Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2000. Том 41, № 2

УДК 512

КОНЕЧНЫЕ РАЗРЕШИМЫЕ И НИЛЬПОТЕНТНЫЕ ГРУППЫ С ОГРАНИЧЕНИЕМ НА РАНГ ЦЕНТРАЛИЗАТОРА АВТОМОРФИЗМА ПРОСТОГО ПОРЯДКА

Е. И. Хухро

Аннотация: Пусть конечная разрешимая группа G допускает автоморфизм простого порядка p с централизатором ранга r. Доказывается, что фактор-группа $G/F_5(G)$ по пятому члену ряда Фитинга имеет (p,r)-ограниченный ранг (теорема 1). В случае, когда группа G нильпотентна, доказывается, что она обладает подгруппой H, которая нильпотентна p-ограниченной ступени и имеет (p,r,d)-ограниченный коранг, где d — ступень разрешимости группы G (теорема 2). Здесь по определению условие на «коранг» означает, что H и G связывает субнормальный ряд (p,r,d)-ограниченной длины, все факторы которого имеют (p,r,d)-ограниченные ранги. Соединение теорем 1 и 2 дает описание группы G в зависимости от ее ступени разрешимости d: имеется нормальный ряд длины 5, каждый фактор которого содержит нильпотентную подгруппу (p,r,d)-ограниченного коранга и p-ограниченной ступени нильпотентности (следствие 2). Остаются открытыми вопросы о том, насколько можно уменьшить нильпотентную длину подгруппы ограниченного коранга в теореме 1 и можно ли в теореме 2 избавиться от зависимости коранга от ступени разрешимости. Только для $p = 2$ в известном смысле неулучшаемые результаты получены ранее Шумяцким. Доказательство теоремы 1 основано на теоремах типа Холла — Хигмэна. В доказательстве теоремы 2 развивается модификация метода «градуированных централизаторов» для модулей над групповыми кольцами. Библиогр. 16.

Юрию Леонидовичу Ершову
в связи с шестидесятилетием

§ 1. Введение

Будем для краткости говорить, что величина $(a, b, \dots)$-*ограничена*, если она ограничена сверху некоторой функцией, зависящей только от $a, b, \dots$.

Если конечная группа содержит элемент простого порядка p с централизатором порядка m, то она содержит подгруппу (p, m)-ограниченного индекса, которая нильпотентна p-ограниченной ступени. Этот результат складывается из работы Фонга [1], где по модулю классификации конечных простых групп ограничен индекс разрешимого радикала, работы Хартли и Майкснера [2], где для разрешимой группы ограничен индекс подгруппы Фиттинга, и работ Е. И. Хухро [3, 4], где рассмотрен случай нильпотентной группы. (Эти результаты являются обобщениями теорем Томпсона [5] и Хигмэна — Крекнина — Кострикина [6–8] о регулярных, т. е. не имеющих нетривиальных неподвижных точек, автоморфизмах простого порядка.)

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 99–01–00576).

Имеется своего рода программа замены ограничений на порядки подгрупп или фактор-групп ограничениями на ранги. По определению конечная группа имеет *ранг* r, если r — наименьшее натуральное число такое, что каждая ее подгруппа может быть порождена r элементами. Возникает естественный вопрос: справедливы ли аналоги упомянутых результатов для конечных групп, содержащих элемент простого порядка с ограничением на ранг его централизатора? Ясно, что достаточно рассмотреть конечную группу G, допускающую автоморфизм φ простого порядка p с централизатором данного ранга r. Примеры показывают, что, вообще говоря, нельзя ограничить ранг фактор-группы $G/S(G)$ по разрешимому радикалу, т. е. аналог теоремы Фонга [1] не справедлив. В случае разрешимой группы вполне законченные результаты получены пока только для $p = 2$ Шумяцким [9].

В настоящей работе случаи, когда группа G разрешима или нильпотентна, рассматриваются для произвольного простого p.

В случае, когда группа G разрешима, мы доказываем, что фактор-группа $G/F_5(G)$ по пятому члену ряда Фиттинга имеет (p,r)-ограниченный ранг (теорема 1, дающая даже несколько более сильное утверждение). Доказательство основано на теоремах типа Холла — Хигмэна, так как в них фактически ограничивается именно размерность («ранг») пространства в зависимости от размерности пространства неподвижных точек. Заметим, что нельзя получить полный аналог теоремы Хартли — Майкснера: примеры показывают, что нельзя ограничить ранг фактор-группы $G/F(G)$ по подгруппе Фиттинга. Наша гипотеза состоит в том, что для некоторых (суб)нормальных подгрупп $H_1 \geq H_2$ фактор-группа G/H_1 и группа H_2 имеют (p,r)-ограниченный ранг, а фактор-группа H_1/H_2 нильпотентна. Все же полученный результат в значительной степени сводит вопрос о строении разрешимой группы G к случаю нильпотентных групп.

В случае, когда группа G нильпотентна, мы доказываем, что G обладает подгруппой H, которая нильпотентна p-ограниченной ступени и имеет «(p,r,d)-ограниченный коранг», где d — ступень разрешимости группы G (теорема 2). Здесь по определению условие на «коранг» означает, что H и G связывает субнормальный ряд (p,r,d)-ограниченной длины, все факторы которого имеют (p,r,d)-ограниченные ранги. Пока не удается избавиться от зависимости «коранга» от ступени разрешимости d; неясно также, можно ли здесь добиться нормальности подгруппы H. (Только для $p = 2$ в известном смысле неулучшаемый результат получен Шумяцким [9]: тогда G содержит нормальную подгруппу ограниченного коранга, которая нильпотентна ступени 2 с коммутантом ограниченного ранга.)

Теорему 2 можно применить к нильпотентным факторам, которые дает теорема 1, так что в случае разрешимой группы G получается описание в зависимости от ее ступени разрешимости d: имеется нормальный ряд длины 5, каждый фактор которого содержит нильпотентную подгруппу (p,r,d)-ограниченного коранга и p-ограниченной ступени нильпотентности (следствие 2).

В работе [4], где рассматривались нильпотентные группы с ограничением на порядок централизатора автоморфизма простого порядка, применялись присоединенные кольца Ли. Хотя и нетривиальным образом, теорема о группах с их помощью сводилась к аналогичной теореме о кольцах Ли, которая также доказана в [4]. Незначительная модификация доказательства из [4] позволяет получить полный аналог для кольца Ли L с автоморфизмом простого порядка p, у которого ранг аддитивной подгруппы неподвижных точек конечен и равен r: тогда имеется подкольцо H, нильпотентное p-ограниченной ступени, для которого ранг аддитивной фактор-группы L/H ограничен в терминах p и r (теорема 3). Однако пока не удается получить аналогичный результат для конечных нильпотентных групп (кроме как при $p = 2$ в [9]). Трудность состоит в том, что переход к присоединенному кольцу Ли может сильно увеличивать ранг централизатора индуцированного автоморфизма.

Отметим, что для метабелевых групп Н. Ю. Макаренко [10] все же удалось использовать модифицированный метод «градуированных централизаторов» для присоединенных колец Ли для доказательства даже более сильного результата: если группа G вдобавок метабелева, то $(p+1)$-й член нижнего центрального ряда подгруппы $[G, \varphi]$ имеет (p, r)-ограниченный ранг, откуда следует также наличие нормальной подгруппы (p, r)-ограниченного коранга и ступени нильпотентности $p + 1$. Кроме того, для нильпотентных групп без кручения можно без труда получить полный аналог теоремы для алгебр Ли, используя соответствие Мальцева, основанное на формуле Бейкера — Хаусдорфа.

В настоящей работе для случая нильпотентной группы развивается модификация метода «градуированных централизаторов» из [4] для модулей над групповыми кольцами. При существенных отличиях от доказательств в [4] многие идеи этого метода удалось использовать в новом контексте в настоящей работе. Можно надеяться, что новый способ рассуждений найдет какие-то другие применения. Например, в качестве побочного результата получается новый вариант сведéния к кольцам Ли в теореме из [4] об автоморфизме с ограничением на порядок централизатора. Дело в том, что по теореме Хигмэна в этой ситуации сразу получается «слабая» оценка ступени разрешимости группы в терминах порядка автоморфизма и порядка его централизатора, и можно вести индукцию по ступени разрешимости. Заметим, что как в этом новом сведéнии, так и в доказательстве теоремы 2 в настоящей работе сначала получается подгруппа ограниченного индекса или «коранга», которая нильпотентна «слабо» ограниченной ступени. Подгруппа же «сильно» ограниченной ступени нильпотентности получается многократным применением теоремы о кольцах Ли к присоединенному кольцу Ли; это рассуждение принадлежит Н. Ю. Макаренко.

Отметим, что для всех функций, участвующих в формулировках результатов настоящей работы, можно было бы выписать явные верхние оценки.

§ 2. Ограничение нильпотентной длины

Зафиксируем для дальнейшего обозначение G для конечной разрешимой группы, допускающей автоморфизм φ простого порядка p такой, что подгруппа неподвижных точек (централизатор) $C_G(\varphi)$ имеет ранг r.

Сначала приведем несложный пример, показывающий, что нельзя ограничить ранг фактор-группы $G/F(G)$ по подгруппе Фиттинга.

Пример. Пусть $p_1, p_2, \dots, p_n$ — различные простые числа, сравнимые с 1 по модулю 3, и пусть E_i — элементарная абелева группа порядка p_i^2. Пусть для каждого i группа диэдра $H_i = \left\langle a_i, b_i \mid a_i^3 = b_i^2 = 1,\ a_i^{b_i} = a_i^{-1} \right\rangle$ точно действует на E_i как группа автоморфизмов, причем так, что централизатор $C_{E_i}(b_i)$ автоморфизма порядка 2 циклический, скажем, порожденный элементом $c_i \in E_i$. В прямом произведении $E_1H_1 \times \dots \times E_nH_n$ сопряжение элементом $b_1 \cdots b_n$ индуцирует автоморфизм φ порядка 2 группы $G = E_1\langle a_1\rangle \times \dots \times E_n\langle a_n\rangle$. Его централизатор $C_G(\varphi) = \langle c_1\rangle \times \dots \times \langle c_n\rangle$ — циклическая группа порядка $p_1 \cdots p_n$. В то же время $F(G) = E_1 \cdots E_n$, так что $G/F(G)$ — элементарная абелева 3-группа ранга n.

Видно, что в этом примере существенно используются различные простые делители порядка $|F(G)|$. Далее мы увидим, что если $F(G)$ — q-группа, то ранг холловой q'-подгруппы фактор-группы $G/F(G)$ ограничен в терминах p и r.

Для удобства напомним несколько хорошо известных фактов. Первые две леммы относятся к фольклору. Здесь и далее мы обозначаем индуцированный автоморфизм фактор-группы той же буквой.

Лемма 1. *Пусть α — автоморфизм конечной группы H. Если N — нормальная α-инвариантная подгруппа взаимно простого порядка:* $(|N|, |\alpha|) = 1$, *то $C_{H/N}(\alpha) = C_H(\varphi)N/N$.*

Лемма 2. *Если конечная абелева p-группа A допускает автоморфизм φ порядка p, централизатор которого имеет ранг r, то ранг группы A не превосходит pr.*

Доказательство. Ранг A равен рангу подгруппы $\Omega_1(A) = \{a \in A \mid a^p = 1\}$, которую можно рассматривать как векторное пространство над полем из p элементов. Так как $0 = \varphi^p - 1 = (\varphi - 1)^p$, все собственные числа линейного преобразования φ равны 1. Число клеток в жордановой форме φ равно размерности централизатора $C_{\Omega_1(A)}(\varphi)$, а размер каждой клетки не больше p.

Следующая лемма появилась независимо и одновременно в работах Ю. М. Горчакова [11], Ю. И. Мерзлякова [12] и как «лемма Холла» в работе Роузблэйда [13].

Лемма 3 (Горчаков — Мерзляков — Холл). *Пусть q — простое число. Ранг q-группы автоморфизмов конечной q-группы ранга r ограничен в терминах r.*

(Хотя в работах [11–13] рассматривались q-группы автоморфизмов абелевых конечных q-групп ранга r, общий результат нетрудно вывести из этого частного случая, см., например, [9, лемма 4.2].)

Следствие 1. *Если конечная группа G допускает автоморфизм φ простого порядка p с централизатором ранга r, то ранг силовской p-подгруппы группы G ограничен в терминах p и r.*

Доказательство. Включая $\langle\varphi\rangle$ в силовскую p-подгруппу полупрямого произведения $G\langle\varphi\rangle$, можно рассматривать φ-инвариантную силовскую p-подгруппу P группы G. Ранг максимальной абелевой нормальной подгруппы A полупрямого произведения $P\langle\varphi\rangle$ не превосходит $p(r+1)$ по лемме 2. Так как $C_{P\langle\varphi\rangle}(A) = A$, фактор-группа $P/(P \cap A) \cong PA/A$ изоморфно вкладывается в силовскую p-подгруппу группы автоморфизмов группы A. По лемме 3 ранг $P/(P \cap A)$ ограничен в терминах ранга A.

Следующая лемма также должна быть хорошо известна.

Лемма 4. *Пусть Q — конечная q-группа линейных преобразований векторного пространства V над полем характеристики, отличной от q. Тогда ранг группы Q ограничен в терминах размерности V.*

Доказательство. Достаточно ограничить ранг максимальной абелевой нормальной подгруппы A группы Q. Ведь ранг Q/A ограничен в терминах ранга A по лемме 3, поскольку Q/A вкладывается в группу автоморфизмов группы A. Поскольку все элементы из A полупросты ввиду условия на характеристику, расширяя поле до алгебраически замкнутого, мы можем выбрать базис полученного пространства так, что в нем все матрицы, представляющие элементы из A, будут диагональны. Так как конечные мультипликативные подгруппы полей циклические, ранг A не превосходит $\dim V$.

Можно также было бы вывести лемму 4 из теоремы Колчина — Мальцева, которая нам далее понадобится в следующей форме (см., например, [14, 21.1.5, 21.1.7]).

Теорема Колчина — Мальцева. *Разрешимая линейная группа степени n имеет подгруппу конечного n-ограниченного индекса, коммутант которой нильпотентен ступени $\leq n$.*

Приведем для удобства формулировку леммы из [2], которая является одной из «немодулярных» теорем типа Холла — Хигмэна.

Лемма 5 [2, лемма]. *Пусть $T\langle\varphi\rangle$ — полупрямое произведение нормальной t-подгруппы T и циклической группы $\langle\varphi\rangle$ порядка p, где p и t — различные простые числа. Предположим, что $T = [T,\varphi] \neq 1$, фактор-группа $T/Z(T)$ абелева периода t, а группа $T\langle\varphi\rangle$ точно и неприводимо действует на векторном пространстве V над алгебраически замкнутым полем, характеристика которого не равна ни t, ни p. Тогда либо*

(а) $\dim V = p \cdot \dim C_V(\varphi)$,

либо

(б) *группа T экстраспециальна, $[Z(T),\varphi] = 1$, и порядок $|T|$ ограничен в терминах p и $\dim C_V(\varphi)$.*

Следующее предложение является ключевым для ограничения нильпотентной длины.

Предложение 1. *Пусть конечная группа G допускает автоморфизм φ простого порядка p с централизатором ранга r. Предположим, что $F(G)$ — q-группа, а фактор-группа $G/F(G)$ — t-группа для различных простых чисел q и t. Тогда ранг фактор-группы $G/F(G)$ ограничен в терминах p и r.*

Доказательство. Ранг силовской p-подгруппы группы G ограничен в терминах p и r в силу следствия 1. Поэтому можно считать, что $t \neq p$. Если $q = p$, то ранг $F(G)$ ограничен в терминах p и r. Фактор-группа $G/F(G)$ точно действует сопряжением на фактор-группе $F(G)/\Phi(F(G))$ ограниченного ранга. Значит, ее ранг ограничен по лемме 4.

Итак, можно считать, что простые числа p, q и t попарно различны. Пусть C — критическая подгруппа Томпсона группы $T = G/F(G)$, т. е. характеристическая подгруппа ступени нильпотентности ≤ 2, содержащая свой централизатор (см., например, [15, теорема 5.3.11]). Если мы докажем, что ранг C ограничен, то и ранг T будет ограничен по лемме 3, ибо фактор-группа $T/C_T(C) = T/Z(C)$ изоморфно вкладывается в группу автоморфизмов группы C. Так как подгруппа C φ-инвариантна, можно с самого начала считать, что группа T нильпотентна ступени ≤ 2. Пусть A — максимальная абелева нормальная подгруппа группы T. По лемме 3 ранг T/A ограничен в терминах ранга A. Поскольку $\Omega_1(T) \supseteq \Omega_1(A)$, достаточно оценить ранг подгруппы $\Omega_1(T)$. Поэтому можно считать, что $\Omega_1(T) = T$. Так как группа T нильпотентна ступени ≤ 2, фактор-группа $T/Z(T)$ и коммутант $[T,T]$ имеют период t. В силу леммы 1 можно также считать, что $T = [T,\varphi]$. Тогда $C_T(\varphi) \leq [T,T]$, и потому централизатор $C_T(\varphi)$, будучи ранга $\leq r$, имеет порядок $\leq t^r$.

Группа $T\langle\varphi\rangle$ точно действует на фактор-группе $F(G)/\Phi(F(G))$, которую можно рассматривать как векторное пространство над полем из q элементов. (Если бы автоморфизм φ централизовал $F(G)$, то φ централизовал бы и T.) Расширяя основное поле до алгебраически замкнутого поля k, мы сохраним размерность подпространства неподвижных точек автоморфизма φ, которая не превосходит r. Согласно проведенной редукции и полученного ограничения на порядок $|C_T(\varphi)| \le t^r$ предложение вытекает из следующей леммы (в условии которой в интересах индукции не предполагается, что $T = [T, \varphi]$).

Лемма 6. *Пусть $T\langle\varphi\rangle$ — полупрямое произведение нормальной t-подгруппы T и циклической группы $\langle\varphi\rangle$ порядка p, где p и t — различные простые числа. Предположим, что $|C_T(\varphi)| = t^s$, а фактор-группа $T/Z(T)$ — абелева периода t. Пусть группа $T\langle\varphi\rangle$ точно действует линейными преобразованиями на векторном пространстве V над алгебраически замкнутым полем k, характеристика которого не равна ни t, ни p. Если $\dim C_V(\varphi) = r$, то ранг группы T ограничен в терминах p, r и s.*

Доказательство. Индукция по s. Случай $s = 0$ удобно рассмотреть в общем контексте. По лемме 1 можно считать, что $T = [T, \varphi]$ (выполняется автоматически при $s = 0$). По теореме Машке разложим V в прямую сумму неприводимых $kT\langle\varphi\rangle$-подмодулей и выделим среди них те, на которых T действует нетривиально; пусть

$$V_1 \oplus \cdots \oplus V_n \tag{1}$$

— сумма всех таких $kT\langle\varphi\rangle$-подмодулей. Пусть $r_i = \dim C_{V_i}(\varphi)$ — размерности подпространств неподвижных точек; ясно, что $\sum\limits_i r_i \le \dim C_V(\varphi) \le r$. (При этом не исключаются случаи $r_i = 0$.)

Для каждого i обозначим через T_i ядро действия группы T на V_i, т. е. $T_i = C_T(V_i)$. Пространство V_i и действующая на нем группа $(T/T_i)\langle\varphi\rangle$ удовлетворяют условию леммы 5. Согласно этой лемме либо $\dim V_i = pr_i$, либо порядок группы T/T_i, а значит, и ее ранг ограничен в терминах p и r_i. В первом случае по лемме 4 также получаем, что ранг T/T_i ограничен в терминах p и r_i. Так как $\sum\limits_i r_i \le r$, число тех слагаемых V_i, для которых $r_i \ne 0$, ограничено в терминах r.

Пусть U — сумма тех слагаемых V_i в (1), где $r_i \ne 0$, и пусть $S = C_T(U)$. Ясно, что подгруппа S φ-инвариантна. Группа T/S точно действует на U и потому изоморфно вкладывается в прямое произведение фактор-групп T/T_i по тем i, для которых $r_i \ne 0$. Поэтому ранг T/S ограничен в терминах p и r.

Остается оценить ранг S. Обозначим через W сумму тех слагаемых из (1), которые не входят в U, т. е. всех тех V_j, для которых $C_{V_j}(\varphi) = 0$. Группа S точно действует на W. В силу леммы 1 и индукции по s можно считать, что $S = [S, \varphi]$ (выполняется автоматически при $s = 0$). Разложим W в прямую сумму неприводимых $kS\langle\varphi\rangle$-модулей: $W = W_1 \oplus \cdots \oplus W_m$. Без ограничения общности можно считать, что группа S действует на W_1 нетривиально. Пусть $S_1 = C_S(W_1)$ — ядро действия S на W_1. Применяя лемму 5 к действию $(S/S_1)\langle\varphi\rangle$ на W_1, мы можем получить только случай (б) из ее заключения, так как $C_W(\varphi) = 0$. Поэтому S/S_1 — экстраспециальная группа, на центре которой φ действует тривиально. (В случае $s = 0$ такое невозможно; это означает, что тогда $S = 1$ и доказательство закончено.) По лемме 1 получаем $|C_S(\varphi)| = |C_{S/S_1}(\varphi)| \cdot |C_{S_1}(\varphi)| = t \cdot |C_{S_1}(\varphi)|$. Так как ранг S/S_1 ограничен, остается применить предположение индукции к группе $S_1\langle\varphi\rangle$. Лемма 6, а значит, и предложение 1 доказаны.

Следующий результат был получен Ковачем [16] на основе теорем Холла — Хигмэна.

Лемма 7 [16]. *Если d — максимум рангов силовских подгрупп конечной разрешимой группы, то ранг этой группы не превосходит $d + 1$.*

Перейдем к основному результату этого параграфа.

Теорема 1. *Пусть конечная разрешимая группа G допускает автоморфизм φ простого порядка p с централизатором ранга r. Тогда она обладает нормальным рядом*

$$1 \underset{\text{н.}}{\leq} G_1 \underset{\text{н.}}{\leq} G_2 \underset{\substack{\text{н.}\\ a(p,r)}}{\leq} G_3 \underset{\text{аб.}}{\leq} G_4 \underset{\substack{\text{н.}\\ b(p)}}{\leq} G_5 \underset{\substack{\text{ранг}\\ c(p,r)}}{\leq} G,$$

в котором факторы G_1 и G_2/G_1 нильпотентны, фактор G_3/G_2 нильпотентен (p,r)-ограниченной ступени, фактор G_4/G_3 абелев, фактор G_5/G_4 нильпотентен p-ограниченной ступени, а фактор G/G_5 имеет (p,r)-ограниченный ранг. В частности, фактор-группа $G/F_5(G)$ имеет (p,r)-ограниченный ранг.

Доказательство. Ранг силовской p-подгруппы группы G (p,r)-ограничен в силу следствия 1. Положим $P = O_{p',p}(G)/O_{p'}(G)$. Группа $G/O_{p',p}(G)$ точно действует сопряжением на $P/\Phi(P)$. Поэтому ранг каждой силовской подгруппы из $G/O_{p',p}(G)$ ограничен в терминах p и r по лемме 4. Тогда по лемме 7 (p,r)-ограничен и ранг всей фактор-группы $G/O_{p',p}(G)$. Так как ранг $O_{p',p}(G)/O_{p'}(G)$ также (p,r)-ограничен, достаточно доказать теорему для $O_{p'}(G)$. Другими словами, можно с самого начала считать, что порядок группы G не делится на p, что мы и предполагаем до конца доказательства.

Задавшись простым числом q, рассмотрим фактор-группу $\overline{G} = G/O_{q',q}$. По предложению 1 для любого простого $t \neq q$ силовская t-подгруппа группы $\overline{G}$ имеет (p,r)-ограниченный ранг. Группа $\overline{G}/O_{t',t}(\overline{G})$ вкладывается в группу линейных преобразований пространства (p,r)-ограниченной размерности — Фраттиниеву фактор-группу группы $O_{t',t}(\overline{G})/O_{t'}(\overline{G})$. Будучи разрешимой, по теореме Колчина — Мальцева группа $\overline{G}/O_{t',t}(\overline{G})$ имеет нормальную подгруппу (p,r)-ограниченного индекса, коммутант которой нильпотентен (p,r)-ограниченной ступени. Следовательно, по теореме Ремака фактор-группа

$$\overline{G}/\bigcap_{t\neq q} O_{t',t}(\overline{G})$$

имеет нормальную подгруппу N_q, коммутант которой нильпотентен (p,r)-ограниченной ступени и фактор-группа по которой имеет (p,r)-ограниченный *период.* Так как $O_q(\overline{G}) = 1$, на самом деле здесь

$$\bigcap_{t\neq q} O_{t',t}(\overline{G}) = F(\overline{G}).$$

Обозначая через M_q полный прообраз N_q в $\overline{G} = G/O_{q',q}$, получаем, что коммутант фактор-группы $M_q/F(M_q)$ нильпотентен (p,r)-ограниченной ступени, а фактор-группа $\overline{G}/M_q$ имеет (p,r)-ограниченный период. По теореме Ремака тогда и фактор-группа

$$G/F(G) = G/\bigcap_{q} O_{q',q}(G)$$

обладает нормальным рядом длины 3, первый фактор которого нильпотентен, у второго фактора коммутант нильпотентен (p,r)-ограниченной ступени, а третий фактор имеет (p,r)-ограниченный период. Члены этого ряда можно считать характеристическими подгруппами типа

$$(G/F(G))^{f(p,r)} \text{ и } \gamma_{g(p,r)}([(G/F(G))^{f(p,r)}, (G/F(G))^{f(p,r)}])$$

для некоторых (p,r)-ограниченных чисел $f(p,r)$ и $g(p,r)$, а значит, и φ-инвариантными.

Так как в рассматриваемой ситуации $p \nmid |G|$, централизатор φ в фактор-группе является образом $C_G(\varphi)$ по лемме 1. В факторе (p,r)-ограниченного периода централизатор автоморфизма φ, будучи ранга r, уже конечен (p,r)-ограниченного порядка. По теореме Хартли — Майкснера — Хухро [2, 4] этот фактор имеет нормальную подгруппу (p,r)-ограниченного индекса, которая нильпотентна p-ограниченной ступени.

§ 3. Случай нильпотентной группы

Напомним, что по определению подгруппа A группы B имеет $(a,b,\dots)$-*ограниченный коранг*, если A и B связывает субнормальный ряд $(a,b,\dots)$-ограниченной длины, все факторы которого имеют $(a,b,\dots)$-ограниченный ранг. Если подгруппа A нормальна, то это эквивалентно $(a,b,\dots)$-ограниченности ранга фактор-группы B/A. Из теоремы Ремака следует, что коранг пересечения конечного числа подгрупп ограниченного коранга ограничен в терминах их корангов и их количества.

Теорема 2. *Пусть G — конечная нильпотентная группа, допускающая автоморфизм φ простого порядка p с централизатором ранга r. Пусть d — ступень разрешимости группы G. Тогда группа G содержит подгруппу (p,r,d)-ограниченного коранга, которая нильпотентна p-ограниченной ступени.*

Доказательство. Сразу заметим, что поскольку группа G нильпотентна, достаточно доказать теорему для ее силовских подгрупп. По следствию 1 силовская p-подгруппа имеет (p,r)-ограниченный ранг. Поэтому можно считать, что G — конечная q-группа для некоторого простого q, отличного от p.

Сначала мы найдем подгруппу (p,r,d)-ограниченного коранга, которая нильпотентна (p,r,d)-ограниченной ступени («слабо» ограниченной). Требуемая подгруппа («сильно») p-ограниченной ступени будет потом получена с помощью аналога теоремы о кольцах Ли из [4]. Ввиду очевидной индукции по ступени разрешимости, чтобы найти подгруппу «слабо» ограниченной ступени нильпотентности, достаточно доказать следующее предложение.

Предложение 2. *Пусть G — конечная q-группа, допускающая автоморфизм φ простого порядка $p \neq q$ с централизатором ранга r. Пусть V — абелева φ-инвариантная нормальная подгруппа группы G такая, что фактор-группа G/V нильпотентна ступени c. Тогда G содержит φ-инвариантную подгруппу (p,r,c)-ограниченного коранга, которая содержит V и нильпотентна (p,r,c)-ограниченной ступени.*

Дополнительное требование на подгруппу: содержать V — не нужно для индукции по ступени разрешимости, но оно используется в индуктивном доказательстве этого предложения.

Доказательство. Подгруппа X, содержащая V, нильпотентна ступени $\leq d+c$, если $[V,\underbrace{X,\dots,X}_{d}] = 1$. Действие группы G сопряжением на V индуцирует действие фактор-группы $H = G/V$ на V. Достаточно найти подгруппу $K \leq H$ ограниченного коранга такую, что $[V,\underbrace{K,\dots,K}_{d}] = 1$ для некоторого (p,r,c)-ограниченного d; тогда полный прообраз подгруппы K в группе G будет искомой подгруппой. Можно считать, что V — это $\mathbb{Z}H\langle\varphi\rangle$-модуль; в этих терминах последнее равенство можно переписать как $[V, \underbrace{K, \dots , K}_{d}] = 0$. Здесь и далее для аддитивной подгруппы $U \subseteq V$ и подгруппы $L \leq H$ через $[U, L]$ обозначается аддитивная подгруппа, порожденная всеми элементами вида $u(l-1)$, $u \in U$, $l \in L$; это в точности взаимный коммутант подгрупп U и L в полупрямом произведении VH.

Воспользуемся индукцией по c; в качестве базы индукции можно взять случай $c = 0$, соответствующий тому, что $G/V = 1$.

Так как $H = C_H(\varphi)[H, \varphi]$ по лемме 1, нормальная φ-инвариантная подгруппа $[H, \varphi]$ имеет ограниченный коранг. Поэтому можно считать, что $H = [H, \varphi]$.

Рассмотрим сначала случай, когда $\gamma_c(H) \leq C_H(\varphi)$. Этот случай на самом деле является основным в том смысле, что с использованием индукции по c и результата этого случая общий случай доказывается с помощью похожих, и даже более простых, рассуждений. (Заметим, что при $c = 1$ из условия $H = [H, \varphi]$ вытекает, что $C_H(\varphi) = 1$; это значит, что случай $c = 1$ пока не рассматривается, его доказательство входит в общий случай.) Построение искомой подгруппы проходит в два этапа. Сначала последовательно фиксируются некоторые элементы из $\gamma_{c-1}(H)$ уровней $1, 2, \dots , 2p-2$ из некоторых подгрупп централизаторов элементов предыдущих уровней, подгрупп, которые строятся параллельно. Затем искомая подгруппа строится с помощью своего рода «градуированных централизаторов», определяемых с помощью обертывающей алгебры некоторой подгруппы.

Итак, пока не оговорено противное, мы предполагаем, что $\gamma_c(H) \leq C_H(\varphi)$.

Лемма 8. *Если* $[H, \varphi] = H$ *и* $\gamma_c(H) \leq C_H(\varphi)$, *то* $\gamma_c(H) = [[\gamma_{c-1}(H), \varphi], H]$.

Доказательство. Очевидно, что $[[C_{\gamma_{c-1}(H)}(\varphi), \varphi], H] = 1$. Кроме того,

$$[[H, C_{\gamma_{c-1}(H)}(\varphi)], \varphi] \leq [\gamma_c(H), \varphi] \leq [C_H(\varphi), \varphi] = 1$$

по условию. Следовательно, по лемме о трех коммутантах имеем также

$$[[\varphi, H], C_{\gamma_{c-1}(H)}(\varphi)] = 1.$$

Но $H = [\varphi, H]$ по условию, значит, $[H, C_{\gamma_{c-1}(H)}(\varphi)] = 1$. По лемме 1 имеем $\gamma_{c-1}(H) = C_{\gamma_{c-1}(H)}(\varphi)[\gamma_{c-1}(H), \varphi]$. В результате

$$\gamma_c(H) = [\gamma_{c-1}(H), H] = [[\gamma_{c-1}(H), \varphi], H].$$

Ранг подгруппы $\gamma_c(H)$ в рассматриваемом случае $\gamma_c(H) \leq C_H(\varphi)$ не превосходит r. По лемме 8 и по теореме Бернсайда о базисе можно выбрать не более r порождающих подгруппы $\gamma_c(H)$, имеющих вид $[y, a]$, где $y \in [\gamma_{c-1}(H), \varphi]$. Далее нам потребуется следующее техническое замечание. Так как абелева q-группа $[\gamma_{c-1}(H), \varphi]\gamma_c(H)/\gamma_c(H)$ состоит из образов p-х степеней коммутаторов вида $[u, \varphi]$, $u \in \gamma_{c-1}(H)$, элемент y в коммутаторе $[y, a]$ можно считать имеющим вид $y = y'^p$, где $y' = [u, \varphi]$ для $u \in \gamma_{c-1}(H)$ и потому

$$y' \cdot y'^{\varphi} \cdot y'^{\varphi^2} \cdots y'^{\varphi^{p-1}} = u^{-1}u^{\varphi}(u^{-1})^{\varphi}u^{\varphi^2} \cdots (u^{-1})^{\varphi^{p-1}}u^{\varphi^p} = 1.$$

Для ссылок отметим это свойство как

$$y' \cdot y'^{\varphi} \cdot y'^{\varphi^2} \cdots y'^{\varphi^{p-1}} = 1 \quad \text{для} \quad y'^p = y. \tag{2}$$

При этом элемент y' лежит в $\langle y \rangle$, т. е. также является некоторой степенью элемента y.

Зафиксированные элементы y, a, входящие в записи этих выбранных порождающих группы $\gamma_c(H)$, будем называть элементами первого уровня, обозначая уровень в скобках: $y(1), a(1)$. Экономя обозначения, мы не будем различать индексами элементы вида $y(1)$, $a(1)$, но при этом $y(1)$ всегда будет обозначать элемент из $[\gamma_{c-1}(H), \varphi]$, причем такой, что для $y = y(1)$ выполняется (2). Напомним также, что число элементов вида $y(1)$ не превосходит r.

Для любого из этих элементов $y(1)$ его централизатор $C_H(y(1))$ — нормальная подгруппа ограниченного коранга. В самом деле, так как $y(1) \in \gamma_{c-1}(H)$, легко понять, что отображение $x \to [x, y(1)]$ является гомоморфизмом группы H в группу $\gamma_c(H) \leq C_H(\varphi)$. Его ядро и есть $C_H(y(1))$; значит, ранг факторгруппы $H/C_H(y(1))$ не превосходит r. То же самое верно для $C_H(y(1)^{\varphi^i})$ для всех $i = 0, 1, \dots, p-1$. Полагаем

$$D(2) = \bigcap_{y(1)} \bigcap_{i=1}^{p-1} C_H(y(1)^{\varphi^i}),$$

где $y(1)$ пробегает все фиксированные элементы первого уровня. Заметим, что $D(2)$ — φ-инвариантная подгруппа. Так как каждая из подгрупп, участвующих в пересечении, имеет коранг $\leq r$, а общее число этих подгрупп (p, r)-ограничено, $D(2)$ также имеет (p, r)-ограниченный коранг. Затем определяем подгруппу второго уровня $H(2) = [D(2), \varphi] \leq D(2)$. Коранг $H(2)$ также (p, r)-ограничен, ибо $D(2) = C_{D(2)}(\varphi)H(2)$. По построению $[y(1)^{\varphi^i}, H(2)] = 1$ для всех элементов $y(1)$ первого уровня и для всех i.

Поскольку $\gamma_c(H(2)) \leq \gamma_c(H) \leq C(\varphi)$ и $[H(2), \varphi] = H(2)$, для $H(2)$ выполняются те же условия леммы 8, что и для H. Поэтому можно провести такое же построение для $H(2)$: зафиксировать $\leq r$ порождающих подгруппы $\gamma_c(H(2))$ вида $[y(2), a(2)]$, где уже $y(2) \in [\gamma_{c-1}(H(2)), \varphi]$, $a(2) \in H(2)$, причем все элементы $y = y(2)$ также удовлетворяют (2). Затем полагаем

$$D(3) = \bigcap_{y(2)} \bigcap_{i=1}^{p-1} C_{H(2)}(y(2)^{\varphi^i}),$$

где $y(2)$ пробегает все элементы второго уровня, и $H(3) = [D(3), \varphi]$.

Продолжаем это построение $2p-1$ раз. По построению

$$H = H(1) \geq H(2) \geq \dots \geq H(2p-1),$$

все подгруппы $H(i)$ имеют (p, r)-ограниченный коранг в H, и все они φ-инвариантны. В процессе построения для каждого $j = 1, 2, \dots, 2p-2$ зафиксированы порождающие подгруппы $\gamma_c(H(j))$ вида $[y(j), a(j)]$, где $y(j) \in [\gamma_{c-1}(H(j)), \varphi]$, $a(j) \in H(j)$, причем все элементы $y = y(j)$ удовлетворяют (2), а их число ограничено. По построению $[y(j), H(k)] = 1$, если $j < k$, для любого из зафиксированных ранее элементов $y(j)$.

Оставив пока подгруппы $H(j)$, обсудим «градуированные централизаторы», возникающие в обертывающей алгебре. Расширив основное кольцо примитивным корнем p-й степени из 1, обозначаемым ω, переобозначим той же буквой V полученный $\mathbb{Z}[\omega]H\langle\varphi\rangle$-модуль. При этом ранг аддитивной группы $C_V(\varphi)$ может увеличиться только в $p-1$ раз, т. е. он не будет превосходить $r(p-1)$. Расширение основного кольца не меняет нашей цели: найти подгруппу K ограниченного коранга в H, для которой $[V, \underbrace{K, \dots, K}_{d}] = 0$ для некоторого ограниченного d.

Обозначим через $E = E(H)$ подалгебру в $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[\omega]}(V)$, порожденную группой H; будем называть E обертывающей алгеброй группы H. Действие φ на H естественным образом распространяется на E. Заметим, что для любой φ-инвариантной подгруппы $N \le H$ ее обертывающая алгебра $E(N)$ является φ-инвариантной подалгеброй в $E(H)$.

Разложим V в сумму аналогов подпространств собственных векторов:

$$V = V_0 \oplus V_1 \oplus \cdots \oplus V_{p-1},$$

где $V_i = \{v \in V \mid v\varphi = \omega^i v\}$. Для каждого $v \in V$ имеем

$$v = \sum_{i=0}^{p-1} v_i, \quad \text{где} \quad v_i = \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1}\omega^{-ki}v\varphi^k \in V_i.$$

Будем называть аддитивные подгруппы V_i для краткости *φ-компонентами* модуля V, а элементы v_i — *φ-компонентами* элемента v. Ясно, что $V_0 = C_V(\varphi)$. Точно так же $E = E_0 \oplus E_1 \oplus \cdots \oplus E_{p-1}$ — сумма своих φ-компонент $E_i = \{e \in E \mid e^{\varphi} = \omega^i e\}$.

Нетрудно видеть, что $V_iE_j \subseteq V_{i+j(\mathrm{mod}\, p)}$: для $v \in V_i$ и $e \in E_j$ имеем

$$(ve)\varphi = (v\varphi)(\varphi^{-1}e\varphi) = (\omega^i v)(\omega^j e) = \omega^{i+j}ve.$$

Кроме того, $E_iE_j \subseteq E_{i+j(\mathrm{mod}\, p)}$, что проверяется также непосредственно.

Для фиксированного $v \in V_i$ отображение $\vartheta_v : e \to ve$ компоненты E_{p-i} в компоненту V_0 является гомоморфизмом аддитивных групп. Так как ранг V_0 не превосходит $r(p-1)$, то и ранг аддитивной фактор-группы $E_{p-i}/\operatorname{Ker}\vartheta_v$ не превосходит $r(p-1)$. (Здесь не исключается и случай $i = 0$.) Можно сказать, что ядро $\operatorname{Ker}\vartheta_v$ — «градуированный» централизатор элемента v. Далее для каждого $i = 0, 1, \ldots, p-1$ мы будем строить некоторые аддитивные подгруппы $C_{p-i} \le E_{p-i}$ как пересечения $C_{p-i} = \bigcap\limits_v \operatorname{Ker}\vartheta_v$ таких ядер по некоторому множеству фиксированных элементов из V_i. Если число элементов ограничено, то ранг аддитивной фактор-группы E_{p-i}/C_{p-i} также ограничен, поскольку не превосходит суммы корангов аддитивных подгрупп, участвующих в пересечении.

Предположим, что в каждой φ-компоненте E_i, $i = 0, 1, \ldots, p-1$, построена аддитивная подгруппа C_i ограниченного коранга. Обозначим через I двусторонний идеал алгебры E, порожденный всеми подгруппами C_i. Тогда аддитивная группа E/I имеет ограниченный ранг. Группа H действует умножением справа на E, а значит, и на E/I. Ядро этого действия K — нормальная подгруппа в H. По лемме 3 ранг фактор-группы H/K также ограничен (в терминах ранга E/I), так как это q-подгруппа группы автоморфизмов аддитивной q-группы E/I.

Лемма 9. *Имеет место равенство* $K = \{h \in H \mid 1 - h \in I\}$.

Доказательство. Если $h \in K$, то $1h \equiv 1(\mathrm{mod}\, I)$, т. е. $1 - h \in I$. Если же $1 - h \in I$, то $u1 - uh \in uI = I$, т. е. $uh \equiv u(\mathrm{mod}\, I)$ для любого $u \in E$, что и означает, что $h \in K$.

Описанное построение подгруппы K как ядра действия на фактор-алгебре можно проводить для любой φ-инвариантной подгруппы $N \le H$ по компонентам обертывающей алгебры $E(N)$. Для каждого i полученная подгруппа C_{p-i} будет иметь ограниченный коранг в N, если определяющее множество фиксированных элементов $v \in V_i$ имеет ограниченный порядок. При этом $E(N)$ остается вложенной в $E(H)$, что позволяет использовать какие-то свойства вложения N в H.

Перейдем к построению искомой подгруппы. Пусть $F = E(C_H(H(2p-1))$ — обертывающая алгебра централизатора подгруппы $H(2p-1)$, а F_j — ее φ-компоненты, $j = 0, 1, \dots, p-1$. Для каждого $j = 0, 1, \dots, p-1$ рассмотрим аддитивную подгруппу, порожденную множеством $V_{p-j}F_j = \{vf \mid v \in V_{p-j},\ f \in F_j\}$. Так как $V_{p-j}F_j \subseteq V_0$, ранг этой подгруппы не превосходит $r(p-1)$. Поскольку это q-группа, можно выбрать $\leq r(p-1)$ элементов, порождающих эту подгруппу, из первоначального порождающего множества $V_{p-j}F_j$. Зафиксируем такое порождающее множество из $\leq r(p-1)$ элементов, имеющих вид $v_{p-j,i}f_{j,i}$, где $v_{p-j,i} \in V_{p-j}$, $f_{j,i} \in F_j$, $1 \leq i \leq k_j \leq r(p-1)$.

Пусть $\vartheta_{v_{p-j,i}}$ — гомоморфизм φ-компоненты E_j обертывающей алгебры $E = E(H(2p-1))$ подгруппы $H(2p-1)$ в V_0, действующий по правилу $e \to v_{p-j,i}e$ для $e \in E_j$. Для каждого $j = 0, 1, \dots, p-1$ полагаем

$$C_j = \bigcap_{i=1}^{k_j} \operatorname{Ker} \vartheta_{v_{p-j,i}}.$$

Все аддитивные фактор-группы E_j/C_j имеют (p, r)-ограниченный ранг.

Пусть теперь I — идеал алгебры $E = E(H(2p-1))$, порожденный аддитивными подгруппами $C_0, C_1, \dots, C_{p-1}$. Аддитивная фактор-группа E/I имеет (p, r)-ограниченный ранг. По лемме 9 множество $K = \{x \in H(2p-1) \mid 1 - x \in I\}$ является ядром действия группы $H(2p-1)$ умножением справа на E/I. Ранг $H(2p-1)/K$ ограничен в терминах p и r. Так как коранг $H(2p-1)$ в H ограничен, то и коранг K в H ограничен.

Начнем оценку ступени нильпотентности полного прообраза подгруппы K в группе G. Фактор-группа $K/\gamma_c(K)$ действует на каждом из фактор-модулей

$$U_k = [V, \underbrace{\gamma_c(K), \dots, \gamma_c(K)}_{k}]/[V, \underbrace{\gamma_c(K), \dots, \gamma_c(K)}_{k+1}]$$

(начиная с $V/[V, \gamma_c(K)]$). Согласно предположению индукции по ступени нильпотентности c в K есть подгруппа L_k ограниченного коранга такая, что

$$[U_k, \underbrace{L_k, \dots, L_k}_{a}] = 0$$

для некоторого ограниченного a. Предположим, что

$$[V, \underbrace{\gamma_c(K), \dots, \gamma_c(K)}_{b}] = 0$$

для какого-то ограниченного b. Тогда пересечение $X = \bigcap\limits_k L_k$ будет искомой подгруппой, так как ее коранг ограничен и $[V, \underbrace{X, \dots, X}_{ab}] = 0$.

На самом деле мы докажем, что $[V, \underbrace{\gamma_c(K), \dots, \gamma_c(K)}_{2p-1}] = 0$. Это утверждение эквивалентно тому, что

$$v(1 - z_1)(1 - z_2) \cdots (1 - z_{2p-1}) = 0 \tag{3}$$

для любых $v \in V$ и $z_i \in \gamma_c(K)$. Поскольку $K \leq H(2p-1) \leq H(2p-2) \leq \cdots$, а значит, и $\gamma_c(K) \leq \gamma_c(H(2p-1)) \leq \gamma_c(H(2p-2)) \leq \cdots$, можно заменять в (3) элементы $z_j \in \gamma_c(K)$ произведениями фиксированных порождающих вида $[y(i), a(i)]$ любого из уровней i. Такие замены мы будем делать по очереди, слева направо, начиная с z_1 и производя на каждом шаге некоторые преобразования.

Заменим в первой скобке из (3) элемент z_1 произведением фиксированных порождающих вида $[y(1), a(1)]$ первого уровня. Затем, применяя многократно формулу

$$1 - ab = (1-a)(1+b) - (1-a) + (1-b), \tag{4}$$

выразим элемент $1 - z_1$ в виде линейной комбинации, в каждом из слагаемых которой есть фактор вида $1-[y(1), a(1)]$. Подставляя это выражение в (3), можно все другие факторы (типа $1+b$) из этого выражения для $1-z_1$ перенести на правый край произведения, так как все факторы, возникающие по формуле (4), имеют вид $1 \pm x$ для $x \in \gamma_c(K)$ и потому коммутируют со всеми другими элементами. Получится линейная комбинация произведений, каждое из которых имеет начальный отрезок вида

$$v(1 - [y(1), a(1)])(1-z_2)\cdots(1-z_{2p-1}). \tag{5}$$

Поэтому достаточно доказать, что каждый элемент вида (5) равен 0. Положим временно $y = y(1)$ и $a = a(1)$ и используем формулу

$$\begin{aligned} 1 - [y,a] = 1 - [y^{-1}, a^{-1}] = 1 - yay^{-1}a^{-1} = (ay - ya)y^{-1}a^{-1} \\ = ((1-a)(1-y) - (1-y)(1-a))y^{-1}a^{-1}. \end{aligned}$$

(Здесь $[y,a] = [y^{-1}, a^{-1}]$ в силу стандартных коммутаторных формул, поскольку $y \in \gamma_{c-1}(H)$ и ступень нильпотентности равна c.) Подставим полученное выражение для $1-[y,a]$ в (5) вместо первой скобки. Множитель $y^{-1}a^{-1}$ можно вынести на правый край произведения, так как все элементы $z_2, z_3, \ldots \in \gamma_c(K)$ лежат в центре. Получим линейную комбинацию произведений, каждое из которых имеет начальный отрезок либо вида

$$v(1-a)(1-y)(1-z_2)(1-z_3)\cdots(1-z_{2p-1}),$$

либо вида

$$v(1-y)(1-a)(1-z_2)(1-z_3)\cdots(1-z_{2p-1}) = v(1-y)(1-z_2)(1-z_3)\cdots(1-z_{2p-1})(1-a)$$

(во втором случае мы опять использовали центральность всех z_i). Переобозначая в первом случае $v(1-a)$ через v, получаем, что достаточно доказать равенство нулю произведений вида

$$v(1-y(1))(1-z_2)(1-z_3)\cdots(1-z_{2p-1}). \tag{6}$$

Затем заменим в (6) элемент z_2 произведением фиксированных порождающих вида $[y(2), a(2)]$ второго уровня. Применяя формулу (4), выразим элемент $1-z_2$ в виде линейной комбинации, в каждом из слагаемых которой есть фактор вида $1 - [y(2), a(2)]$. Подставляя это выражение в (6) вместо второй скобки $(1-z_2)$ и вынося на правый край все «лишние» множители (которые все имеют вид $1 \pm x$ для $x \in \gamma_c(K)$ и потому перестановочны с любыми элементами), получаем линейную комбинацию произведений, каждое из которых имеет начальный отрезок либо вида

$$\begin{aligned} v(1-y(1))(1-y(2))(1-a(2))(1-z_3)\cdots(1-z_{2p-1}) \\ \cdot v(1-y(1))(1-y(2))(1-z_3)\cdots(1-z_{2p-1})(1-a(2)), \end{aligned}$$

либо вида

$$v(1-y(1))(1-a(2))(1-y(2))(1-z_3)\cdots(1-z_{2p-1})$$
$$=v(1-a(2))(1-y(1))(1-y(2))(1-z_3)\cdots(1-z_{2p-1}).$$

В первом случае мы использовали центральность всех z_i. Во втором же случае мы воспользовались тем, что элемент $a(2)\in H(2)$ централизует фиксированный элемент $y(1)$ меньшего уровня по построению подгруппы $H(2)$. Переобозначая во втором случае $v(1-a(2))$ через v, получаем, что достаточно доказать тривиальность произведений вида

$$v(1-y(1))(1-y(2))(1-z_3)\cdots(1-z_{2p-1}).$$

Продолжая процесс до *предпоследней* скобки, получим, что достаточно доказать тривиальность произведений вида

$$v(1-y(1))(1-y(2))\cdots(1-y(2p-2))(1-z_{2p-1}). \tag{7}$$

Теперь мы начнем использовать тот факт, что элемент $z=z_{2p-1}$ из последней скобки лежит в подгруппе K. Так как $K=\{x\in H(2p-1)\mid 1-x\in I\}$, где $I={}_{\mathrm{id}}\langle C_0,\dots,C_{p-1}\rangle$, элемент $1-z$ равен линейной комбинации элементов вида ge_jh, где $e_j\in C_j$, $j=0,1,\dots,p-1$, а g,h — произвольные элементы из $E=E(H(2p-1))$. Подставим это выражение вместо последней скобки в (7). Поскольку по построению подгруппа $H(2p-1)$, а значит, и ее обертывающая алгебра, централизует все элементы вида $y(i)$ уровней $i\le 2p-2$, элементы g можно перенести налево мимо всех элементов $y(i)$. Переобозначая vg через v в каждом слагаемом полученной линейной комбинации, получаем, что достаточно доказать равенство нулю любого произведения вида

$$v(1-y(1))(1-y(2))\cdots(1-y(2p-2))e_j. \tag{8}$$

Вспомним, что по свойству (2) каждый элемент $y=y(i)$ имеет вид $y=y'^p$, где $y'y'^{\varphi}y'^{\varphi^2}\cdots y'^{\varphi^{p-1}}=1$. Тогда

$$1-y=y'y'^{\varphi}\cdots y'^{\varphi^{p-1}}-y'^p. \tag{9}$$

(Мы пока опустили указания на уровень для облегчения обозначений.) Разложим элемент y' в (9) в сумму φ-компонент $y'=y_0+y_1+\cdots+y_{p-1}$ и раскроем все скобки. Так как $(y_0+y_1+\cdots+y_{p-1})^{\varphi^k}=y_0+\omega^k y_1+\cdots+\omega^{(p-1)k}y_{p-1}$, в результате получится линейная комбинация мономов степени p от φ-компонент y_i. Поскольку мономы y_0^p из разложений $y'y'^{\varphi}\cdots y'^{\varphi^{p-1}}$ и y'^p сократятся, в каждое слагаемое полученной линейной комбинации входит хотя бы одна φ-компонента y_i с ненулевым индексом $i\neq 0$. Подставив соответствующее выражение вместо каждой из скобок в произведение (8) и раскрыв все скобки, получим, что достаточно доказать равенство нулю произведений вида

$$v\,\underbrace{y_0(1)\cdots y_0(1)y_{i_1}(1)\cdots}_{(1)}\ldots\underbrace{y_0(2p-2)\cdots y_0(2p-2)\cdots y_{i_{2p-2}}(2p-2)\cdots}_{(2p-2)}e_j,$$

где $\underbrace{y_0(k)\cdots y_0(k)y_{i_k}(k)\cdots}_{(k)}$ — моном из описанного выше разложения скобки $(1-y(k))$, в котором выделена первая слева φ-компонента $y_{i_k}(k)$ с ненулевым индексом $i_k\neq 0$ (предшествующие элементы с нулевым индексом могут отсутствовать). Обозначим через $\bar y_{i_k}$ начальный отрезок $y_0(k)\cdots y_0(k)y_{i_k}(k)$ этого монома. Тогда наше произведение приобретает вид $v\,\underbrace{\bar y_{i_1}\cdots}_{(1)}\cdots\underbrace{\bar y_{i_{2p-2}}\cdots}_{(2p-2)}e_j$. Так как $V=\bigoplus V_i$, достаточно доказать тривиальность произведений вида

$$v_{i_0}\,\underbrace{\bar y_{i_1}\cdots}_{(1)}\cdots\underbrace{\bar y_{i_{2p-2}}\cdots}_{(2p-2)}e_j, \tag{10}$$

где $v_{i_0}\in V_{i_0}$ для некоторого $i_0=0,1,\dots,p-1$.

Заметим, что если, скажем, $i<k$, то по построению

$$y(k)\in H(k)\le C_H(y(i)^{\varphi^s})$$

для любого s. Тогда и $[y'(i)^{\varphi^s},y'(k)^{\varphi^t}]=1$ для любых s, t для элементов $y'(i)$, $y'(k)$ таких, что $y'(i)^p=y(i)$, $y'(k)^p=y(k)$ (поскольку $y'\in\langle y\rangle$, если $y'^p=y$). Так как φ-компоненты элементов типа y' являются линейными комбинациями элементов ${y'}^{\varphi^s}$, получаем, что φ-компоненты разных уровней перестановочны. По тем же причинам элемент e_j из обертывающей алгебры подгруппы $H(2p-1)$ большего уровня, чем уровни всех этих элементов, перестановочен с каждой из этих φ-компонент. В этом смысле элемент $\bar y_{i_k}$, будучи произведением φ-компонент k-го уровня, также можно считать элементом k-го уровня, который перестановочен с φ-компонентами других уровней и с элементом e_j.

Слева от каждого из элементов $\bar y_{i_2},\dots,\bar y_{i_{2p-2}},e_j$ в (10) находятся только φ-компоненты меньших уровней. Поэтому можно последовательно переставить эти элементы налево в (10), чтобы образовался начальный отрезок

$$v_{i_0}\bar y_{i_1}\cdots\bar y_{i_{2p-2}}e_j. \tag{11}$$

Достаточно доказать, что он тривиален.

Нам потребуется следующая элементарная лемма из [7].

Лемма 10 [7]. *Если $i_1,i_2,\dots,i_{p-1}$ — любые ненулевые* (*не обязательно различные*) *вычеты по простому модулю p, то любой вычет по модулю p может быть получен как сумма какого-то подмножества множества $\{i_1,i_2,\dots,i_{p-1}\}$.*

Все индексы элементов $\bar y_{i_k}$ в (11) ненулевые. Поэтому по лемме 10 мы можем, во-первых, используя первые $p-1$ элементов $\bar y_{i_k}$, переставить их в (11) так, что получится начальный отрезок вида

$$u_{p-j}=v_{i_0}\bar y_{k_1}\cdots\bar y_{k_t},$$

в котором $k_1+\dots+k_t\equiv -j-i_0(\operatorname{mod}p)$, т. е. этот начальный отрезок лежит в V_{p-j}. Во-вторых, переставим какие-то из $\ge p-1$ оставшихся вне этого начального отрезка элементов вида $\bar y_{i_k}$, а также элемент e_j так, чтобы получился начальный отрезок

$$u_{p-j}\bar y_{l_1}\cdots\bar y_{l_s}e_j, \tag{12}$$

в котором $l_1+\dots+l_s\equiv j(\operatorname{mod}p)$, так что $\bar y_{l_1}\cdots\bar y_{l_s}\in E_j$.

Элемент $\bar y_{l_1}\cdots\bar y_{l_s}$ является произведением φ-компонент элементов типа y' для элементов вида $y(k)$. Так как подгруппа $H(2p-1)$ централизует любой элемент вида $y(k)$ уровня $k\le 2p-2$, то она централизует и элемент вида $y'\in\langle y(k)\rangle$, а также, будучи φ-инвариантной, и все элементы ${y'}^{\varphi^i}$. Другими словами, ${y'}^{\varphi^i}\in C_H(H(2p-1))$. Значит, все φ-компоненты элемента y', являющиеся линейными комбинациями элементов ${y'}^{\varphi^i}$, лежат в обертывающей алгебре $F=E(C_H(H(2p-1))$ централизатора $C_H(H(2p-1))$. Поэтому элемент

$u_{p-j}\bar{y}_{l_1}\cdots\bar{y}_{l_s}$ лежит в $V_{p-j}F_j$, значит, равен линейной комбинации элементов вида $v_{p-j,i}f_{j,i}$, $v_{p-j,i}\in V_{p-j}$, $f_{j,i}\in F_j$, зафиксированных выше в процессе определения аддитивных подгрупп C_j (а также идеала I и подгруппы K). Получаем, что произведение (12) равно линейной комбинации элементов вида $v_{p-j,i}f_{j,i}e_j$. Элементы $f_{j,i}$ и e_j перестановочны, так как e_j лежит в обертывающей алгебре подгруппы $H(2p-1)$, которая централизует все элементы меньших уровней. Получаем $v_{p-j,i}f_{j,i}e_j=v_{p-j,i}e_jf_{j,i}=0$, поскольку $e_j\in C_j\subseteq \operatorname{Ker}\vartheta_{v_{p-j,i}}$ по построению. Тем самым мы завершили доказательство предложения 2 в случае, когда $\gamma_c(H)\le C_H(\varphi)$.

Рассмотрим теперь общий случай, когда $\gamma_c(H)$ уже не обязательно содержится в $C_H(\varphi)$. Мы продолжаем считать, что $H=[H,\varphi]$. Достаточно найти подгруппу T ограниченного коранга в H такую, что

$$[V,\underbrace{[\gamma_c(T),\varphi],\dots,[\gamma_c(T),\varphi]}_{a}]=0$$

для некоторого ограниченного a. Действительно, фактор-группа $T/[\gamma_c(T),\varphi]$ действует на каждом из фактор-модулей

$$U_k=[V,\underbrace{[\gamma_c(T),\varphi],\dots,[\gamma_c(T),\varphi]}_{k}]/[V,\underbrace{[\gamma_c(T),\varphi],\dots,[\gamma_c(T),\varphi]}_{k+1}].$$

По доказанному (или по предположению индукции по c, если $\gamma_c(T)=[\gamma_c(T)),\varphi]$) в T есть подгруппа S_k ограниченного коранга такая, что $[U_k,\underbrace{S_k,\dots,S_k}_{b}]=0$ для некоторого ограниченного b. Тогда пересечение $X=\bigcap\limits_k S_k$ будет искомой подгруппой, так как коранг X будет также ограничен и $[V,\underbrace{X,\dots,X}_{ab}]=0$.

Мы найдем подгруппу T ограниченного коранга в H такую, что

$$v(1-z_1)\cdots(1-z_{2p-1})=0$$

для любых $v\in V$ и любых $z_i\in[\gamma_c(T),\varphi]$. Ситуация здесь несколько проще тем, что подгруппа $[\gamma_c(T),\varphi]$ состоит из p-х степеней коммутаторов $d=[u,\varphi]$, где $u\in\gamma_c(T)$, для которых

$$dd^{\varphi}\cdots d^{\varphi^{p-1}}=1, \tag{13}$$

причем все эти элементы лежат в центре группы H. Поэтому здесь нам не потребуется строить последовательность подгрупп возрастающих уровней.

Пусть $F=E(\gamma_c(H))$ — обертывающая алгебра подгруппы $\gamma_c(H)$. Для каждой φ-компоненты F_j, $j=0,1,\dots,p-1$, рассмотрим аддитивную подгруппу, порожденную множеством $V_{p-j}F_j=\{vf\mid v\in V_{p-j},\ f\in F_j\}$. Так как $V_{p-j}F_j\subseteq V_0$, ранг этой подгруппы не превосходит $r(p-1)$. Поскольку это q-группа, можно выбрать $\le r(p-1)$ элементов, порождающих эту подгруппу, из первоначального порождающего множества $V_{p-j}F_j$. Зафиксируем такое порождающее множество из $\le r(p-1)$ элементов, имеющих вид $v_{p-j,i}f_{j,i}$, где $v_{p-j,i}\in V_{p-j}$, $f_{j,i}\in F_j$, $1\le i\le k_j\le r(p-1)$.

Для каждого $j=0,1,\dots,p-1$ полагаем

$$C_j=\bigcap_{i=1}^{k_j}\operatorname{Ker}\vartheta_{v_{p-j,i}},$$

где $\vartheta_{v_{p-j,i}}$ — гомоморфизм φ-компоненты E_j обертывающей алгебры $E = E(H)$ группы H в V_0 по правилу $e \to v_{p-j,i}e$ для $e \in E_j$. Все аддитивные фактор-группы E_j/C_j имеют (p,r)-ограниченный ранг.

Теперь пусть I — идеал алгебры $E = E(H)$, порожденный аддитивными подгруппами $C_0, C_1, \dots, C_{p-1}$. Аддитивная фактор-группа E/I имеет (p,r)-ограниченный ранг. По лемме 9 множество $T = \{x \in H \mid 1 - x \in I\}$ является ядром действия группы H умножением справа на E/I. Ранг фактор-группы H/T ограничен в терминах p и r.

Докажем, что

$$v(1 - z_1)\cdots(1 - z_{2p-1}) = 0 \tag{14}$$

для любых $z_i \in [\gamma_c(T), \varphi]$. Так как $1-z_{2p-1} \in I$, элемент $1-z_{2p-1}$ равен линейной комбинации элементов вида ge_jh, где $e_j \in C_j$ для какого-то $j = 0, 1, \dots, p-1$. Подставляя это в (14), перенося элементы g налево мимо всех центральных элементов $(1 - z_i)$, переобозначая vg через v и затем разлагая v в сумму φ-компонент, получаем, что достаточно доказать равенство нулю произведений вида

$$v(1 - z_1)\cdots(1 - z_{2p-2})e_j, \tag{15}$$

где $v = v_{i_0} \in V_{i_0}$ для какого-то $i_0 = 0, 1, \dots, p-1$.

Для каждого $z = z_i$ в (15) по формуле (13) для $d^p = z$ имеем

$$1 - z = dd^{\varphi}\cdots d^{\varphi^{p-1}} - d^p. \tag{16}$$

Разложим элемент d в сумму φ-компонент $d = d_0+\dots+d_{p-1}$, подставим в (16) и, сократив $d_0^p - d_0^p$, получим линейную комбинацию мономов степени p от элементов d_i, в каждом из которых есть сомножитель d_i с ненулевым индексом $i \neq 0$. Подставим соответствующее разложение вместо каждой из скобок в (15). Пользуясь тем, что все участвующие здесь элементы перестановочны, приходим к тому, что достаточно доказать равенство нулю произведений вида

$$v_{i_0}d_{i_1}\cdots d_{i_{2p-2}}e_j,$$

где $i_k \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\, p)$ для всех k. По лемме 10 переставим некоторые из первых $p-1$ элементов d_{i_j} так, чтобы получился начальный отрезок вида

$$v_{i_0}d_{k_1}\cdots d_{k_s},$$

где $k_1+\dots+k_s \equiv -j-i_0 (\mathrm{mod}\, p)$. Тогда элемент $u_{p-j} = v_{i_0}d_{k_1}\cdots d_{k_s}$ лежит в V_{p-j}. Затем переставим какие-то из неиспользованных элементов d_{i_k} и элемент e_j так, чтобы получился начальный отрезок вида

$$u_{p-j}d_{l_1}\cdots d_{l_t}e_j, \tag{17}$$

где $l_1+\dots+l_t \equiv j (\mathrm{mod}\, p)$. Тогда элемент $d_{l_1}\cdots d_{l_t}$ лежит в F_j. Поэтому элемент (17) равен линейной комбинации элементов $v_{p-j,i}f_{j,i}e_j$, где $v_{p-j,i} \in V_{p-j}$, $f_{j,i} \in F_j$ — зафиксированные выше элементы. Для каждого из них имеем

$$v_{p-j,i}f_{j,i}e_j = v_{p-j,i}e_jf_{j,i} = 0,$$

так как $e_j \in C_j \subseteq \mathrm{Ker}\,\vartheta_{v_{p-j,i}}$ по построению. Предложение доказано.

Доказательство теоремы 2. Предложение 2 и индукция по ступени разрешимости d сразу показывают, что группа G содержит φ-инвариантную подгруппу (p,r,d)-ограниченного коранга, которая нильпотентна (p,r,d)-ограниченной ступени. Поэтому можно с самого начала считать, что группа G нильпотентна (p,r,d)-ограниченной ступени $c = c(p,r,d)$. Это дает возможность воспользоваться аналогом теоремы из [4] о кольце Ли L с автоморфизмом φ простого порядка. Вообще-то в [4] рассматривался либо случай конечного централизатора $C_L(\varphi)$ порядка m, либо случай алгебры Ли L с централизатором конечной размерности m. Тогда кольцо (алгебра) L содержит подкольцо (подалгебру) (p,m)-ограниченного индекса в аддитивной группе ((p,m)-ограниченной коразмерности), которая нильпотентна p-ограниченной ступени $\leq g(p)$. Однако анализ доказательства в [4] показывает, что с минимальными изменениями оно дает также следующую теорему.

Теорема 3. *Если кольцо Ли L допускает автоморфизм φ простого порядка p такой, что аддитивная группа централизатора $C_L(\varphi)$ порождается конечным числом r элементов, то L содержит φ-инвариантное подкольцо M, нильпотентное p-ограниченной ступени $\leq g(p)$ и такое, что аддитивная фактор-группа L/M порождается (p,r)-ограниченным числом элементов.*

Вернемся к доказательству теоремы 2. Если ступень нильпотентности c группы G больше p-ограниченного числа $g(p)$ из формулировки теоремы 3, то применим эту теорему к присоединенному кольцу Ли $L = L(G)$ группы G. Получим подкольцо M ограниченного коранга в аддитивной группе L, ступень нильпотентности которого не превосходит $g(p)$. Образ $\overline{M}$ аддитивной группы M в $L/\gamma_2(L)$ можно также считать подгруппой фактор-группы $G/\gamma_2(G)$. Пусть N — полный прообраз $\overline{M}$ в группе G. Из определения операций в присоединенном кольце Ли и из нильпотентности ступени $\leq g(p)$ кольца M вытекает, что $\gamma_{g(p)+1}(N) \leq \gamma_{g(p)+2}(G)$, откуда $\gamma_c(N) \leq \gamma_{c+1}(G) = 1$, так как $g(p) < c$ по предположению.

Итак, N — φ-инвариантная нормальная подгруппа (p,r)-ограниченного коранга в G, ступень нильпотентности которой по крайней мере на единицу меньше, чем ступень нильпотентности группы G. Повторяя эту процедуру до тех пор, пока ступень нильпотентности не станет меньше или равна $g(p)$, мы придем к искомой подгруппе (p,r,c)-ограниченного коранга, ступень нильпотентности которой не превосходит $g(p)$. Так как здесь c — (p,r,d)-ограниченное число, полученная подгруппа искомая. Теорема 2 доказана.

Как мы видели в доказательстве теоремы 1, фактор-группа $G/O_{p'}(G)$ имеет (p,r)-ограниченный ранг. По лемме 1 на любой φ-инвариантной секции подгруппы $O_{p'}(G)$ централизатор φ имеет ранг $\leq r$. Поэтому к нильпотентным секциям этой подгруппы, которые дает теорема 1, можно применить теорему 2. Таким образом получается следующий результат.

Следствие 2. *Если конечная d-ступенно разрешимая группа G содержит элемент простого порядка p с централизатором ранга r, то она обладает нормальным рядом длины 5, каждый фактор которого имеет подгруппу (p,r,d)-ограниченного коранга, которая нильпотентна p-ограниченной ступени.*

Отметим еще одно применение разработанной в этой статье техники «градуированных централизаторов» для модулей над групповым кольцом. Именно, в качестве побочного результата укажем новый вариант сведения теоремы о нильпотентных группах с почти регулярным автоморфизмом простого порядка из [4] к теореме о кольцах Ли из той же работы. Повторив дословно доказательство теоремы 2 с заменой слова «ранг» словом «порядок» и слова «коранг» словом «индекс», получим аналогичный результат.

Теорема 4. *Пусть G — конечная нильпотентная q-группа, допускающая автоморфизм φ простого порядка $p \neq q$ такой, что подгруппа неподвижных точек $C_G(\varphi)$ имеет порядок m. Пусть d — ступень разрешимости группы G.*

Тогда группа G содержит подгруппу (p, m, d)-ограниченного индекса, которая нильпотентна p-ограниченной ступени.

Пусть теперь G — конечная нильпотентная группа, допускающая автоморфизм φ простого порядка p, имеющий ровно m неподвижных точек. В силу результата для случая p-группы из [3] (основанного на других методах) можно считать, что G — конечная q-группа для некоторого $q \neq p$. Тогда по лемме 1 и по теореме Хигмэна — Крекнина — Кострикина о регулярных автоморфизмах простого порядка сразу получаем «слабую» оценку ступени разрешимости группы G в терминах p и m. Остается применить теорему 4, учитывая, что ступень разрешимости уже (p, m)-ограничена. Из подгруппы «слабо» ограниченной ступени нильпотентности подгруппа «сильно» ограниченной ступени получается так же, как в конце доказательства теоремы 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Fong P.* On orders of finite groups and centralizers of p-elements // Osaka J. Math. 1976. V. 13. P. 483–489.

2. *Hartley B., Meixner T.* Finite soluble groups containing an element of prime order whose centralizer is small // Arch. Math. 1981. V. 36. P. 211–213.

3. *Хухро Е. И.* Конечные p-группы, допускающие автоморфизм порядка p с малым числом неподвижных точек // Мат. заметки. 1985. Т. 38. С. 652–657.

4. *Хухро Е. И.* Кольца Ли и группы, допускающие почти регулярный автоморфизм простого порядка // Мат. сб. 1990. Т. 181. С. 1207–1219.

5. *Thompson J. G.* Finite groups with fixed-point-free automorphisms of prime order // Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 1959. V. 45. P. 578–581.

6. *Higman G.* Groups and rings which have automorphisms without non-trivial fixed elements // J. London Math. Soc. (2). 1957. V. 32. P. 321–334.

7. *Крекнин В. А., Кострикин А. И.* Алгебры Ли с регулярными автоморфизмами // Докл. АН СССР. 1963. Т. 149. С. 249–251.

8. *Крекнин В. А.* Разрешимость алгебр Ли с регулярными автоморфизмами конечного периода // Докл. АН СССР. 1963. Т. 150. С. 467–469.

9. *Shumyatsky P.* Involutory automorphisms of finite groups and their centrtalizers // Arch. Math. 1998. V. 71. P. 425–432.

10. *Макаренко Н. Ю.* Конечные метабелевы группы, допускающие автоморфизм простого порядка с ограничением на ранг централизатора. Новосибирск, 1999. (Препринт / Ин-т математики РАН).

11. *Горчаков Ю. М.* О существовании абелевых подгрупп бесконечных рангов в локально разрешимых группах // Докл. АН СССР. 1964. Т. 156. С. 17–22.

12. *Мерзляков Ю. И.* О локально разрешимых группах конечного ранга // Алгебра и логика. 1964. Т. 3, № 2. С. 5–16.

13. *Roseblade J. E.* On groups in which every subgroup is subnormal // J. Algebra. 1965. V. 2. P. 402–412.

14. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп. М.: Наука, 1977.

15. *Gorenstein D.* Finite Groups. New York: Chelsea, 1968.

16. Kovács L. G. On finite soluble groups // Math. Z. 1968. Bd 103. S. 37–39.

Статья поступила 18 октября 1999 г.

г. Новосибирск
Институт математики СО РАН
khukhro@math.nsc.ru