{4.10}$$
$$a_1x_3 + a_4x_6 = u_2 + a_3x_1 + a_6x_4 \equiv \beta, \tag{4.11}$$
$$a_5x_3 + a_2x_6 = -u_4 + a_6x_2 + a_3x_5 \equiv \gamma, \tag{4.12}$$
$$a_4x_3 + a_1x_6 = u_5 + a_6x_1 + a_3x_4 \equiv \delta. \tag{4.13}$$

En fixant a_3 et a_6, on tire des équations (4.11) et (4.13) les valeurs de a_1 et de a_4 :

$$a_1 = \frac{\beta x_3 - \delta x_6}{x_3^2 - x_6^2}, \qquad a_4 = \frac{\delta x_3 - \beta x_6}{x_3^2 - x_6^2},$$

tandis que les valeurs de a_2 et de a_5, s'obtiennent des équations (4.10) et (4.12), comme suit :

$$a_2 = \frac{\alpha x_3 - \gamma x_6}{x_3^2 - x_6^2}, \qquad a_5 = \frac{\gamma x_3 - \alpha x_6}{x_3^2 - x_6^2}.$$

On a déterminé $x \wedge a = \xi_1$, $a = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$ où a_3, a_6 sont fixés et a_1, a_2, a_4, a_5 sont donnés explicitement par les formules ci-dessus, $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$, $\xi_1 = (u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6)$ où u_3 est déterminé par (4.9) et u_6 par (4.8).

(ii) Comme ci-dessus, on détermine $x \wedge b = \xi_2$, $b = (b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6)$ où b_3, b_6 sont fixés et b_1, b_2, b_4, b_5 sont donnés par des formules similaires à celles obtenues ci-dessus (pour a_1, a_2, a_4, a_5), $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$, $\xi_2 = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6)$ où v_3, v_6 s'obtiennent en fonction de v_1, v_2, v_4, v_5 (comme pour le cas de u_3, u_6 ci-dessus en fonction de u_1, u_2, u_4, u_5). En remplaçant ces expressions dans

$$\Omega(\xi_1, \xi_2)(x) = \langle x, a \wedge b \rangle,$$

on obtient l'expression suivante :

$$\frac{(u_1v_2 - u_2v_1 + u_4v_5 - u_5v_4)x_3 - (u_1v_5 - u_5v_1 + u_4v_2 - u_2v_4)x_6}{x_3^2 - x_6^2}.$$

Nous allons calculer a et b relativement à la base $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_4}, \frac{\partial}{\partial x_5}\right)$ du plan tangent avec

$$\frac{\partial}{\partial x_1} = \left(1, 0, \frac{x_4x_6 - x_1x_3}{x_3^2 - x_6^2}, 0, 0, \frac{x_1x_6 - x_3x_4}{x_3^2 - x_6^2}\right),$$
$$\frac{\partial}{\partial x_2} = \left(0, 1, \frac{x_5x_6 - x_2x_3}{x_3^2 - x_6^2}, 0, 0, \frac{x_2x_6 - x_3x_5}{x_3^2 - x_6^2}\right),$$
$$\frac{\partial}{\partial x_4} = \left(0, 0, \frac{x_1x_6 - x_3x_4}{x_3^2 - x_6^2}, 1, 0, \frac{x_4x_6 - x_1x_3}{x_3^2 - x_6^2}\right),$$
$$\frac{\partial}{\partial x_5} = \left(0, 0, \frac{x_2x_6 - x_3x_5}{x_3^2 - x_6^2}, 0, 1, \frac{x_5x_6 - x_2x_3}{x_3^2 - x_6^2}\right).$$

D'où,

$$\begin{aligned}
\Omega\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}\right) &= \frac{x_3}{x_3^2 - x_6^2},\\
\Omega\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_4}\right) &= 0,\\
\Omega\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_5}\right) &= -\frac{x_6}{x_3^2 - x_6^2},\\
\Omega\left(\frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_4}\right) &= \frac{x_6}{x_3^2 - x_6^2},\\
\Omega\left(\frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_5}\right) &= 0,\\
\Omega\left(\frac{\partial}{\partial x_4}, \frac{\partial}{\partial x_5}\right) &= \frac{x_3}{x_3^2 - x_6^2}.
\end{aligned}$$

En tenant compte de la formule (1.2), on a

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & -x_3 & 0 & -x_6 \\ x_3 & 0 & x_6 & 0 \\ 0 & -x_6 & 0 & -x_3 \\ x_6 & 0 & x_3 & 0 \end{pmatrix},$$

et par conséquent,

$$\Omega = -x_3 dx_1 \wedge dx_2 - x_6 dx_1 \wedge dx_5 + x_6 dx_2 \wedge dx_4 - x_3 dx_4 \wedge dx_5.$$

Exemple 16. *Montrons que la structure symplectique obtenue ici est équivalente à celle associée au système* (1.6) *(voir exemple 5). Montrons qu'il y'a équivalence entre*

$$\dot{x}(t) = J\frac{\partial H}{\partial x}, \quad x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)^\top,$$

où

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -x_3 & x_2 & 0 & -x_6 & x_5 \\ x_3 & 0 & -x_1 & x_6 & 0 & -x_4 \\ -x_2 & x_1 & 0 & -x_5 & x_4 & 0 \\ 0 & -x_6 & x_5 & 0 & -x_3 & x_2 \\ x_6 & 0 & -x_4 & x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_5 & x_4 & 0 & -x_2 & x_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

et

$$\dot{x}(t) = \mathbf{J}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x}, \quad x = (x_1, x_2, \boldsymbol{x}_3, x_4, x_5, \boldsymbol{x}_6)^\top,$$

où

$$\boldsymbol{H} = H(x_1, x_2, \boldsymbol{x}_3, x_4, x_5, \boldsymbol{x}_6), \quad \boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} 0 & -x_3 & 0 & -x_6 \\ x_3 & 0 & x_6 & 0 \\ 0 & -x_6 & 0 & -x_3 \\ x_6 & 0 & x_3 & 0 \end{pmatrix}.$$

En effet, posons $J = (J_{ij})$ et $\boldsymbol{J} = (\boldsymbol{J}_{ij})$. Lors du calcul de $\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_4, \dot{x}_5$, on aura besoin des équations suivantes (que l'on tire des expressions (4.9) *et* (4.8)*) :*

$$\begin{aligned} dx_3 = \frac{1}{x_3^2 - x_6^2} &\left[(x_4x_6 - x_1x_3)dx_1 + (x_5x_6 - x_2x_3)dx_2 \right. \\ &\left. +(x_1x_6 - x_3x_4)dx_4 + (x_2x_6 - x_3x_5)dx_5\right], \quad x_3^2 - x_6^2 \neq 0, \end{aligned} \tag{4.14}$$

$$\begin{aligned} dx_6 = \frac{1}{x_3^2 - x_6^2} &\left[(x_1x_6 - x_3x_4)dx_1 + (x_2x_6 - x_3x_5)dx_2 \right. \\ &\left. +(x_4x_6 - x_1x_3)dx_4 + (x_5x_6 - x_2x_3)dx_5\right], \quad x_3^2 - x_6^2 \neq 0, \end{aligned} \tag{4.15}$$

- *Déterminons* $\dot{x}_1$. *On a*

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= \sum_{j=1}^{6} \boldsymbol{J}_{ij} \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial x_j}, \quad j \neq 3, j \neq 6, \\
&= -x_3 \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial x_2} - x_6 \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial x_5}, \\
&= -x_3 \left(\frac{\partial H}{\partial x_2} + \frac{\partial H}{\partial x_3}\frac{\partial x_3}{\partial x_2} + \frac{\partial H}{\partial x_6}\frac{\partial x_6}{\partial x_2} \right) \\
&\qquad -x_6 \left(\frac{\partial H}{\partial x_5} + \frac{\partial H}{\partial x_3}\frac{\partial x_3}{\partial x_5} + \frac{\partial H}{\partial x_6}\frac{\partial x_6}{\partial x_5} \right).
\end{aligned}$$

D'après les équations (4.14) *et* (4.15), *on a*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x_3}{\partial x_2} &= x_5 x_6 - x_2 x_3, \\
\frac{\partial x_3}{\partial x_5} &= x_2 x_6 - x_2 x_5, \\
\frac{\partial x_6}{\partial x_2} &= x_3 x_5 - x_2 x_6, \\
\frac{\partial x_6}{\partial x_5} &= x_2 x_3 - x_5 x_6.
\end{aligned}$$

En remplaçant ces expressions dans l'équation ci-dessus, on obtient

$$\dot{x}_1 = -x_3 \frac{\partial H}{\partial x_2} + x_2 \frac{\partial H}{\partial x_3} - x_6 \frac{\partial H}{\partial x_5} + x_5 \frac{\partial H}{\partial x_6},$$

et par conséquent,

$$\dot{x}_1 = \sum_{j=1}^{6} \boldsymbol{J}_{1j} \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial x_j}, \quad j \neq 3, j \neq 6,$$

est équivalent à

$$\dot{x}_1 = \sum_{j=1}^{6} J_{1j} \frac{\partial H}{\partial x_j}.$$

- *Déterminons* $\dot{x}_2$. *On a*

$$\begin{aligned}
\dot{x}_2 &= \sum_{j=1}^{6} \boldsymbol{J}_{ij} \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial x_j}, \quad j \neq 3, j \neq 6, \\
&= x_3 \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial x_1} + x_6 \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial x_4}, \\
&= x_3 \left(\frac{\partial H}{\partial x_1} + \frac{\partial H}{\partial x_3}\frac{\partial x_3}{\partial x_1} + \frac{\partial H}{\partial x_6}\frac{\partial x_6}{\partial x_1} \right) \\
&\qquad x_6 \left(\frac{\partial H}{\partial x_4} + \frac{\partial H}{\partial x_3}\frac{\partial x_3}{\partial x_4} + \frac{\partial H}{\partial x_6}\frac{\partial x_6}{\partial x_4} \right).
\end{aligned}$$

D'après les équations (4.5) *et* (4.6)*, on a*

$$\frac{\partial x_3}{\partial x_1} = x_4x_6 - x_1x_3,$$

$$\frac{\partial x_3}{\partial x_4} = x_1x_6 - x_3x_4,$$

$$\frac{\partial x_6}{\partial x_1} = x_3x_4 - x_1x_6,$$

$$\frac{\partial x_6}{\partial x_4} = x_1x_3 - x_4x_6.$$

En remplaçant ces expressions dans l'équation ci-dessus, on obtient

$$\dot{x}_2 = x_3\frac{\partial H}{\partial x_1} - x_1\frac{\partial H}{\partial x_3} + x_6\frac{\partial H}{\partial x_4} - x_4\frac{\partial H}{\partial x_6},$$

et par conséquent,

$$\dot{x}_2 = \sum_{j=1}^{6} \boldsymbol{J}_{2j}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial x_j}, \quad j \neq 3, j \neq 6,$$

est équivalent à

$$\dot{x}_2 = \sum_{j=1}^{6} J_{2j}\frac{\partial H}{\partial x_j}.$$

- *Déterminons* $\dot{x}_4$*. On a*

$$\begin{aligned}
\dot{x}_4 &= \sum_{j=1}^{6} \boldsymbol{J}_{ij}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial x_j}, \quad j \neq 3, j \neq 6,\\
&= -x_6\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial x_2} - x_3\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial x_5},\\
&= -x_6\left(\frac{\partial H}{\partial x_2} + \frac{\partial H}{\partial x_3}\frac{\partial x_3}{\partial x_2} + \frac{\partial H}{\partial x_6}\frac{\partial x_6}{\partial x_2}\right)\\
&\qquad -x_3\left(\frac{\partial H}{\partial x_5} + \frac{\partial H}{\partial x_3}\frac{\partial x_3}{\partial x_5} + \frac{\partial H}{\partial x_6}\frac{\partial x_6}{\partial x_5}\right).
\end{aligned}$$

Les expressions : $\frac{\partial x_3}{\partial x_2}, \frac{\partial x_3}{\partial x_5}, \frac{\partial x_6}{\partial x_2}, \frac{\partial x_6}{\partial x_5}$*, ont été déterminées ci-dessus, et en les remplaçant dans l'équation ci-dessus, on obtient*

$$\dot{x}_4 = -x_6\frac{\partial H}{\partial x_2} + x_5\frac{\partial H}{\partial x_3} - x_3\frac{\partial H}{\partial x_5} + x_2\frac{\partial H}{\partial x_6},$$

et par conséquent,

$$\dot{x}_4 = \sum_{j=1}^{6} \boldsymbol{J}_{4j} \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial x_j}, \quad j \neq 3, j \neq 6,$$

est équivalent à

$$\dot{x}_4 = \sum_{j=1}^{6} J_{4j} \frac{\partial H}{\partial x_j}.$$

- *Déterminons $\dot{x}_5$. On a*

$$\begin{aligned}
\dot{x}_5 &= \sum_{j=1}^{6} \boldsymbol{J}_{ij} \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial x_j}, \quad j \neq 3, j \neq 6, \\
&= x_6 \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial x_1} + x_3 \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial x_4}, \\
&= x_6 \left(\frac{\partial H}{\partial x_1} + \frac{\partial H}{\partial x_3}\frac{\partial x_3}{\partial x_1} + \frac{\partial H}{\partial x_6}\frac{\partial x_6}{\partial x_1} \right) \\
&\qquad x_3 \left(\frac{\partial H}{\partial x_4} + \frac{\partial H}{\partial x_3}\frac{\partial x_3}{\partial x_4} + \frac{\partial H}{\partial x_6}\frac{\partial x_6}{\partial x_4} \right).
\end{aligned}$$

Les expressions : $\frac{\partial x_3}{\partial x_1}, \frac{\partial x_3}{\partial x_4}, \frac{\partial x_6}{\partial x_1}, \frac{\partial x_6}{\partial x_4}$*, ont été calculées ci-dessus. En remplaçant ces dernières dans l'équation ci-dessus, on obtient*

$$\dot{x}_5 = x_6 \frac{\partial H}{\partial x_1} - x_4 \frac{\partial H}{\partial x_3} + x_3 \frac{\partial H}{\partial x_4} - x_1 \frac{\partial H}{\partial x_6},$$

et par conséquent,

$$\dot{x}_5 = \sum_{j=1}^{6} \boldsymbol{J}_{5j} \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial x_j}, \quad j \neq 3, j \neq 6,$$

est équivalent à

$$\dot{x}_5 = \sum_{j=1}^{6} J_{5j} \frac{\partial H}{\partial x_j}.$$

References

[1] A. Abraham, J.E. Marsden, *Foundations of mechanics*, Benjamin/Cummings Publishing Co. Inc. Advanced Book Program, Reading, Mass., 1978. MR515141. Zbl 0393.70001.

[2] M. Adler, P., van Moerbeke and P. Vanhaecke, *Algebraic integrability, Painlevé geometry and Lie algebras*, A series of modern surveys in mathematics, Volume **47**, Springer-Verlag, 2004. MR2095251(2006d:37106). Zbl 1083.37001.

[3] V.I. Arnold, *Mathematical methods in classical mechanics*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg- New York, 1978. MR0690288(57:14033b). Zbl 0386.70001.

[4] V.I. Arnold, A.B. Givental, *Symplectic geometry*, Dynamical systems IV. V.I. Arnold and S.P. Novikov, eds., Springer, 1990. MR88b:58044. Zbl 0780.58016.

[5] A. Cannas da Silva, *Lectures on Symplectic Geometry*, Lecture Notes in Mathematics 1764, Springer-Verlag, Berlin, 2001. MR2002i:53105.

[6] L. Euler, *Mémoires Acad. Sc, Berlin*, 1758. Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum, Rostock, 1765.

[7] V. Guillemin, S. Sternberg, *Symplectic techniques in Physics*, Cambridge University press, Cambridge, 1984, second edition 1990. MR770935.

[8] L. Haine, *Geodesic flow on $SO(4)$ and Abelian surfaces*, Math. Ann., **263** (1983), 435-472. MR707241. Zbl 0521.58042.

[9] A. Lesfari, *Systèmes hamiltoniens complètement intégrables*, Aequat. Math., Vol. **82** (2011), 165-200. MR2807041. Zbl 1243.37050.

[10] A. Lesfari, *Algèbres de Lie affines et opérateurs pseudo-différentiels d'ordre infini*, Math. Rep., 14(64), No.1 (2012), 43-69. MR2954048. Zbl 1274.37041.

[11] A. Lesfari, *Rotation d'un corps solide autour d'un point fixe*, Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino, **72**(1-2) (2014), 255-284. MR3601855. Zbl 1373.4004.

[12] A. Lesfari, *Etude géométrique et topologique du flot géodésique sur le groupe des rotations*, Surv. Math. Appl., **11** (2016), 107-134. MR3537664. Zbl 1399.37034.

[13] P. Libermann, C.M. Marle, *Symplectic geometry and analytical mechanics*, D. Reidel, Dordrecht, 1987. MR88c:58016.

[14] A.M. Perelomov, *Integrable systems of classical mechanics and Lie algebras*, Birkhäuser, 1990. MR1048350. Zbl 0717.70003.

[15] J.M. Souriau, *Structure des systèmes dynamiques*, Dunod, 1970. MR260238. Zbl 0186.58001.

[16] A. Weinstein, *Symplectic manifolds and their lagrangian submanifolds*, Adv. in Math., **6** (1971), 329-346. MR286137. Zbl 0213.48203.

[17] A. Weinstein, *Lectures on symplectic manifolds*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, No. 29, American Mathematical Society, 1977. MR464312. Zbl 0406.53031.

[18] A. Weinstein, *Symplectic geometry*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.), **5** (1981), 1-13. MR614310. Zbl 0465.58013.

[19] A. Weinstein, *The local structure of Poisson manifolds*, J. Diff. Geom., **18** (1983), 523-557. MR723816. Zbl 0524.58011.

Ahmed Lesfari
Département de Mathématiques,
Faculté des Sciences, Université Chouaïb Doukkali,
B.P. 20, 24000 El Jadida, Maroc.
e-mail: lesfariahmed@yahoo.fr

License