Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2000. Том 41, № 2

УДК 512.545.4

НАКРЫТИЯ В РЕШЕТКЕ КВАЗИМНОГООБРАЗИЙ ℓ–ГРУПП

О. В. Исаева, Н. Я. Медведев

Аннотация: Построено новое счетное множество различных накрытий многообразия абелевых решеточно упорядоченных групп в решетке квазимногообразий решеточно упорядоченных групп. Библиогр. 6.

Пусть $G = (a)\wr(b)$ — прямое сплетение двух бесконечных циклических групп (a) и (b). Известно, что нижний центральный ряд $G = \gamma_1 G \geq \gamma_2 G \geq \dots \geq \gamma_i G \geq \dots$ группы G имеет единичное пересечение и фактор-группы $\gamma_{k+1}G/\gamma_{k+2}G = ([a, \underbrace{b, \dots b}_{k}]\gamma_{k+2}G)$ — бесконечные циклические группы для любого $k \in \mathbb{N}$, где $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел [1, с. 127].

Для любой бесконечной последовательности $\varepsilon = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n, \dots)$, где $\varepsilon_0 = +1, \varepsilon_i = \pm 1$ $(i \in \mathbb{N})$, определим линейный порядок

$$Q(\varepsilon) = Q(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}, \varepsilon_n, \dots)$$

на группе G следующими соотношениями:

$$b \gg a^{\varepsilon_0} \gg [a, b]^{\varepsilon_1} \gg [a, b, b]^{\varepsilon_2} \gg \dots \gg [a, \underbrace{b, \dots, b}_{k}]^{\varepsilon_k} \gg \dots > e,$$

где $a \gg b > e$ означает, что положительные элементы a и b архимедово неэквивалентны, т. е. $a > b^n$ для любого $n \in \mathbb{N}$.

Через $\varepsilon(n) = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1})$ обозначим бесконечную последовательность ε со свойствами: 1) $\varepsilon_0 = +1$; 2) $\varepsilon_i = \varepsilon_j$, если $i \equiv j \pmod n$ $(n, i, j \in \mathbb{N})$. Всюду в дальнейшем группу G, линейно упорядоченную относительно линейного порядка $Q(\varepsilon)$, будем обозначать через $(G, Q(\varepsilon))$ и последовательность $\varepsilon(n)$ будем называть периодической.

Ранее авторами показано [2], что для периодических последовательностей $\varepsilon(n)$, где n — простое число, квазимногообразия ℓ-групп $q_\ell(G, Q(\varepsilon(n)))$ накрывают многообразие абелевых ℓ-групп $\mathscr{A}$ в решетке квазимногообразий ℓ-групп Λ. Аналогичный результат доказан и для последовательностей

$$\varepsilon(n) = (1, \underbrace{-1, -1, \dots, -1}_{n-1}).$$

Вопрос о том, что $q_\ell(G, Q(\varepsilon(n))$ накрывает $\mathscr{A}$ в решетке квазимногообразий ℓ-групп Λ для произвольной периодической последовательности $\varepsilon(n)$, оставался открытым.

Работа поддержана грантовым центром НГУ Минобразования РФ (грант № 1) и Российским фондом фундаментальных исследований (код проекта 99–01–00156).

В данной работе доказано, что для любой периодической последовательности $\varepsilon(n)$ квазимногообразие $q_\ell(G, Q(\varepsilon(n)))$, порожденное линейно упорядоченной группой $(G, Q(\varepsilon(n)))$, накрывает многообразие абелевых ℓ-групп $\mathscr{A}$ в решетке квазимногообразий ℓ-групп Λ (теорема 1). Найдены необходимые и достаточные условия, при которых эти накрытия различны (теорема 2). С помощью этих результатов показано существование новых накрытий $\mathscr{A}$ в решетке Λ.

Как обычно, $|x| = x \vee x^{-1}$, $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$, $\bar{k}$ — остаток от деления числа k на число n. Основные факты и определения по решеточно и линейно упорядоченным группам можно найти в [3], по теории групп — в [1, 4].

Замечание. Ограничение $\varepsilon_0 = +1$, для последовательностей на самом деле несущественно, ибо линейно упорядоченные группы $(G, Q(\varepsilon))$ и $(G, Q(-\varepsilon))$ порядково изоморфны при изоморфизме, продолжающем отображения $a \to a^{-1}$ и $b \to b$ [5, с. 363]. Здесь $-\varepsilon = (-\varepsilon_0, -\varepsilon_1, \dots, -\varepsilon_n, \dots)$.

Предложение 1. *Для любых двух бесконечных последовательностей ε и ε' таких, что $\varepsilon_0 = \varepsilon'_0 = 1$, линейно упорядоченные группы $(G, Q(\varepsilon))$ и $(G, Q(\varepsilon'))$ порядково изоморфны тогда и только тогда, когда последовательности ε и ε' совпадают.*

Доказательство. Пусть последовательности $\varepsilon = \big(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n, \dots\big)$ и $\varepsilon' = (\varepsilon'_0, \varepsilon'_1, \dots, \varepsilon'_m, \dots)$ совпадают, т. е. $\varepsilon_0 = \varepsilon'_0, \varepsilon_1 = \varepsilon'_1, \varepsilon_2 = \varepsilon'_2, \dots$. Тогда согласно определению порядка на группе G линейно упорядоченная группа $(G, Q(\varepsilon))$ порядково изоморфна линейно упорядоченной группе $(G, Q(\varepsilon'))$.

Предположим, что линейно упорядоченные группы $(G, Q(\varepsilon))$ и $(G, Q(\varepsilon'))$ порядково изоморфны относительно порядкового изоморфизма φ. Тогда порождающие элементы группы $(G, Q(\varepsilon))$ при изоморфизме φ переходят в порождающие элементы группы $(G, Q(\varepsilon'))$ и с учетом порядков на группах $(G, Q(\varepsilon))$ и $(G, Q(\varepsilon'))$ имеем $\varphi(b) = bf_2 > e$, $\varphi(a) = f_1 > e$ в $(G, Q(\varepsilon'))$, где $f_1 = a^{b^k}$, $f_2 \in \operatorname{fun}((b), (a))$. Поскольку $[a, b]^{\varepsilon_1} > e$ в линейно упорядоченной группе $(G, Q(\varepsilon))$, то $\varphi([a, b]^{\varepsilon_1}) = [a^{b^k}, bf_2] = [a, b]^{\varepsilon_1}\varphi_3 > e$ для некоторого элемента $\varphi_3 \in \gamma_3 G$. Так как в линейно упорядоченной группе $(G, Q(\varepsilon))$ выполняется неравенство $|[a, b]| \gg |\varphi_3|$, то $[a, b]^{\varepsilon_1}\varphi_3 > e$ в $(G, Q(\varepsilon'))$ тогда и только тогда, когда $[a, b]^{\varepsilon_1} > e$ в $(G, Q(\varepsilon'))$. Но это возможно лишь в случае когда $\varepsilon_1 = \varepsilon'_1$. Аналогично $[a, b, b]^{\varepsilon_2} > e$ в $(G, Q(\varepsilon))$ и $\varphi([a, b, b]^{\varepsilon_2}) > e$ в $(G, Q(\varepsilon'))$, но $\varphi([a, b, b]^{\varepsilon_2}) = [a, b, b]^{\varepsilon_2}\varphi_4$, где $\varphi_4 \in \gamma_4 G$ и $[a, b, b]^{\varepsilon_2} > e$ в $(G, Q(\varepsilon'))$. А это возможно тогда и только тогда, когда $\varepsilon_2 = \varepsilon'_2$. Продолжая этот процесс получаем, что последовательности $(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n, \dots)$ и $(\varepsilon'_0, \varepsilon'_1, \dots, \varepsilon'_m, \dots)$ совпадают. Предложение доказано.

Следующие утверждения доказаны в [5, с. 367].

Лемма 1. *В линейно упорядоченной группе $(G, Q_n(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}))$ подгруппа $\operatorname{gp}(f, b^s\varphi)$, порожденная элементами f и $b^s\varphi$, порядково изоморфна либо линейно упорядоченной группе*

$$(G, Q_n(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+1}, \dots, \varepsilon_{n-1}, \varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{t-1})),$$

если $\varepsilon_t = +1$, либо линейно упорядоченной группе

$$(G, Q_n(-\varepsilon_t, -\varepsilon_{t+1}, \dots, -\varepsilon_{n-1}, -\varepsilon_0, -\varepsilon_1, \dots, -\varepsilon_{t-1})),$$

если $\varepsilon_t = -1$, где $t \in \{0, 1, \dots, n-1\}$.

Следствие. *Подгруппа* $\mathrm{gp}(b, [a, \underbrace{b, \ldots, b}_{k}])$, *порожденная элементами* b *и* $[a, \underbrace{b, \ldots, b}_{k}]$, *линейно упорядоченной группы* $(G, Q(\varepsilon(n)))$, *порядково изоморфна линейно упорядоченной группе*

$$(G, Q_n(\varepsilon_{\overline{k+1}}, \varepsilon_{\overline{k+2}}, \ldots, \varepsilon_{n-1}, \varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{\bar{k}})),$$

если $\varepsilon_{\overline{k+1}} = +1$, *либо линейно упорядоченной группе*

$$(G, Q_n(-\varepsilon_{\overline{k+1}}, -\varepsilon_{\overline{k+2}}, \ldots, -\varepsilon_{n-1}, -\varepsilon_0, -\varepsilon_1, \ldots, -\varepsilon_{\bar{k}})),$$

если $\varepsilon_{\overline{k+1}} = -1$, *где* $t \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$.

Через $M = \{(G, Q_n)_1, (G, Q_n)_2, \ldots, (G, Q_n)_m\}$ обозначим множество всех порядково неизоморфных линейно упорядоченных групп вида

$$(G, Q_n(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+1}, \ldots, \varepsilon_{n-1}, \varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{t-1})),$$

где $0 \leq t \leq n-1$ и $1 \leq m \leq n$.

Пусть $V = (G, Q(\varepsilon(n)))^J/\mathscr{F}$ — произвольная ультрастепень линейно упорядоченной группы $(G, Q(\varepsilon(n))$, где $\mathscr{F}$ — некоторый ультрафильтр над множеством индексов J.

Лемма 2. *Пусть* $x\mathscr{F}, y\mathscr{F}$ — *неединичные элементы линейно упорядоченной группы* V. *Если* $[x, y]\mathscr{F} \neq e$, *то подгруппа* $H = \mathrm{gp}(|[x, y]|\mathscr{F}, (|x| \vee |y|)\mathscr{F})$, *порожденная элементами* $|[x, y]|\mathscr{F}$ *и* $(|x| \vee |y|)\mathscr{F}$, *порядково изоморфна одной из линейно упорядоченных групп множества* M.

Доказательство. Пусть $x\mathscr{F}, y\mathscr{F} \in V$ и $[x, y]\mathscr{F} \neq e$. Тогда $(|x| \vee |y|)\mathscr{F} \neq e$, где $|[x, y]|\mathscr{F} = (\ldots, |[x, y]|_i, \ldots)\mathscr{F}$ и $(|x| \vee |y|)\mathscr{F} = (\ldots, (|x| \vee |y|)_i, \ldots)\mathscr{F}$. Пусть $I = \{i \in J | [x, y]_i \neq e\}$. Тогда $I \in \mathscr{F}$ и для любого индекса $i \in I$ подгруппа $\mathrm{gp}(|[x, y]|_i, (|x| \vee |y|)_i)$ порядково изоморфна по лемме 1 одной из линейно упорядоченных групп из M. Поэтому $I = I_1 \cup I_2 \cup \cdots \cup I_m$, где $I_k = \{i \in I |\ \mathrm{gp}(|[x, y]|_i, (|x| \vee |y|)_i) \cong (G, Q_n)_k\}$ и $I_k \cap I_r = \varnothing$, если $k \neq r$, $k, r \in \{1, \ldots, m\}$. Но тогда из определения ультрапроизведения следует, что для некоторого индекса k_0 выполняется $I_{k_0} \in \mathscr{F}$ и, следовательно, $\mathrm{gp}(|[x, y]|\mathscr{F}, (|x| \vee |y|)\mathscr{F})$ порядково изоморфна линейно упорядоченной группе $(G, Q_n)_{k_0}$.

Замечание. Если $[x, y]\mathscr{F} = e$, то подгруппа $H = \mathrm{gp}(|[x, y]|\mathscr{F}, (|x| \vee |y|)\mathscr{F})$, порожденная элементами $|[x, y]|\mathscr{F}, (|x| \vee |y|)\mathscr{F}$, порядково изоморфна бесконечной циклической группе $\mathrm{gp}((|x| \vee |y|)\mathscr{F})$.

Лемма 3. *Пусть* $D = \overline{\prod\limits_{k \in K}} V_k$ — *декартово произведение линейно упорядоченных групп* V_k, *где каждая линейно упорядоченная группа* V_k *является некоторой ультрастепенью линейно упорядоченной группы* $(G, Q(\varepsilon(n)))$. *Тогда любая неабелева* ℓ*-подгруппа* ℓ*-группы* D *содержит линейно упорядоченную группу из множества* M *и, значит, все линейно упорядоченные группы множества* M.

Доказательство. Пусть H — любая неабелева ℓ-подгруппа ℓ-группы D и x, y — положительные неединичные элементы группы H такие, что $|[x, y]| \neq e$.

Обозначим через $J(1), \ldots, J(t)$ $(1 \leq t \leq m)$ подмножества множества индексов K такие, что для любого индекса $j \in J(s)$ $(1 \leq s \leq t)$ подгруппа $\mathrm{gp}(|[x, y]|_j,$

$(|x| \vee |y|)_j)$, порожденная элементами $|[x,y]|_j, (|x| \vee |y|)_j$, порядково изоморфна одной из линейно упорядоченных групп $(G, Q_n)_s$ множества M. Поскольку $[x,y] \neq e$, подмножества $J(1), \dots, J(t)$ непусты и имеют пустое пересечение.

Далее, через $J(t+1)$ обозначим подмножество множества индексов K такое, что $|[x,y]|_j = e, (|x| \vee |y|)_j \neq e$ для любого $j \in J(t+1)$ и подгруппа $\mathrm{gp}(|[x,y]|_j, (|x| \vee |y|)_j)$, порожденная элементами $|[x,y]|_j$ и $(|x| \vee |y|)_j$, порядково изоморфна бесконечной циклической группе $\mathrm{gp}((|x| \vee |y|)_j)$. Через $J(t+2)$ обозначим подмножество множества индексов K такое, что $(|x| \vee |y|)_j = e$ для любого индекса $j \in K$. Отметим, что подмножества $J(t+1)$ и $J(t+2)$ могут быть пустыми.

Таким образом, $K = J(1) \cup \dots \cup J(t) \cup J(t+1) \cup J(t+2)$.

Рассмотрим случай $J(t+1) \neq \varnothing$. Возьмем элементы $|[x,y]|_{J(i)}$ $(i = 1, \dots, t)$ и $(|x| \vee |y|)_{J(i)}$ $(i = 1, \dots, t+1)$, где

$$|[x,y]|_{J(i)}(j) = \begin{cases} |[x,y]|_j, & \text{если } j \in J(i), \\ e, & \text{если } j \notin J(i), \end{cases}$$

$$(|x| \vee |y|)_{J(i)}(j) = \begin{cases} (|x| \vee |y|)_j, & \text{если } j \in J(i), \\ e, & \text{если } j \notin J(i). \end{cases}$$

Пусть $G_i = \mathrm{gp}(|[x,y]|)_{J(i)}, (|x| \vee |y|)_{J(i)})$ — группа, порожденная элементами $|[x,y]|_{J(i)}$ и $(|x| \vee |y|)_{J(i)}$ $(i = 1, \dots, t)$. Тогда $G_{t+1} = \mathrm{gp}((|x| \vee |y|)_{J(t+1)})$ — бесконечная циклическая группа, порожденная элементом $(|x| \vee |y|)_{J(t+1)}$. Поэтому группа $\mathrm{gp}(|x| \vee |y|, |[x,y]|)$, порожденная элементами $|x| \vee |y|$ и $|[x,y]|$, является ℓ-подгруппой ℓ-произведения $G_1 \times G_2 \times \dots \times G_t \times G_{t+1}$.

Так как для любого $i \in \{1, \dots, t\}$ линейно упорядоченная группа G_i порядково изоморфна одной из линейно упорядоченных групп множества M, можно считать, что $|x| \vee |y| = (b_{J(1)}, b_{J(2)}, \dots, b_{J(t+1)})$, $|[x,y]| = (a_{J(1)}, a_{J(2)}, \dots, a_{J(t)}, e)$, где $\mathrm{gp}(a_{J(s)}, b_{J(s)})$ порядково изоморфна линейно упорядоченной группе $G_s \in M$, $s \in \{1, \dots, t\}$, и $G_{t+1} = \mathrm{gp}(b_{J(t+1)})$ — бесконечная циклическая группа.

Пусть $G_1 = (G, Q(\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_{n-1}))$, где согласно условиям леммы 1 $\delta_0 = +1$, $\delta_i = \pm 1$ $(i \in \{1, \dots, n-1\})$ и $[x,y] \neq e$. Тогда $b_{J(1)} \neq e$ и $a_{J(1)}^{\delta_0} > e$ и поэтому $a_{J(1)}^{\delta_0} \vee e > e$.

Рассмотрим элемент

$$r_1(x,y) = [[x,y], |x| \vee |y|]^{\delta_1} \vee e.$$

Тогда $[a_{J(s)}, b_{J(s)}]^{\delta_1} \vee e > e$ для всех тех индексов $J(s)$, для которых знак δ_1 совпадает со знаком второго члена последовательности, определяющего порядок на группе G_s, а для остальных индексов $J(i)$ будет $[a_{J(i)}, b_{J(i)}]^{\delta_1} \vee e = e$.

Аналогично предыдущему рассмотрим элемент

$$r_2(x,y) = [r_1(x,y), |x| \vee |y|]^{\delta_2} \vee e.$$

Тогда

$$[r_1(x,y)_{J(s)}, (|x| \vee |y|)_{J(s)}]^{\delta_2} \vee e > e$$

для всех тех $J(s)$, для которых знак δ_2 совпадает со знаком третьего члена последовательности, определяющего порядок на группе G_s, а для остальных индексов $J(i)$ получаем $[a_{J(i)}, b_{J(i)}, b_{J(i)}]^{\delta_2} \vee e = e$ и т. д.

Тогда

$$r_n(x,y) = [r_{n-1}(x,y), |x| \vee |y|]^{\delta_0} \vee e > e$$

для всех тех компонент $J(s)$, для которых знак δ_0 совпадает со знаком n-го члена последовательности, определяющего порядок на группе G_s, а для остальных индексов $J(i)$ получаем $[a_{J(i)}, \underbrace{b_{J(i)}, \ldots, b_{J(i)}}_{n}]^{\delta_0} \vee e = e$. В этом случае подгруппа $H = \mathrm{gp}(r_n(x,y), |x| \vee |y|)$, порожденная элементами $r_n(x,y)$ и $|x| \vee |y|$, порядково изоморфна линейно упорядоченной группе $(G, Q_n(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}))$.

Случай $J(t+1) = \varnothing$ рассматривается аналогично.

Замечание. Пусть $[x,y] = e$ и $|x| \vee |y| \neq e$. Тогда $\mathrm{gp}([x,y], |x| \vee |y|)$ порядково изоморфна бесконечной циклической группе $(|x| \vee |y|)$. Если же $[x,y] = e$, $|x| \vee |y| = e$, то $\mathrm{gp}([x,y], |x| \vee |y|)$ порядково изоморфна единичной группе E.

По теореме А. И. Мальцева [6, с. 273] квазимногообразие $q_\ell(G, Q_n(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}))$, порожденное линейно упорядоченной группой $(G, Q_n(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}))$, совпадает с $SPU(G, Q_n(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}))$, где S, P, U — операторы взятия ℓ-подгрупп, декартовых произведений и ультрапроизведений соответственно. Поэтому если H — неабелева ℓ-группа из $q_\ell(G, Q_n(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}))$, то по лемме 3 H содержит линейно упорядоченную подгруппу, порожденную элементами $r_{n-1}(x,y)$ и $|x| \vee |y|$, порядково изоморфную линейно упорядоченной группе $(G, Q_n(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}))$. Тем самым доказана

Теорема 1. *Для любой периодической последовательности $\varepsilon(n)$ ($n \in \mathbb{N}$) квазимногообразие ℓ-групп*

$$q_\ell(G, Q_n(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1})),$$

порожденное линейно упорядоченной группой $(G, Q_n(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}))$, накрывает многообразие абелевых ℓ-групп в решетке квазимногообразий ℓ-групп Λ.

Теперь рассмотрим вопрос: когда квазимногообразия $q_\ell(G, Q_n(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}))$ различны? Пусть $(G, Q_n(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}))$ и $\big(G, Q_m(\varepsilon'_0, \varepsilon'_1, \ldots, \varepsilon'_{m-1})\big)$ — две линейно упорядоченные группы с определенными ранее порядками $Q_n(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1})$ и $Q_n\big(\varepsilon'_0, \varepsilon'_1, \ldots, \varepsilon'_{m-1}\big)$.

Пусть $M' = \{(G, Q_m)_1, (G, Q_m)_2, (G, Q_m)_r\}$ $(1 \leq r \leq m)$ — все порядково неизоморфные линейно упорядоченные подгруппы группы $\big(G, Q_m\big(\varepsilon'_0, \varepsilon'_1, \ldots, \varepsilon'_{m-1}\big)\big)$, определенные условиями леммы 1.

Используя следствие, нетрудно заметить, что если множества M и M' содержат порядково изоморфные группы, то любая линейно упорядоченная группа из M порядково изоморфна линейно упорядоченной группе из M' и наоборот, т. е. множество M определяется единственным образом любой своей линейно упорядоченной группой. Поэтому считаем множества M и M' различными, если группы из этих множеств попарно неизоморфны, и равными, если эти множества содержат порядково изоморфные группы.

Теорема 2. *Для любых периодических последовательностей $\varepsilon(n)$ и $\varepsilon'(m)$, где $n, m \in \mathbb{N}$, квазимногообразия $q_\ell\big(G, Q_m\big(\varepsilon'_0, \varepsilon'_1, \ldots, \varepsilon'_{m-1}\big)\big)$ и $q_\ell(G, Q_n(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}))$ различны тогда и только тогда, когда различны множества M и M'.*

Доказательство. Пусть квазимногообразия $q_\ell(G, Q_n(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}))$ и $q_\ell(G, Q_m(\varepsilon'_0, \varepsilon'_1, \ldots, \varepsilon'_{m-1}))$ различны, т. е.

$$q_\ell(G, Q_n(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1})) \cap q_\ell(G, Q_m(\varepsilon'_0, \varepsilon'_1, \ldots, \varepsilon'_{m-1})) = \mathscr{A}.$$

Покажем, что и множества M и M' для этих квазимногообразий различны. Пусть, напротив, множества M и M' содержат порядково изоморфные линейно упорядоченные группы. Тогда

$$q_\ell(G, Q_n(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1})) \cap q_\ell\big(G, Q_m\big(\varepsilon'_0, \varepsilon'_1, \ldots, \varepsilon'_{m-1}\big)\big) \neq \mathscr{A},$$

что невозможно.

Обратно, пусть множества M и M' различны и

$$q_\ell(G, Q_n(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1})) = q_\ell\big(G, Q_m\big(\varepsilon'_0, \varepsilon'_1, \dots, \varepsilon'_{m-1}\big)\big).$$

Тогда $(G, Q_n(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1})) \in q_\ell(G, Q_m(\varepsilon'_0, \varepsilon'_1, \dots, \varepsilon'_{m-1}))$. По лемме 3 линейно упорядоченная группа $(G, Q_n(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}))$ содержит в качестве подгруппы линейно упорядоченную группу $\mathrm{gp}(r_m(x,y), |x| \vee |y|)$. Поэтому неабелева линейно упорядоченная группа $\mathrm{gp}(r_m(x,y), |x| \vee |y|)$ принадлежит M. Следовательно, $(G, Q_n(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1})) \in M \cap M'$; противоречие с тем, что множества M и M' различны. Теорема доказана.

Используя теоремы 1 и 2, можно построить новые счетные множества различных накрытий $\mathscr{A}$ в решетке Λ.

Пусть $\varepsilon(2k) = (\underbrace{+1, \dots, +1}_{k}, \underbrace{-1, \dots, -1}_{k})$. Тогда непосредственная проверка показывает, что квазимногообразия ℓ-групп $q_\ell(G, Q(\varepsilon(2k)))$, порожденные линейно упорядоченными группами $(G, Q(\varepsilon(2k)))$ $(k \in \mathbb{N},\ k \geq 3)$ являются различными накрытиями $\mathscr{A}$ в решетке Λ и отличны от найденных ранее накрытий в работе [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп. М.: Наука, 1972.
2. *Исаева О. В., Медведев Н. Я.* Накрытия в решетке квазимногообразий ℓ-групп // Сиб. мат. журн. 1992. Т. 33, № 2. С. 102–107.
3. *Копытов В. М.* Решеточно упорядоченные группы. М.: Наука, 1984.
4. *Курош А. Г.* Теория групп. М.: Наука, 1967.
5. *Kopytov V. M., Medvedev N. Ya.* The theory of lattice-ordered groups. Dordrecht; Boston; London: Kluwer Acad. Publ., 1994.
6. *Мальцев А. И.* Алгебраические системы. М.: Наука, 1970.

Статья поступила 22 марта 1999 г.

г. Барнаул
Алтайский гос. университет