Сибирский математический журнал
Июль—август, 2000. Том 41, № 4

УДК 517.988

ОБОБЩЕНИЕ МЕТОДА МАКСИМАЛЬНОЙ ЭНТРОПИИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ

А. С. Леонов

Аннотация: Вводится и изучается общий класс регуляризующих функционалов Ω для решения некорректных задач в пространстве L_1. Использование функционалов из этого класса в структуре многих методов решения линейных и нелинейных некорректных задач обеспечивает сильную сходимость приближенных решений к Ω-оптимальным квазирешениям. В частности, рассматриваемый класс содержит функционал, порождающий известный метод максимальной энтропии. Библиогр. 13.

§ 1. Введение

Предположим, что $Z(T)$ — пространство функций $z(x)$, $x \in \mathbf{R}^N$, определенных в замкнутой ограниченной области $T \subset \mathbf{R}^N$. Считается, что оно наделено некоторой топологией секвенциальной сходимости τ. Пусть A — оператор (в общем случае нелинейный), который действует из $Z(T)$ в нормированное пространство U. Зададим некоторое непустое множество $D \subset Z(T)$, и рассмотрим на нем операторное уравнение

$$Az = u, \quad z = z(x) \in D, \quad u \in U. \tag{1.1}$$

Будем считать, что множество $Z^* = \arg\inf\{\|Az - u\|_U : z \in D\}$ квазирешений этого уравнения непусто, хотя, возможно, и содержит более одного элемента. Для нахождения специальных квазирешений уравнения (1.1) будем использовать некоторый функционал $\Omega(z)$, определенный на D. Будем отбирать с его помощью так называемые Ω-оптимальные квазирешения уравнения (1.1), т. е. такие функции $\bar{z}(x) \in Z^*$, для которых

$$\Omega(\bar{z}) = \inf\{\Omega(z) : z \in Z^*\}. \tag{1.2}$$

Их множество обозначим через $\overline{Z}$. Уравнение (1.1) часто представляет собой некорректно поставленную задачу, в которой вместо точных данных $\{A, u\}$ известны некоторые их приближения $\{A_h, u_\delta\}$ с точностями $\eta = \{h, \delta\}$. В этом случае требуется по набору величин $\{A_h, u_\delta, h, \delta\}$ построить устойчивое приближенное решение задачи (1.1), (1.2), т. е. такую функцию $z_\eta(x) \in D$, что $z_\eta(x) \xrightarrow{\tau} \overline{Z}$ при $\eta \to 0$.

Известно, что именно специфические свойства регуляризующего функционала $\Omega(z)$ на множестве D обеспечивают разрешимость задачи (1.2), а также

Работа выполнена при финансовой поддержке программы «Университеты России — Фундаментальные исследования» (проект 4–5220) и Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 99–01–00447).

возможность нахождения устойчивых приближенных решений $z_\eta(x)$ обратной задачи (1.1), (1.2) (см. [1–4]). Поэтому при решении прикладных задач типа (1.1), (1.2) выбор этого функционала, диктуемый обычно «физическим смыслом» отбираемого квазирешения, должен быть подкреплен обоснованием его специальных математических свойств. Это, в частности, относится и к так называемому *методу максимальной энтропии.* Он представляет собой вариант задачи (1.1), (1.2), в котором $Z(T) = L_1(T)$, $D = \{z(x) \in L_1(T) : z(x) \geq 0, \Omega_E(z) < \infty\}$ и $\Omega_E(z) = \int_T z(x) \ln z(x)\, dx$. Тогда задача (1.2) с $\Omega(z) = \Omega_E(z)$ эквивалентна максимизации функционала энтропии $E(z) = -\Omega_E(z)$ на множестве всех неотрицательных квазирешений уравнения (1.1). Метод максимальной энтропии исследовался многими авторами как в прикладном, так и в теоретическом аспектах. Было установлено, что соответствующие решения задачи (1.2) — *квазирешения с максимальной энтропией* — полезны при обработке искаженных изображений (см., например, [5]). Математические свойства функционала $\Omega_E(z)$ подробно изучались в работах [6, 7] применительно к решению линейных некорректных задач методом невязки [2] и методом регуляризации А. Н. Тихонова [1]. Основным результатом этих работ является теорема о сильной сходимости приближенных решений $z_\eta(x)$, полученных по этим методам, к единственному точному решению уравнения (1.1) с максимальной энтропией в пространстве $L_1(T)$ при $\eta \to 0$.

Оказывается, что такой результат может быть получен не только при использовании в задаче (1.2) функционала $\Omega_E(z)$. Сходимость приближенных решений в $L_1(T)$ к Ω-оптимальным квазирешениям из этого пространства можно получить и при использовании весьма широкого класса интегральных функционалов $\Omega(z)$, причем для общего случая нелинейных операторных уравнений (1.1). Это гарантируется не только для приближенных решений, полученных по методу регуляризации или по методу невязки, но и для многих других методов решения линейных и нелинейных некорректных задач. Функционалы $\Omega(z)$ такого рода вводятся и изучаются в данной работе. Соответствующая им задача (1.1), (1.2) представляет собой обобщение метода максимальной энтропии.

§ 2. Регуляризующие функционалы общего вида в L_1

Везде далее считаем, что $z(x) \in L_1(T)$, $z(x) \geq 0$. Обозначим норму в $L_1(T)$ через $\|\cdot\|_1$. Введем функцию одной переменной $f(z)$, определенную при $z \geq 0$ и такую, что: а) $f(z)$ непрерывна и выпукла при $z \geq 0$; б) $f(z)/z \to +\infty$ при $z \to +\infty$. Ясно, что такая функция ограничена снизу: $f(z) \geq f^* = \text{const}$. Зададим функционал

$$\Omega(z) = \Omega[z(x)] = \int_T f[z(x)]\, dx, \tag{2.1}$$

определенный и ограниченный снизу на множестве $D = \{z(x) \in L_1(T) : z(x) \geq 0, \Omega(z) < \infty\}$.

Теорема 2.1. *Функционал $\Omega(z)$ обладает следующими свойствами:*

1) *он выпуклый на выпуклом множестве D;*

2) *он слабо полунепрерывен снизу в $L_1(T)$ на D;*

3) *его непустые множества уровня $\Omega_C = \{z \in D : \Omega(z) \leq C\}$, $C = \text{const}$, слабо секвенциально замкнуты в $L_1(T)$;*

4) *непустые множества Ω_C слабо компактны в $L_1(T)$.*

Доказательство. Свойство 1 следует из выпуклости функции $f(z)$. Докажем, что функционал $\Omega(z)$ сильно полунепрерывен снизу на D. Пусть $z(x)$ — произвольный элемент из D, а $\{z_n(x)\} \subset D$ — любая последовательность такая, что $z_n(x) \to z(x)$ в $L_1(T)$. Если $\liminf\limits_{n\to\infty} \Omega(z_n) = +\infty$, то соотношение $\liminf\limits_{n\to\infty} \Omega(z_n) \geq \Omega(z)$, входящее в определение полунепрерывности снизу, очевидно. Если же этот предел конечен, то можно выбрать такую подпоследовательность $\{z_{n_k}(x)\}$, что $\lim_{k\to\infty} \Omega(z_{n_k}) = \liminf\limits_{n\to\infty} \Omega(z_n) \equiv s$ и $z_{n_k}(x) \to z(x)$ почти всюду в T (см. [8, с. 379]). Тогда

$$\Omega(z_{n_k}) = \int\limits_T f[z_{n_k}(x)]\,dx \leq s+1$$

при достаточно больших k. Так как $f[z_{n_k}(x)] \to f[z(x)]$ почти всюду в T вследствие непрерывности функции $f(z)$ и, кроме того, $f(z) \geq f^*$, из леммы Фату [8, с. 301] получим

$$\Omega(z) = \int\limits_T f[z(x)]\,dx \leq \liminf_{k\to\infty} \int\limits_T f[z_{n_k}(x)]\,dx = \lim_{k\to\infty} \Omega(z_{n_k}) = \liminf_{n\to\infty} \Omega(z_n),$$

и сильная полунепрерывность доказана. Из нее и из выпуклости функционала $\Omega(z)$ на выпуклом множестве D следует слабая в $L_1(T)$ полунепрерывность снизу этого функционала (см., например, [9, с. 52]) и, далее, выпуклость и слабая секвенциальная замкнутость в $L_1(T)$ непустых множеств Ω_C. Наконец, свойство 4 получается из условия б) на функцию $f(z)$ путем совместного применения критериев Валле-Пуссена (см., например, [10, с. 13]) и Данфорда — Петтиса [11, с. 379] по той же схеме, что и в [6, 7]. $\square$

Для дальнейшего необходимо ввести некоторые величины. Пусть μ — мера Лебега, заданная на подмножествах области T. Будем обозначать через $\{T_i\}_{i=1}^k$ всякое разбиение области T на измеримые множества T_i такие, что $T = \bigcup\limits_{i=1}^k T_i$, $T_i \cap T_j = \varnothing$, $i \neq j$. Пусть, далее, $z(x) \in D$ — фиксированная функция. Символом $\hat{z}_k(x)$ будем обозначать «ступенчатую» функцию, получаемую из $z(x)$ на данном разбиении $\{T_i\}_{i=1}^k$ по правилу

$$\hat{z}_k(x) = \sum_{i=1}^k z_i \chi(T_i), \quad z_i = \left\{\mu^{-1}(T_i) \int\limits_{T_i} z(x)\,dx,\ \mu(T_i) \neq 0;\ 0,\ \mu(T_i) = 0\right\}. \tag{2.2}$$

Здесь $\chi(T_i)$ — характеристическая функция множества T_i. Для доказательства следующих двух лемм потребуется специальное разбиение $\{T_i\}$:

$$\begin{gathered} T_i = \{x \in T : (i-1)/m \leq z(x) < i/m\}, \quad i = 1, 2, \ldots, m^2; \\ T_i = \{x \in T : z(x) \geq m\}, \quad i = m^2 + 1 \equiv k. \end{gathered} \tag{2.3}$$

Введем также множество индексов $I(k) = \{i : 1 \leq i \leq k,\ \mu(T_i) \neq 0\}$, связанное с этим разбиением.

Лемма 2.2. *Для любой функции $z(x) \in D$ и для построенных по ней и по разбиениям вида (2.3) ступенчатых функций $\hat{z}_k(x)$ выполнено предельное соотношение: $\|z - \hat{z}_k\|_1 \to 0$ при $k \to \infty$.*

Доказательство. При каждом $k = m^2 + 1$, $m = 1, 2, \ldots$, из (2.2) и из определения разбиения (2.3) следует неравенство

$$|z(x) - \hat{z}_k(x)| = |z(x) - z_i| \leq 2/m, \tag{2.4}$$

справедливое при всяком $x \in T_i$ и любом $i \in I(k)$, $i \neq k$. Кроме того, из неравенства Чебышева [8, с. 296] получим

$$\mu(T_k) = \mu\{x : z(x) \geq m\} \leq \frac{1}{m} \int_T z(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{k-1}} \|z(x)\|_1,$$

и поэтому $\mu(T_k) \to 0$ при $k \to \infty$. Но тогда из абсолютной непрерывности интеграла Лебега следует, что

$$\lambda_k \equiv \int_{T_k} z(x)\,dx = z_k \mu(T_k) = \int_{T_k} \hat{z}_k(x)\,dx \to 0. \tag{2.5}$$

Из (2.4) и (2.5), учитывая неотрицательность функций $z(x)$, $\hat{z}_k(x)$, получим

$$\|z - \hat{z}_k\|_1 = \sum_{i=1}^{k-1} \int_{T_i} |z(x) - \hat{z}_k(x)|\,dx + \int_{T_k} |z(x) - \hat{z}_k(x)|\,dx \leq \sum_{i \in I(k)} \frac{2}{m} \int_{T_i} dx$$
$$+ \int_{T_k} z(x)\,dx + \int_{T_k} \hat{z}_k(x)\,dx = \frac{2\mu(T)}{m} + 2\lambda_k \to 0, \quad k \to \infty. \quad \square$$

Предположим, что определяющая функционал $\Omega(z)$ функция $f(z)$ кроме требований а) и б) удовлетворяет дополнительному условию: существует такая неотрицательная непрерывная и возрастающая при $t \geq 0$ функция $\varphi(t)$, $\varphi(0) = 0$, что выполнено неравенство

$$\Omega(z) - \Omega(\hat{z}_k) = \int_T f[z(x)]\,dx - \int_T f[\hat{z}_k(x)]\,dx \geq \varphi(\|z - \hat{z}_k\|_1). \tag{2.6}$$

Это неравенство считается верным для любой функции $z(x) \in D$, подчиненной условию $\|z\|_1 \leq 1$, и для соответствующей ей ступенчатой функции $\hat{z}_k(x)$, полученной на произвольном разбиении $\{T_i\}_{i=1}^k$ по формуле (2.2).

Замечание 2.3. 1. Если неравенство (2.6) выполнено для функционала (2.1), то оно справедливо и для функционала $\Omega_0(z) = \int_{T_0} f[z(x)]\,dx$, где T_0 — произвольная измеримая подобласть области T. Чтобы убедиться в этом, достаточно использовать в (2.6) функции $z(x)$, $\hat{z}_k(x)$ с носителем T_0.

2. Требование $\|z\|_1 \leq \mathrm{const}$ принципиально для выполнения соотношений типа (2.6). Примеры показывают, что без него такие соотношения могут и не выполняться.

Лемма 2.4. *Предположим, что выполнено условие* (2.6). *Пусть, далее, последовательность $\{z_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \subset D$ слабо сходится в $L_1(T)$ к функции $z(x) \in D$ такой, что $\|z\|_1 \leq 1/2$, и, кроме того, сходится по функционалу: $\Omega(z_n) \to \Omega(z)$. Тогда $z_n(x)$ сильно сходится к $z(x)$ в $L_1(T)$ при $n \to \infty$.*

Доказательство. Введем для функции $z(x)$ и для произвольного $k = m^2 + 1$ разбиение вида (2.3) области T. Используя его, построим ступенчатую функцию $\hat{z}_k(x)$ вида (2.2). Для каждой функции $z_n(x)$ построим на том же разбиении аналогичную ступенчатую функцию

$$\widehat{(z_n)}_k(x) = \sum_{i=1}^{k} (z_n)_i \chi(T_i),$$

$$(z_n)_i = \left\{ \mu^{-1}(T_i) \int_{T_i} z_n(x)\,dx, \quad \mu(T_i) \neq 0;\ 0, \quad \mu(T_i) = 0 \right\}.$$

Из слабой сходимости z_n к z следует, что

$$\|z_n\|_1 = \int\limits_T z_n(x)\,dx \to \int\limits_T z(x)\,dx = \|z\|_1 \le \frac{1}{2},$$

и, значит, $\|z_n\|_1 < 1$ при достаточно больших n. Точно так же

$$(z_n)_i = \mu^{-1}(T_i)\int\limits_{T_i} z_n(x)\,dx \to \mu^{-1}(T_i)\int\limits_{T_i} z(x)\,dx = z_i, \quad i \in I(k).$$

Значит, для каждого k

$$\|\widehat{(z_n)}_k - \hat{z}_k\|_1 = \sum_{i\in I(k)}\int\limits_{T_i} |\widehat{(z_n)}_k(x) - \hat{z}_k(x)|\,dx = \sum_{i\in I(k)} |(z_n)_i - z_i| \to 0 \tag{2.7}$$

при $n \to \infty$. Далее, используем условие (2.6) в форме

$$\|z_n - \widehat{(z_n)}_k\|_1 \le \varphi^{-1}\{\Omega(z_n) - \Omega[\widehat{(z_n)}_k]\}. \tag{2.8}$$

Здесь φ^{-1} — непрерывная возрастающая обратная к $\varphi(t)$ функция, для которой $\varphi^{-1}(0) = 0$. По условиям теоремы $\Omega(z_n) \to \Omega(z)$, а из сходимости (2.7) и полунепрерывности снизу функционала Ω получим $\liminf\limits_{n\to\infty} \Omega[\widehat{(z_n)}_k] \ge \Omega(\hat{z}_k)$ для каждого k. Тогда из (2.8) следует, что

$$\limsup_{n\to\infty} \|z_n - \widehat{(z_n)}_k\|_1 \le \varphi^{-1}\{\Omega(z) - \Omega(\hat{z}_k)\} \quad \forall k. \tag{2.9}$$

Учтем (2.7), (2.9) и перейдем к пределу при $n \to \infty$ в неравенстве

$$\|z_n - z\|_1 \le \|z_n - \widehat{(z_n)}_k\|_1 + \|\widehat{(z_n)}_k - \hat{z}_k\|_1 + \|\hat{z}_k - z\|_1.$$

В итоге получим

$$\limsup_{n\to\infty} \|z_n - z\|_1 \le \varphi^{-1}\{\Omega(z) - \Omega(\hat{z}_k)\} + \|\hat{z}_k - z\|_1 \quad \forall k. \tag{2.10}$$

Так как по лемме 2.2 $\|\hat{z}_k - z\|_1 \to 0$ при $k \to \infty$, в силу полунепрерывности снизу функционала Ω из (2.6) вытекает, что $\Omega(\hat{z}_k) \to \Omega(z)$. Поэтому из свойства $\varphi^{-1}(t) \to 0$, $t \to +0$, ясно, что правая часть неравенства (2.10) стремится к нулю при $k \to \infty$. Но тогда из его левой части получается сходимость $z_n(x) \to z(x)$ в $L_1(T)$. $\square$

Ограничение $\|z\|_1 \le 1/2$ на предельную функцию в лемме 2.4 носит технический характер и может быть снято следующим образом.

Теорема 2.5. *Пусть выполнено условие* (2.6) *на функционал* $\Omega(z)$. *Если произвольная последовательность* $\{z_n(x)\}_{i=1}^{\infty} \subset D$ *слабо сходится в* $L_1(T)$ *к функции* $\bar{z}(x) \in D$ *при* $n \to \infty$ *и сходится к ней по функционалу:* $\Omega(z_n) \to \Omega(\bar{z})$, *то она сильно сходится в* $L_1(T)$ *к этой функции.*

Доказательство. Возьмем фиксированное разбиение $\{T_i\}_{i=1}^{k}$ области T на замкнутые измеримые подобласти T_i такое, что $\mu(T_i) \ne 0$, $\mu(T_i \cap T_j) = 0$, $i \ne j$, и $\|\bar{z}\|_{L_1(T_i)} \le 1/2$ для любого $i = 1, \ldots, k$. Тогда $z_n(x)$ слабо сходится к $\bar{z}(x)$ на каждой области T_i. Функционалы $\Omega_i(z) = \int\limits_{T_i} f[z(x)]\,dx$ слабо полунепрерывны снизу. Это доказывается, как в теореме 2.1. Следовательно,

$$\limsup_{n\to\infty} \Omega_i(z_n) \geq \liminf_{n\to\infty} \Omega_i(z_n) \geq \Omega_i(\bar z),$$
$$\Omega(\bar z) = \lim_{n\to\infty} \Omega(z_n) = \limsup_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{k} \Omega_i(z_n) \geq \sum_{i=1}^{k} \Omega_i(\bar z) = \Omega(\bar z),$$

откуда ясно, что и $\Omega_i(z_n) \to \Omega_i(\bar z)$. Согласно замечанию 2.3 для каждого функционала $\Omega_i(z)$ справедливо условие вида (2.6). Поэтому на каждой области T_i для функционала $\Omega_i(z)$ и для последовательности $\{z_n(x)\}$ выполнены условия леммы 2.4, которые обеспечивают сходимости $\|z_n - \bar z\|_{L_1(T_i)} \to 0$. Значит, и

$$\|z_n - \bar z\|_1 = \sum_{i=1}^{k} \|z_n - \bar z\|_{L_1(T_i)} \to 0$$

при $n \to \infty$. $\square$

Теорема 2.5 обобщает результат, полученный в [6] для частного случая $\Omega(z) = \Omega_E(z)$.

§ 3. Примеры регуляризующих функционалов в L_1

Как видно из теоремы 2.5, ключевым условием, обеспечивающим сильную сходимость последовательностей в $L_1(T)$, является условие (2.6). Можно указать требования на функцию $f(z)$, которые гарантируют его выполнение.

Зададим некоторые вспомогательные величины. Пусть снова $\{T_i\}_{i=1}^k$ — любое разбиение области T: $\bigcup\limits_{i=1}^{k} T_i = T$, $T_i \cap T_j = \varnothing$, $i \neq j$. Построим для произвольной функции $z(x) \in D$ на этом разбиении ступенчатую функцию $\hat z(x) = \sum\limits_{i=1}^{k} z_i \chi(T_i)$ вида (2.2). Введем обозначения

$$P_i = \{x \in T_i : \hat z(x) \leq z(x)\},\ p_i = \mu(P_i),\ Q_i = \{x \in T_i : \hat z(x) > z(x)\},\ q_i = \mu(Q_i),$$

$$\varepsilon_i = \frac{1}{2}\int\limits_{T_i} |z(x) - \hat z(x)|\,dx, \quad z_{P_i} = z_i + \frac{\varepsilon_i}{p_i}, \quad z_{Q_i} = z_i - \frac{\varepsilon_i}{q_i}. \tag{3.1}$$

Без ограничения общности можно считать, что $\varepsilon_i, z_i, p_i, q_i > 0$. Если какие-либо из этих чисел обращаются в нуль, то получаемые ниже результаты остаются справедливыми, хотя доказательства несколько модифицируются.

Лемма 3.1. *Если функция $f(z)$ выпукла и непрерывна при $z \geq 0$, то для всякой функции $z(x) \in D$ и каждого элемента разбиения T_i справедливы неравенства*

$$\int\limits_{T_i} f[z(x)]\,dx \geq f(z_{P_i})p_i + f(z_{Q_i})q_i \geq \int\limits_{T_i} f[\hat z(x)]\,dx. \tag{3.2}$$

Доказательство. Из (3.1) следуют равенства

$$\int\limits_{P_i} z(x)\,dx - \int\limits_{Q_i} z(x)\,dx = \left[\int\limits_{P_i} z(x)\,dx - z_i p_i\right] + \left[z_i q_i - \int\limits_{Q_i} z(x)\,dx\right] + z_i p_i - z_i q_i$$

$$= \int\limits_{P_i} [z(x) - \hat{z}(x)]\,dx + \int\limits_{Q_i} [\hat{z}(x) - z(x)]\,dx + z_i p_i - z_i q_i$$

$$= \int\limits_{T_i} |z(x) - \hat{z}(x)|\,dx - 2\varepsilon_i + p_i\left(z_i + \frac{\varepsilon_i}{p_i}\right) - q_i\left(z_i - \frac{\varepsilon_i}{q_i}\right) = z_{P_i} p_i - z_{Q_i} q_i,$$

а также равенства

$$\int\limits_{P_i} z(x)\,dx + \int\limits_{Q_i} z(x)\,dx = \int\limits_{T_i} z(x)\,dx = \int\limits_{T_i} \hat{z}(x)\,dx = z_i \mu(T_i)$$

$$= z_i p_i + z_i q_i = z_{P_i} p_i + z_{Q_i} q_i. \quad (3.3)$$

Из них получим

$$\int\limits_{P_i} z(x)\,dx = z_{P_i} p_i, \quad \int\limits_{Q_i} z(x)\,dx = z_{Q_i} q_i, \quad z_{P_i} \geq 0, \quad z_{Q_i} \geq 0.$$

Отсюда и из неравенства Иенсена [11] для выпуклой непрерывной функции $f(z)$ имеем

$$\frac{1}{p_i}\int\limits_{P_i} f[z(x)]\,dx \geq f\left[\frac{1}{p_i}\int\limits_{P_i} z(x)\,dx\right] = f(z_{P_i}),$$

$$\frac{1}{q_i}\int\limits_{Q_i} f[z(x)]\,dx \geq f\left[\frac{1}{q_i}\int\limits_{Q_i} z(x)\,dx\right] = f(z_{Q_i}).$$

Поэтому

$$\int\limits_{T_i} f[z(x)]\,dx = \int\limits_{P_i} f[z(x)]\,dx + \int\limits_{Q_i} f[z(x)]\,dx \geq f(z_{P_i})p_i + f(z_{Q_i})q_i,$$

и первое неравенство леммы доказано. Второе неравенство получается так:

$$f(z_{P_i})p_i + f(z_{Q_i})q_i \geq f\left(\frac{z_{P_i}p_i + z_{Q_i}q_i}{p_i + q_i}\right)(p_i + q_i) = f(z_i)\mu(T_i) = \int\limits_{T_i} f[\hat{z}(x)]\,dx.$$

Здесь использованы выпуклость функции $f(z)$ и равенство (3.3). □

Класс функций $f(z)$, обеспечивающих выполнение условия (2.6), указывает

Теорема 3.2. *Пусть $f(z)$ — непрерывная при $z \geq 0$ и дважды непрерывно дифференцируемая при $z > 0$ функция, причем $f''(z) > 0$ и $f''(z)$ монотонна. Предположим также, что найдется такое число ρ, $0 \leq \rho \leq 1$, для которого $f''(z)z^\rho \geq \sigma = \text{const} > 0$ при $z > 0$. Тогда для всякой $z(x) \in D$, удовлетворяющей условию $\|z\|_1 \leq 1$, выполнено неравенство*

$$\Omega(z) - \Omega(\hat{z}) \geq c_\rho \|z - \hat{z}\|_1^2, \quad c_\rho = \frac{\sigma}{8\mu^{1-\rho}(T)}. \quad (3.4)$$

Доказательство. Для $f(z)$ выполнены условия леммы 3.1. Поэтому справедливо соотношение (3.2), из которого следует, что

$$\Delta_i \equiv \int\limits_{T_i} f[z(x)]\,dx - \int\limits_{T_i} f[\hat{z}(x)]\,dx \geq f(z_{P_i})p_i + f(z_{Q_i})q_i$$
$$- \int\limits_{P_i} f(z_i)\,dx - \int\limits_{Q_i} f(z_i)\,dx = p_i[f(z_{P_i}) - f(z_i)] + q_i[f(z_{Q_i}) - f(z_i)]$$
$$= p_i\left[f\left(z_i + \frac{\varepsilon_i}{p_i}\right) - f(z_i)\right] + q_i\left[f\left(z_i - \frac{\varepsilon_i}{q_i}\right) - f(z_i)\right]. \quad (3.5)$$

Используем в (3.5) формулу Тейлора для $f(z)$ и примем во внимание неравенства $p_i, q_i \leq \mu(T_i)$, а также вытекающее из монотонности и положительности функции $f''(z)$ неравенство $f''(z+\alpha) + f''(z-\beta) \geq f''(z)$ при $z > \beta \geq 0$, $\alpha \geq 0$:

$$\Delta_i = f'(z_i)\varepsilon_i + f''\left(z_i + \theta_1\frac{\varepsilon_i}{p_i}\right)\frac{\varepsilon_i^2}{2p_i} - f'(z_i)\varepsilon_i + f''\left(z_i - \theta_2\frac{\varepsilon_i}{q_i}\right)\frac{\varepsilon_i^2}{2q_i} \geq f''(z_i)\frac{\varepsilon_i^2}{2\mu(T_i)},$$

где $0 < \theta_1, \theta_2 < 1$. Поэтому

$$\Omega(z) - \Omega(\hat{z}) = \sum_{i=1}^{k}\Delta_i \geq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} f''(z_i)\frac{\varepsilon_i^2}{\mu(T_i)} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\varepsilon_i^2 s_i^2, \quad s_i^2 \equiv \frac{f''(z_i)}{\mu(T_i)}. \quad (3.6)$$

Из неравенства Коши — Буняковского получим

$$\frac{1}{2}\|z - \hat{z}\|_1 = \sum_{i=1}^{k}\varepsilon_i \leq \left\{\sum_{i=1}^{k}\varepsilon_i^2 s_i^2\right\}^{1/2}\left\{\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{s_i^2}\right\}^{1/2}, \quad (3.7)$$

причем

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{s_i^2} = \sum_{i=1}^{k}\frac{\mu(T_i)}{f''(z_i)} = \int\limits_{T}\frac{dx}{f''(\hat{z}(x))}. \quad (3.8)$$

Далее, из неравенства Гёльдера, условия $f''(z)z^\rho \geq \sigma$ и соотношения $\|\hat{z}\|_1 = \|z\|_1 \leq 1$ следует оценка

$$\int\limits_{T}\frac{dx}{f''(\hat{z}(x))} \leq \frac{1}{\sigma}\int\limits_{T}\hat{z}^\rho(x)\,dx \leq \frac{1}{\sigma}\left\{\int\limits_{T}\hat{z}(x)\,dx\right\}^\rho\left\{\int\limits_{T}1\,dx\right\}^{1-\rho} \leq \frac{1}{\sigma}\mu^{1-\rho}(T).$$

Она вместе с (3.6)–(3.8) приводит к итоговой оценке:

$$\Omega(z) - \Omega(\hat{z}) \geq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\varepsilon_i^2 s_i^2 \geq c_\rho\|z - \hat{z}\|_1^2. \quad \square$$

Можно проверить, что условиям теоремы 3.2 удовлетворяют, например, функции $f(z) = z^{1+\gamma}$, $0 < \gamma \leq 1$, $f(z) = \exp(z)$ и $f(z) = z\ln(z)$. При этом для них выполнены также условия а) и б). Таким образом, соответствующие функционалы вида (2.1)

$$\Omega(z) = \int\limits_{T} z^{1+\gamma}(x)\,dx, \quad \Omega(z) = \int\limits_{T}\exp(z(x))\,dx, \quad \Omega_E(z) = \int\limits_{T} z(x)\ln(z(x))\,dx$$

обладают свойствами, указанными в лемме 2.1, и свойством (2.6) в форме (3.4). Поэтому для этих функционалов справедлив результат теоремы 2.5. Отметим, что неравенство типа (2.6) для функционала $\Omega_E(z)$ было установлено ранее в работе [6] в другой форме: функция $\varphi(t)$ имела там вид $\varphi(t) = (1+\frac{t}{2})\ln(1+\frac{t}{2}) - \frac{t}{2}$.

Можно привести и ряд других примеров функционалов вида (2.1) со свойствами а), б) и (2.6).

§ 4. Применение введенных функционалов для решения некорректных задач

Вернемся к постановке задачи (1.1), (1.2). Зададим функционал $\Omega(z)$ вида (2.1) с условиями а), б) на функцию $f(z)$ и подчиненный требованию (2.6). Пусть τ — топология слабой (секвенциальной) сходимости в $L_1(T)$. Из теоремы 2.1 вытекает, что А) функционал $\Omega(z)$ τ-секвенциально полунепрерывен снизу на D; Б) множества Ω_C τ-секвенциально компактны. Будем считать в дальнейшем, что функционал $\Phi(z) = \|Az - u\|_U$ слабо полунепрерывен снизу на D. Это выполнено, например, для операторов A, слабо непрерывных из $L_1(T)$ в банахово пространство U, и, в частности, для линейных ограниченных операторов. Другие примеры можно найти в [4]. Тогда выполнено условие: В) функционал $\Phi(z)$ τ-секвенциально полунепрерывен снизу на D. Но именно условия А)–В) согласно [12] и [4, теорема 1.4.1] гарантируют существование Ω-оптимальных квазирешений уравнения (1.1) на множестве D. Итак, задача (1.2) с функционалом $\Omega(z)$ вида (2.1) разрешима, хотя, быть может, и неоднозначно.

В [12, 4] установлена общая теорема сходимости приближенных решений нелинейной задачи (1.1), (1.2) в топологическом пространстве.

Теорема 4.1. *Предположим, что для функционалов* $\Omega(z)$ *и* $\Phi(z)$ *выполнены требования* А)–В). *Если при этом для семейства* $\{z_\eta(x)\} \subset D$ *выполняются условия*

$$\limsup_{\eta\to 0} \Omega(z_\eta) \le \Omega(\bar z), \tag{4.1}$$

$$\lim_{\eta\to 0} \|Az_\eta - u\|_U = \|A\bar z - u\|_U, \tag{4.2}$$

то $z_\eta(x) \xrightarrow{\tau} \overline{Z}$ *и* $\Omega(z_\eta) \to \Omega(\bar z)$ *при* $\eta \to 0$.

Отсюда ясно, что выполнение условий теоремы влечет слабую (секвенциальную) сходимость семейства функций $z_\eta(x)$ к множеству $\overline{Z}$, а также сходимость по функционалу $\Omega(z_\eta) \to \Omega(\bar z)$. Тогда сильная сходимость семейства $z_\eta(x)$ к $\overline{Z}$ в $L_1(T)$ получается из теоремы 2.5. Это позволяет утверждать, что для приближенных решений $z_\eta(x)$ задачи (1.1), (1.2), найденных по ее возмущенным данным $\{A_h, u_\delta, h, \delta\}$ с помощью некоторого метода, верна

Теорема 4.2. *Предположим, что функционал* $\Omega(z)$ *вида* (2.1) *построен с помощью функции* $f(z)$, *обладающей свойствами* а), б), *и удовлетворяет условию* (2.6). *Пусть, кроме того, выполнено условие* в) *на функционал* $\Phi(z)$. *Тогда всякий метод приближенного решения задачи* (1.1), (1.2), *обеспечивающий для своих приближений* $z_\eta(x) \in D$ *выполнение условий* (4.1), (4.2), *гарантирует сильную сходимость этих приближений в* $L_1(T)$ *к множеству* Ω*-оптимальных квазирешений при* $\eta \to 0$.

Поэтому все предельные точки в $L_1(T)$ семейства $\{z_\eta(x)\}$ (при $\eta \to 0$) являются Ω-оптимальными квазирешениями. Если задача (1.2) однозначно разрешима, то $z_\eta(x) \to \bar z(x)$ в $L_1(T)$.

Замечание 4.3. Аналогичные результаты справедливы и при решении задачи (1.1), (1.2) на множестве $D_0 = \{z(x) \in L_1(T) : z(x) \ge z_0(x),\ \Omega^{(0)}(z) < \infty\}$, где $z_0(x) \in L_1(T)$ — заданная функция, а $\Omega^{(0)}(z) = \int\limits_T f[z(x) - z_0(x)]\,dx$.

В заключение отметим, что выполнение требований (4.1), (4.2) (в том числе и для функционала $\Omega(z)$ вида (2.1)) обеспечивают многие методы решения линейных и нелинейных некорректных задач. В частности, если предположить, что выполнены условия аппроксимации [4, с. 128] точных данных задачи приближенными: $\|u - u_\delta\| \le \delta$, $\|Az - A_h z\|_U \le \Psi(h, \Omega(z))$, где $\Psi(h, \Omega)$ — непрерывная неубывающая по Ω функция, $\Psi(0, \Omega) = 0$, то соотношения (4.1), (4.2) будут справедливы для приближенных решений, полученных по методу регуляризации А. Н. Тихонова с выбором параметра по (обобщенным) принципам невязки, сглаживающего функционала и квазирешений (см. [2, 3, 12, 4]), а также для таких вариационных регуляризующих алгоритмов как (обобщенный) метод невязки [2, 12, 4] и (обобщенный) метод квазирешений [2, 13]. Для вариантов всех этих методов, использующих функционал $\Omega(z)$ вида (2.1), теорема 4.2 гарантирует сильную сходимость в $L_1(T)$ приближенных решений к Ω-оптимальным квазирешениям.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тихонов А. Н, Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979.
2. *Иванов В. К., Васин В. В., Танана В. П.* Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978.
3. *Морозов В. А.* Регулярные методы решения некорректно поставленных задач. М.: Наука, 1987.
4. *Тихонов А. Н., Леонов А. С., Ягола А. Г.* Нелинейные некорректные задачи. М.: Наука, 1995.
5. *Wernecke S. J., D'Addario L. R.* Maximum entropy image reconstruction // IEEE Trans. Comput. 1977. C-26. P. 351–64.
6. *Amato U., Hughes W.* Maximum entropy regularization of Fredholm integral equations of the first kind // Inverse Problems. 1991. V. 7. P. 793–808.
7. *Eggermont P. P. B.* Maximum entropy regularization for Fredholm integral equations of the first kind // SIAM J. Math. Anal. 1993. V. 24, N 6. P. 1557–1576.
8. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1968.
9. *Васильев Ф. П.* Методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1981.
10. *Красносельский М. А., Забрейко П. П., Пустыльник Е. И., Соболевский П. Е.* Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. М.: Наука, 1966.
11. Эдвардс Р. Функциональный анализ. Теория и приложения. М.: Мир, 1969.
12. *Леонов А. С.* О некоторых алгоритмах решения некорректных экстремальных задач // Мат. сб. 1986. Т. 129, № 2. С. 218–231.
13. *Леонов А. С.* Функции нескольких переменных с ограниченной вариацией в некорректных задачах // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1996. Т. 36, № 9. С. 35–49.

Статья поступила 17 мая 1999 г.

г. Москва
Московский инженерно-физический институт, кафедра математики.
Каширское шоссе, 31, 115409 Москва
leonov@illposed.msk.ru