Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2001. Том 42, № 2

УДК 519.21

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ОТНОШЕНИЯ ПРАВДОПОДОБИЯ ДЛЯ НЕРЕГУЛЯРНЫХ СЕМЕЙСТВ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ В МНОГОМЕРНОМ СЛУЧАЕ

И. С. Борисов, Д. В. Миронов

Аннотация: Исследована точность аппроксимации распределения логарифмического процесса отношения правдоподобия, построенного по параметрическому семейству многомерных распределений с разрывными плотностями и многомерным параметром, сверткой обобщенного пуассоновского и вырожденного гауссовского распределений. Библиогр. 15.

§ 1. Постановка задачи и основной результат

Данная работа продолжает исследование авторов [1], посвященное асимптотическому анализу логарифмического процесса отношения правдоподобия, построенного по параметрическому семейству разрывных многомерных плотностей со скалярным параметром. В настоящей работе основной результат [1] обобщается на случай многомерного параметра.

Пусть $X_1, \dots, X_n$ — выборка, состоящая из независимых случайных векторов, распределенных в пространстве $\mathbb{R}^d$ с общей плотностью $f(x,\theta)$ (относительно меры Лебега), зависящей от неизвестного параметра $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^m$. Предположим, что плотность непрерывна по $x = (x_1, \dots, x_d)$ за исключением точек множества K_θ. Предположим также, что K_θ при всех $\theta \in \Theta$ — гладкое многообразие размерности $d-1$ и определены такие множества Ω_θ^1 и Ω_θ^2, которые, во-первых, вместе с K_θ образуют разбиение пространства $\mathbb{R}^d$, а во-вторых, в точках $y \in K_\theta$ плотность $f(x,\theta)$ имеет разрывы 1-го рода по направлениям, задаваемым множествами Ω_θ^1 и Ω_θ^2:

$$0 \neq q(y,\theta) = \lim_{x \to y|_{\Omega_\theta^1}} f(x,\theta), \quad 0 \neq p(y,\theta) = \lim_{x \to y|_{\Omega_\theta^2}} f(x,\theta),$$

где запись $x \to y|_{\Omega_\theta^j}$ означает, что $x \to y$ и при этом $x \in \Omega_\theta^j$.

Считая далее истинное значение параметра θ_0 фиксированным, введем следующие обозначения:

$$l(x,\theta) = \ln f(x,\theta), \quad \theta \in \Theta, \quad \Delta(x,\theta) = l(x,\theta) - l(x,\theta_0),$$

$$Y_n(u) = \sum_{i \le n} \Delta(X_i, \theta_0 + u/n), \quad \theta_0 + u/n \in \Theta,$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 99–01–00504, 00–01–00802) и фонда INTAS (код проекта 99–01317).

$\mathbf{E}_\theta$ — математическое ожидание по распределению с плотностью $f(\cdot,\theta)$.

Наряду с вышеприведенными считаем выполненными следующие условия.

1. Мы предполагаем, что многообразия K_θ ориентированы. Это означает, что в каждой точке $y \in K_\theta$ можно восстановить единичный вектор нормали $N(y,\theta)$, который как векторнозначная функция непрерывен по θ. Будем считать, что вектор $N(y,\theta)$ «обращен» в множество Ω^2_θ.

Многообразия K_θ представимы в параметрической форме

$$K_\theta = \{y(t,\theta);\ t \in [0,1]^{d-1}\}, \quad \theta \in \Theta,$$

где $y(t,\theta) = (y^1(t,\theta),\dots,y^d(t,\theta))$, а функции $y^i(t,\theta)$, $i = 1,\dots,d$, непрерывно дифференцируемы по параметрам $t = (t_1,\dots,t_{d-1})$ и $\theta = (\theta_1,\dots,\theta_m)$; соответствующие частные производные компонент параметризации обозначим через $y^i_{t_k}(t,\theta)$, $k = 1,\dots,d-1$ и $y^i_{\theta_j}(t,\theta)$, $j = 1,\dots,m$. Будем также предполагать, что вторые частные производные функций $y^i(t,\theta)$ по t_k ограничены равномерно по t и θ.

В силу компактности множества определения параметризации и приведенных условий ее гладкости многообразия K_θ с необходимостью ограничены, что не является существенным. Можно рассматривать гладкую параметризацию, заданную на открытом единичном кубе, что позволит рассматривать и неограниченные многообразия. Однако при этом в нижеследующих условиях и выкладках мы дополнительно должны потребовать существование соответствующих поверхностных интегралов.

Пусть, кроме того, для любого $\theta \in \Theta$ и любых $x' \in \Omega^1_\theta$, $x'' \in \Omega^2_\theta$ имеет место соотношение $[x'x''] \cap K_\theta \neq \varnothing$, где $[x',x''] = \{x' + h(x''-x');\ h \in [0,1]\}$. Это означает, что при каждом $\theta \in \Theta$ множество K_θ представляет собой компактное многообразие без края (т. е. область $\Omega^1_\theta \cup \Omega^2_\theta$ не является односвязной).

Обозначим $\Theta_1(x) = \{\theta \in \Theta : x \in \Omega^1_\theta\}$, $\Theta_2(x) = \{\theta \in \Theta : x \in \Omega^2_\theta\}$.

2. Для всех $x \in \bigcup K_\theta$ в каждой из областей $\Theta_1(x)$ и $\Theta_2(x)$ существуют частные производные $l'_{\theta_j}(x,\theta)$ по θ_j, удовлетворяющие условиям

$$\left|l'_{\theta_j}(x,\theta+\delta) - l'_{\theta_j}(x,\theta)\right| \le L(x,\theta)|\delta|, \quad \mathbf{E}_\theta L^{2+\beta}(X_1,\theta) < \infty$$

при всех $\theta, \theta+\delta \in \Theta_i(x)$, $i = 1, 2$, $1 \le j \le m$, и некотором $\beta > 0$.

Здесь и всюду в дальнейшем символом c обозначаются различные постоянные, не зависящие от n, пространственных переменных и $\theta \in \Theta$, но зависящие в некоторых случаях от распределения X_1 и других параметров задачи. На протяжении всей статьи символом $|\cdot|$ будет обозначаться равномерная норма (покоординатный максимум) в том или ином конечномерном евклидовом пространстве, причем зависимость от размерности указываться не будет.

3. Частные производные $y^i_{\theta_j}(t,\theta)$ ограничены равномерно по t и θ и удовлетворяют условию Липшица по θ:

$$\left|y^i_{\theta_j}(t,\theta) - y^i_{\theta_j}(t,\theta+\delta)\right| \le c|\delta|, \quad \theta, \theta+\delta \in \Theta,\ t \in [0,1]^{d-1}.$$

4. Справедливы следующие неравенства:

$$|f(x,\theta) - q(y,\theta)| \le c|x-y|, \quad x \in \Omega^1_\theta,\ y \in K_\theta,$$

$$|f(x,\theta) - p(y,\theta)| \le c|x-y|, \quad x \in \Omega^2_\theta,\ y \in K_\theta,$$

$$|l(x,\theta) - \ln q(y,\theta')| \le c(|x-y| + |\theta-\theta'|), \quad x \in \Omega^1_\theta,\ y \in K_{\theta'},$$

$$|l(x,\theta) - \ln p(y,\theta')| \le c(|x-y| + |\theta - \theta'|), \quad x \in \Omega_\theta^2,\ y \in K_{\theta'}.$$

Пусть W — случайная пуассоновская мера на $\mathbb{R} \times [0,1]^{d-1}$. На непересекающихся множествах она принимает независимые целочисленные значения, распределенные по закону Пуассона, и для любого $b \in \mathbb{R}$ и любого борелевского множества $B \subseteq [0,1]^{d-1}$ выполняются следующие соотношения:

$$\mathbf{E}W([0,b] \times B) = b \int\limits_B p(y(t,\theta_0),\theta_0) I(t,\theta_0)\,dt, \quad b > 0,$$

$$\mathbf{E}W([b,0] \times B) = -b \int\limits_B q(y(t,\theta_0),\theta_0) I(t,\theta_0)\,dt, \quad b < 0,$$

где $I(t,\theta_0) = \sqrt{\det \|(y_{t_i}(t,\theta_0), y_{t_j}(t,\theta_0))\|}$ — коэффициент искажения объема, возникающий при замене переменных в поверхностном интеграле (см. [2]).

Положим

$$D(t,\theta) = \begin{pmatrix} y^1_{\theta_1}(t,\theta) & \dots & y^d_{\theta_1}(t,\theta) \\ y^1_{\theta_2}(t,\theta) & \dots & y^d_{\theta_2}(t,\theta) \\ & \dots & \\ y^1_{\theta_m}(t,\theta) & \dots & y^d_{\theta_m}(t,\theta) \end{pmatrix}, \tag{1}$$

$$\Pi(u) = \int\limits_{[0,1]^{d-1}} \ln \frac{q(y(t,\theta_0),\theta_0)}{p(y(t,\theta_0),\theta_0)} \int\limits_0^{(uD,N)} W(dv,dt),$$

где uD — произведение вектора u и матрицы $D = D(t,\theta_0)$, $N = N(y(t,\theta_0),\theta_0)$, а скобки в верхнем пределе внутреннего интеграла обозначают скалярное произведение.

Определим процесс

$$Y(u) = \int\limits_{[0,1]^{d-1}} (uD(t,\theta_0), N(y(t,\theta_0),\theta_0)) \\ \times [p(y(t,\theta_0),\theta_0) - q(y(t,\theta_0),\theta_0)] I(t,\theta_0)\,dt + \Pi(u).$$

Случайный процесс $Y(u)$ в рассматриваемой общности, по-видимому, впервые введен в [3]. Нетрудно видеть, что при $d=1$ и $m=1$ он принимает вид (см. [4])

$$Y(u) = u(p(\theta_0) - q(\theta_0))y'(\theta_0) + (\pi_1(p(\theta_0)y'(\theta_0)u^+) - \pi_2(q(\theta_0)y'(\theta_0)u^-)) \ln \frac{q(\theta_0)}{p(\theta_0)},$$

где π_1 и π_2 — независимые стандартные пуассоновские процессы на положительной полупрямой, $u^\pm = \max\{0, \pm u\}$ — соответственно положительная и отрицательная части числа, $y(\theta)$ — точка разрыва плотности $f(x,\theta)$.

Обозначим $T_n = c_0 \ln n$, где c_0 будет выбрано в лемме 1. Для произвольных случайных процессов $X(u)$ и $Z(u)$ положим

$$\|X - Z\|_{T_n} = \sup_{|u| \le T_n} |X(u) - Z(u)|.$$

Далее, для произвольных последовательностей процессов $X(u,n)$ и $Y(u,n)$ и сходящейся к нулю последовательности положительных чисел a_n условимся писать

$$X(u,n) = Y(u,n) + O(a_n), \quad |u| \le T_n,$$

если для каждого n существует такой процесс $Z(u,n)$, что $X(u,n) = Y(u,n) + Z(u,n)$ с вероятностью 1 (на соответствующем вероятностном пространстве) при всех $u \in [-T_n, T_n]$, и, кроме того, справедлива оценка $\mathbf{P}(\|Z\|_{T_n} \geq ca_n) \leq ca_n$. Запись

$$X(u,n) \stackrel{d}{=} Y(u,n) + O(a_n), \quad |u| \leq T_n,$$

означает, что совпадают конечномерные распределения процессов $X(u,n)$ и $Y(u,n)+Z(u,n)$, заданных, возможно, на разных вероятностных пространствах.

Обозначим через $l'_\theta(x,\theta) = (l'_{\theta_1}(x,\theta), l'_{\theta_2}(x,\theta), \dots l'_{\theta_m}(x,\theta))$ вектор, координатами которого являются частные производные логарифмической плотности $l(x,\theta)$ по переменным θ_j.

Теорема. *Пусть выполнены условия* 1–4 *и* $\mathbf{E}_\theta |l'_\theta(x,\theta)|^\alpha < \infty$ *при некотором* $\alpha > \min\{3, d+1\}$. *Тогда случайные процессы* $Y_n(u)$ *и* $Y(u)$ *можно так определить на одном вероятностном пространстве, что*

$$Y_n(u) = Y(u) + n^{-1/2}(u,\eta) + O(\gamma_n), \quad |u| \leq T_n, \tag{2}$$

где $\gamma_n = (\ln n)^{\alpha/(1+\alpha)} n^{2/(1+\alpha)-1}$, η *— не зависящий от* $Y(u)$ *случайный вектор, имеющий* m*-мерное нормальное распределение с нулевым средним и ковариационной матрицей* $\mathrm{Cov}(\eta) = \mathrm{Cov}(l'_\theta(X_1,\theta_0))$.

Если же для случайного вектора $l'_\theta(X_1,\theta)$ *выполнено условие Крамера, т. е. существует такая окрестность нуля* $U \subset \mathbb{R}^m$, *что величина* $\mathbf{E}_\theta \exp\{(u, l'_\theta(X_1,\theta))\}$ *ограничена равномерно по* $u \in U$ *и* $\theta \in \Theta$, *то оценка* (2) *справедлива с* $\gamma_n = n^{-1}\ln^2 n$.

Замечание 1. Задача аппроксимации процесса $Y_n(\cdot)$ с помощью обобщенного пуассоновского процесса $\Pi(\cdot)$ рассмотрена в [4] при $m, d = 1$ и в [3] для произвольных m и d. В одномерном случае оценка точности этой аппроксимации получена в [5]. В [1] приведено асимптотическое разложение процесса $Y_n(\cdot)$ на расширенном вероятностном пространстве в случае произвольного d и $m = 1$, что представляет собой частный случай вышеприведенной теоремы. Соответствующая оценка остатка в [1] имеет более высокий порядок малости по сравнению с [5]. Идея приближения распределений $Y_n(\cdot)$ с помощью сверток гауссовских и обобщенных пуассоновских распределений восходит к классическим работам А. Н. Колмогорова и его последователей, посвященным проблеме аппроксимации распределений сумм независимых случайных величин (или векторов) безгранично делимыми законами (см., например, [6]). При этом выявленный феномен состоит в возможности значительно более точной аппроксимации (по сравнению с классическими приближениями) распределений указанных сумм безгранично делимыми законами, отличными, скажем, от гауссовских, при меньших ограничениях на слагаемые. Результат приведенной теоремы можно трактовать как многомерный вариант теоремы Колмогорова для сумм независимых процессов специального вида (первый бесконечномерный аналог указанной аппроксимации для другого класса случайных процессов — процессов частных сумм получен в [7]). Отметим также, что при $m, d = 1$ приведенное выше асимптотическое разложение можно извлечь из [8], где, по существу, использовалась асимптотическая факторизация распределения процесса $Y_n(\cdot)$, разработанная в [7, 9]. Необходимо также отметить, что, помимо самостоятельного интереса (в рамках проблемы Колмогорова), асимптотическая факторизация распределений сумм независимых случайных элементов (скажем, случайных процессов) позволяет уточнять предельное поведение распределений регулярных функционалов от указанных сумм (см., например, [7]).

Замечание 2. Приведенная теорема допускает обобщение на случай, когда многообразия точек разрывов плотностей параметрического семейства при каждом θ представляют собой объединение конечного числа отделенных друг от друга в смысле расстояния Хаусдорфа гладких замкнутых многообразий, удовлетворяющих приведенным выше условиям. При этом остается корректным понятие одностороннего предела плотностей в точках указанного многообразия, но в определении процесса $Y(u)$ в правой части (1) параметризация $y(t,\delta)$ будет уже кусочно-непрерывной (и кусочно-гладкой) векторной функцией.

§ 2. Доказательство теоремы

Положим

$$G_n^1(u) = \Omega^1_{\theta_0} \cap \Omega^2_{\theta_0+u/n}, \quad G_n^2(u) = \Omega^2_{\theta_0} \cap \Omega^1_{\theta_0+u/n},$$

$$G_n(u) = G_n^1(u) \cup G_n^2(u), \quad G_n = \bigcup_{\{u:|u|\le T_n\}} G_n(u).$$

Пусть $\{X_i^{(1)}\}$, $\{X_i^{(2)}\}$ и $\{\nu_i\}$ — независимые последовательности независимых случайных величин с распределениями

$$\mathbf{P}\big(X_i^{(1)} \in A\big) = \mathbf{P}(X_1 \in A \mid X_1 \in G_n) \quad \forall A \in \mathscr{B}^d,$$

$$\mathbf{P}\big(X_i^{(2)} \in A\big) = \mathbf{P}(X_1 \in A \mid X_1 \notin G_n) \quad \forall A \in \mathscr{B}^d,$$

$\{\nu_i\}$ имеют распределение Бернулли с вероятностью успеха $g = \mathbf{P}(X_1 \in G_n)$; здесь $\mathscr{B}^d$ — борелевская σ-алгебра в $\mathbb{R}^d$. Для простоты будем считать, что события $\{X_1 \in G_n\}$ и $\{X_1 \notin G_n\}$ имеют ненулевые вероятности. Легко видеть, что случайные векторы X_i совпадают по распределению со следующей смесью:

$$X_i \overset{d}{=} \nu_i X_i^{(1)} + (1-\nu_i) X_i^{(2)}. \tag{3}$$

Обозначим через $\operatorname{pr} x$ ортопроекцию x на K_{θ_0}. В силу условия 1 она определена корректно, если точка x достаточно близка к K_{θ_0}.

Определим процесс

$$Y^{(n)}(u) = \int\limits_{[0,1]^{d-1}} (uD(t,\theta_0), N(y(t,\theta_0),\theta_0)) \times [p(y(t,\theta_0),\theta_0) - q(y(t,\theta_0),\theta_0)] I(t,\theta_0)\,dt + \Pi_n(u),$$

где $\Pi_n(u)$ — некоторый обобщенный пуассоновский процесс, конечномерные распределения которого совпадают с конечномерными распределениями процесса

$$\sum_{i=1}^{\pi_{ng}} \big(I\{X_i^{(1)} \in G_n^2(u)\} - I\{X_i^{(1)} \in G_n^1(u)\}\big) \ln \frac{q\big(\operatorname{pr} X_i^{(1)},\theta_0\big)}{p\big(\operatorname{pr} X_i^{(1)},\theta_0\big)},$$

π_{ng} — пуассоновская случайная величина с параметром ng, не зависящая от последовательности $\{X_i^{(1)}\}$.

Обозначим $B_n = \sum\limits_{i\le n} \nu_i$.

Лемма 1. *Константу c_0 в определении T_n можно выбрать таким образом, что* $\mathbf{P}(B_n \geq c_0 \ln n) \leq n^{-2}$.

Доказательство. Найдем представление для $\mathbf{P}\big(X_1 \in G_n^1(u)\big)$. Рассмотрим элемент ds поверхности K_{θ_0} и элементарный объем $dG_n^1(u)$ с основанием ds. Этот элементарный объем представляет собой параллелепипед, и с учетом замены $s = y(t,\theta_0)$, $t \in [0,1]^d$, равен

$$\left(\frac{1}{n}(uD(t,\theta_0), N(y(t,\theta_0),\theta_0))^- + O(|u|^2/n^2)\right) I(t,\theta_0)\,dt.$$

Следовательно, принимая во внимание условие 4 и заменяя плотность f функцией q, получаем

$$\mathbf{P}\big(X_1 \in G_n^1(u)\big) = \frac{1}{n}\int\limits_{[0,1]^{d-1}} (uD(t,\theta_0), N(y(t,\theta_0),\theta_0))^- q(y(t,\theta_0),\theta_0) I(t,\theta_0)\,dt + O(u^2/n^2).$$

Для $G_n^2(u)$ имеет место аналогичная формула:

$$\mathbf{P}\big(X_1 \in G_n^2(u)\big) = \frac{1}{n}\int\limits_{[0,1]^{d-1}} (uD(t,\theta_0), N(y(t,\theta_0),\theta_0))^+ p(y(t,\theta_0),\theta_0) I(t,\theta_0)\,dt + O(u^2/n^2).$$

Найдем асимптотическое представление вероятности g. Имеем

$$\begin{aligned} g &= \mathbf{P}(X_1 \in G_n) \\ &= \frac{1}{n}\int\limits_{[0,1]^{d-1}} \sup_{|u|\leq T_n} (uD(t,\theta_0), N(y(t,\theta_0),\theta_0))[p(y(t,\theta_0),\theta_0) + q(y(t,\theta_0),\theta_0)] I(t,\theta_0)\,dt \\ &\qquad + O((\ln n)^2/n^2). \end{aligned}$$

Поскольку

$$\sup_{|u|\leq T_n} (uD(t,\theta_0), N(y(t,\theta_0),\theta_0)) = \sup_{|u|\leq T_n} \sum_{i\leq m} u_i \sum_{j\leq d} y^j_{\theta_i}(t,\theta_0) N^j(y(t,\theta_0),\theta_0),$$

супремум достигается при

$$u_i = T_n \operatorname{sign}\Big(\sum_{j\leq d} y^j_{\theta_i}(t,\theta_0) N^j(y(t,\theta_0),\theta_0)\Big), \quad i = 1,\dots,m.$$

Следовательно,

$$g = c_0 \frac{\ln n}{n} \int\limits_{[0,1]^{d-1}} (\operatorname{sign} ND^*, ND^*)[p(y(t,\theta_0),\theta_0) + q(y(t,\theta_0),\theta_0)] I(t,\theta_0)\,dt + O((\ln n)^2/n^2),$$

где $D^* = D^*(t,\theta_0)$ — матрица, сопряженная к $D(t,\theta_0)$; $\operatorname{sign} ND^*$ — вектор из $\mathbb{R}^m$ с координатами

$$(\operatorname{sign} ND^*)^i = \operatorname{sign}\Big(\sum_{j\leq d} y^j_{\theta_i}(t,\theta_0) N^j(y(t,\theta_0),\theta_0)\Big), \quad i = 1,\dots,m.$$

Полученное представление для $\mathbf{P}(X_1 \in G_n)$ означает, что среднее и дисперсия случайной величины B_n имеют порядок $\ln n$. Остается воспользоваться классическим неравенством Бернштейна, которое при достаточно большом c_0 обеспечивает нужную оценку. Лемма доказана.

Следуя методу, предложенному в [9], с учетом (3) получаем

$$Y_n(u) \stackrel{d}{=} \sum_{i\le n} \nu_i \Delta\bigl(X_i^{(1)}, \theta_0 + u/n\bigr) + \sum_{i\le n} \Delta\bigl(X_i^{(2)}, \theta_0 + u/n\bigr) - \sum_{i\le n} \nu_i \Delta\bigl(X_i^{(2)}, \theta_0 + u/n\bigr).$$

Обозначим три суммы в правой части этого равенства через $Y_n^{(1)}(u)$, $Y_n^{(2)}(u)$ и $\Gamma_n(u)$ соответственно. Отметим, что $Y_n^{(1)}(u)$ и $Y_n^{(2)}(u)$ независимы. Положим $\varepsilon_n = (\ln n)^2/n$.

Лемма 2. *Справедливо представление*

$$Y_n^{(2)}(u) = \frac{1}{n} \sum_{i\le n} \bigl(u, l'_\theta(X_i^{(2)}, \theta_0)\bigr) + O(\varepsilon_n), \quad |u| \le T_n.$$

Доказательство. Так как $X_i^{(2)} \notin G_n$ и $|u| \le T_n$, в силу условия 2 для достаточно больших n можно воспользоваться формулой Тейлора:

$$\Delta\bigl(X_i^{(2)}, \theta_0 + u/n\bigr) = \frac{1}{n} \sum_{j\le m} u_j l'_{\theta_j}\bigl(X_i^{(2)}, \theta_0\bigr) + \varphi(n^{-1}\ln n)^2 L\bigl(X_i^{(2)}, \theta_0\bigr),$$

где φ — некоторая ограниченная с вероятностью 1 случайная величина. Отсюда

$$\left\| Y_n^{(2)}(u) - \frac{1}{n}\sum_{i\le n}\bigl(u, l'_\theta\bigl(X_i^{(2)}, \theta_0\bigr)\bigr) \right\|_{T_n} \le c(n^{-1}\ln n)^2 \sum_{i\le n} L\bigl(X_i^{(2)}, \theta_0\bigr).$$

Теперь применим неравенство Нагаева — Фука (см. [10])

$$\mathbf{P}\Bigl(\sum_{i\le n} \xi_i \ge x\Bigr) \le n\mathbf{P}(\xi_1 \ge y) + \exp\{-x^2/(b^2 + 2xy/3)\}, \tag{4}$$

где ξ_i — независимые одинаково распределенные случайные величины с нулевым средним, $y > 0$, $b^2 = n\mathbf{E}|\xi_1|^2$. Положим в (4)

$$\xi_i = L\bigl(X_i^{(2)}, \theta_0\bigr) - \mathbf{E}_{\theta_0} L\bigl(X_i^{(2)}, \theta_0\bigr), \quad y = c\bigl(1 - \mathbf{E}_{\theta_0} L\bigl(X_i^{(2)}, \theta_0\bigr)\bigr)n/\ln n.$$

Тогда

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}\Bigl(\sum_{i\le n} L\bigl(X_i^{(2)}, \theta_0\bigr) > cn\Bigr) \\ &= \mathbf{P}\biggl(\sum_{i\le n}\bigl(L(X_i^{(2)}, \theta_0) - \mathbf{E}_{\theta_0} L\bigl(X_i^{(2)}, \theta_0\bigr)\bigr) \ge \bigl(c - \mathbf{E}_{\theta_0} L\bigl(X_i^{(2)}, \theta_0\bigr)\bigr)n\biggr) \le c\frac{(\ln n)^2}{n}. \end{aligned}$$

Отсюда следует утверждение леммы.

Лемма 3. *Справедливо представление*

$$\begin{aligned} Y_n^{(1)}(u) &\stackrel{d}{=} \sum_{i=1}^{B_n} \bigl(I\bigl\{X_i^{(1)} \in G_n^2(u)\bigr\} - I\bigl\{X_i^{(1)} \in G_n^1(u)\bigr\}\bigr) \\ &\qquad\qquad \times \ln \frac{q\bigl(\operatorname{pr} X_i^{(1)}, \theta_0\bigr)}{p\bigl(\operatorname{pr} X_i^{(1)}, \theta_0\bigr)} + O(\varepsilon_n), \quad |u| \le T_n, \end{aligned}$$

где сумма в правой части по определению равна нулю при $B_n = 0$.

Доказательство. Пусть $|u| \le T_n$ и $X_i^{(1)} \in G_n^1(u)$. Последнее условие означает, что $X_i^{(1)} \in \Omega^1_{\theta_0}$ и $X_i^{(1)} \in \Omega^2_{\theta_0+u/n}$. Поэтому из условий 1 и 4 следует, что

$$\bigl|\ln f\bigl(X_i^{(1)}, \theta_0 + u/n\bigr) - \ln p\bigl(\operatorname{pr} X_i^{(1)}, \theta_0\bigr)\bigr| \le cn^{-1}\ln n,$$
$$\bigl|\ln f\bigl(X_i^{(1)}, \theta_0\bigr) - \ln q\bigl(\operatorname{pr} X_i^{(1)}, \theta_0\bigr)\bigr| \le cn^{-1}\ln n.$$

Следовательно, если $|u| \le T_n$ и $X_i^{(1)} \in G_n^1(u)$, то

$$\left|\Delta\bigl(X_i^{(1)}, \theta_0 + u/n\bigr) + \ln \frac{q\bigl(\operatorname{pr} X_i^{(1)}, \theta_0\bigr)}{p\bigl(\operatorname{pr} X_i^{(1)}, \theta_0\bigr)}\right| \le cn^{-1}\ln n.$$

Если $|u| \le T_n$ и $X_i^{(1)} \in G_n^2(u)$, то

$$\left|\Delta\bigl(X_i^{(1)}, \theta_0 + u/n\bigr) - \ln \frac{q\bigl(\operatorname{pr} X_i^{(1)}, \theta_0\bigr)}{p\bigl(\operatorname{pr} X_i^{(1)}, \theta_0\bigr)}\right| \le cn^{-1}\ln n.$$

При $X_i^{(1)} \notin G_n(u)$ в силу ограниченности на G_n частных производных $l'_{\theta_j}\bigl(X_i^{(1)}, \theta_0\bigr)$, $1 \le j \le m$, имеем

$$\Delta\bigl(X_i^{(1)}, \theta_0 + u/n\bigr) = O(n^{-1}\ln n).$$

Следовательно,

$$\left\|Y_n^{(1)}(u) - \sum_{i=1}^{n} \nu_i\bigl(I\bigl\{X_i^{(1)} \in G_n^2(u)\bigr\} - I\bigl\{X_i^{(1)} \in G_n^1(u)\bigr\}\bigr)\ln \frac{q\bigl(\operatorname{pr} X_i^{(1)}, \theta_0\bigr)}{p\bigl(\operatorname{pr} X_i^{(1)}, \theta_0\bigr)}\right\|_{T_n} \le cn^{-1}(\ln 2n)^2.$$

Заметив, что

$$\sum_{i\le n} \nu_i\bigl(I\bigl\{X_i^{(1)} \in G_n^2(u)\bigr\} - I\bigl\{X_i^{(1)} \in G_n^1(u)\bigr\}\bigr)\ln \frac{q\bigl(\operatorname{pr} X_i^{(1)}, \theta_0\bigr)}{p\bigl(\operatorname{pr} X_i^{(1)}, \theta_0\bigr)} \stackrel{d}{=} \sum_{i=1}^{B_n}\bigl(I\bigl\{X_i^{(1)} \in G_n^2(u)\bigr\} - I\bigl\{X_i^{(1)} \in G_n^1(u)\bigr\}\bigr)\ln \frac{q\bigl(\operatorname{pr} X_i^{(1)}, \theta_0\bigr)}{p\bigl(\operatorname{pr} X_i^{(1)}, \theta_0\bigr)},$$

получим нужное утверждение. Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Справедливо представление*

$$\Gamma_n(u) = \frac{1}{n}\sum_{i\le n} \nu_i\bigl(u, l'_\theta\bigl(X_i^{(2)}, \theta_0\bigr)\bigr) + O(\varepsilon_n), \quad |u| \le T_n.$$

Доказательство. Применяем, как и в лемме 2, к членам суммы $\Gamma_n(u)$ формулу Тейлора и используем лемму 1. Лемма доказана.

Представим процессы $Y_n^{(2)}(u)$ и $\Gamma_n(u)$ в следующем виде:

$$Y_n^{(2)}(u) = \mathbf{E}_{\theta_0}\bigl(u, l'_\theta\bigl(X_1^{(2)}, \theta_0\bigr)\bigr) + \frac{1}{n}\sum_{i\le n}\bigl(u, l'_\theta\bigl(X_i^{(2)}, \theta_0\bigr) - \mathbf{E}_{\theta_0} l'_\theta\bigl(X_i^{(2)}, \theta_0\bigr)\bigr) + O(\varepsilon_n), \quad |u| \le T_n,$$

$$\Gamma_n(u) = \frac{1}{n}\sum_{i\le n}\nu_i \mathbf{E}_{\theta_0}\big(u, l'_\theta\big(X_i^{(2)},\theta_0\big)\big)$$
$$+\frac{1}{n}\sum_{i\le n}\nu_i\big(u, l'_\theta\big(X_i^{(2)},\theta_0\big) - \mathbf{E}_{\theta_0} l'_\theta\big(X_i^{(2)},\theta_0\big)\big) + O(\varepsilon_n), \quad |u|\le T_n.$$

Из леммы 1 получаем

$$\frac{1}{n}\sum_{i\le n}\nu_i \mathbf{E}_{\theta_0}\big(u, l'_\theta\big(X_i^{(2)},\theta_0\big)\big) = O(\varepsilon_n), \quad |u|\le T_n.$$

Лемма 5. *Верна оценка*

$$\frac{1}{n}\sum_{i\le n}\nu_i\big(u, l'_\theta\big(X_i^{(2)},\theta_0\big) - \mathbf{E}_{\theta_0} l'_\theta\big(X_i^{(2)},\theta_0\big)\big) = O(\varepsilon_n), \quad |u|\le T_n.$$

Доказательство. Для оценки этой вероятности воспользуемся леммой 1 и экспоненциальным неравенством Чебышева. Имеем

$$\mathbf{P}\bigg(\frac{1}{n}\sum_{i\le n}\nu_i \big\|\big(u, l'_\theta\big(X_i^{(2)},\theta_0\big) - \mathbf{E}_{\theta_0} l'_\theta\big(X_i^{(2)},\theta_0\big)\big)\big\|_{T_n} \ge c\frac{(\ln n)^2}{n}\bigg)$$
$$\le \mathbf{P}\bigg(\sum_{i\le c_0\ln n}\big\|\big(l'_\theta\big(X_i^{(2)},\theta_0\big) - \mathbf{E}_{\theta_0} l'_\theta\big(X_i^{(2)},\theta_0\big)\big\| \ge c\ln n\bigg) + \frac{1}{n^2} \le c\frac{(\ln n)^2}{n}.$$

Лемма доказана.

Лемма 6. *Справедливо следующее представление:*

$$\mathbf{E}_{\theta_0}\big(u, l'_\theta\big(X_1^{(2)},\theta_0\big)\big)$$
$$= \int\limits_{[0,1]^{d-1}} (uD(t,\theta_0), N(y(t,\theta_0),\theta_0))\big[p(y(t,\theta_0),\theta_0) - q(y(t,\theta_0),\theta_0)\big] I(t,\theta_0)\,dt + O(\varepsilon_n).$$

Доказательство. В силу задания распределения $X^{(2)}$ и леммы 1 имеем

$$\mathbf{E}_{\theta_0}\big(u, l'_\theta\big(X_1^{(2)},\theta_0\big)\big) = \int\limits_{\mathbb{R}^d\setminus G_n} (u, f'_\theta(x,\theta_0))(1+O(n^{-1}\ln n))\,dx,$$

где $f'_\theta(x,\theta) = \big(f'_{\theta_1}(x,\theta), f'_{\theta_2}(x,\theta),\dots, f'_{\theta_m}(x,\theta)\big)$ — вектор, составленный из частных производных плотности $f(x,\theta)$ по параметру θ. Используя условие 2, мы можем оценить

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d\setminus G_n} (u, f'_\theta(x,\theta_0))\,dx = n\int\limits_{\mathbb{R}^d\setminus G_n} [f(x,\theta_0+u/n) - f(x,\theta_0)]\,dx + O(n^{-1}\ln n),\ |u|\le T_n.$$

Поскольку интеграл в правой части этого равенства при замене области интегрирования на $\mathbb{R}^d$ равен нулю, то

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d\setminus G_n} [f(x,\theta_0+u/n) - f(x,\theta_0)]\,dx$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}^d\setminus G_n} [f(x,\theta_0+u/n) - f(x,\theta_0)]\,dx + \int\limits_{G_n} [f(x,\theta_0+u/n) - f(x,\theta_0)]\,dx$$
$$- \int\limits_{G_n} [f(x,\theta_0+u/n) - f(x,\theta_0)]\,dx = -\int\limits_{G_n} [f(x,\theta_0+u/n) - f(x,\theta_0)]\,dx. \quad (5)$$

Вычислим интеграл в правой части (5). Имеем

$$\int\limits_{G_n} [f(x,\theta_0+u/n)-f(x,\theta_0)]\,dx$$

$$=\int\limits_{G_n(u)} [f(x,\theta_0+u/n)-f(x,\theta_0)]\,dx+\int\limits_{G_n\setminus G_n(u)} [f(x,\theta_0+u/n)-f(x,\theta_0)]\,dx. \quad (6)$$

В силу условия 3 мера Лебега множества G_n не превосходит величины $cn^{-1}\ln n$ с некоторой константой c, не зависящей от n. Кроме того, из условия 2 следует, что если $x\in G_n\setminus G_n(u)$ и $|u|\le T_n$, то $[f(x,\theta_0+u/n)-f(x,\theta_0)]=O(|u|/n)$. Учитывая вышесказанное, имеем

$$\int\limits_{G_n\setminus G_n(u)} [f(x,\theta_0+u/n)-f(x,\theta_0)]\,dx=O((n^{-1}\ln n)^2).$$

Итак,

$$\mathbf{E}_{\theta_0}\big(u,l'_\theta\big(X_1^{(2)},\theta_0\big)\big)=n\int\limits_{G_n(u)} [f(x,\theta_0)-f(x,\theta_0+u/n)]\,dx+O(\varepsilon_n).$$

Осталось посчитать интеграл

$$\int\limits_{G_n(u)} [f(x,\theta_0)-f(x,\theta_0+u/n)]\,dx.$$

Наши рассуждения повторяют аналогичные рассуждения в доказательстве леммы 1. Рассмотрим элемент ds поверхности K_{θ_0} и элементарный объем $dG_n(u)$ с основанием ds. Этот элементарный объем представляет собой параллелепипед с высотой $n^{-1}|(uD,N)|+O(|u|^2/n^2)$. Его объем с учетом замены $s=y(t,\theta_0)$ равен

$$(n^{-1}|(uD,N)|+O(|u|^2/n^2))I(t,\theta_0)\,dt_1\,dt_2\dots dt_{d-1}.$$

Если $(uD,N)>0$ в точке $s=y(t,\theta_0)$, то по условию 4 имеем

$$f(x,\theta_0)-f(x,\theta_0+u/n)=p(s,\theta_0)-q(s,\theta_0)+O(|u|/n).$$

Если же $(uD,N)<0$, то

$$f(x,\theta_0)-f(x,\theta_0+u/n)=q(s,\theta_0)-p(s,\theta_0)+O(|u|/n).$$

Поэтому

$$\int\limits_{G_n(u)} [f(x,\theta_0)-f(x,\theta_0+u/n)]\,dx$$

$$=\frac{1}{n}\int\limits_{[0,1]^{d-1}} (uD(t,\theta_0),N(y(t,\theta_0),\theta_0))[p(y(t,\theta_0),\theta_0)-q(y(t,\theta_0),\theta_0)]I(t,\theta_0)\,dt+O(\varepsilon_n).$$

Лемма 6 доказана.

Нам осталось аппроксимировать сумму B_n пуассоновской случайной величиной π_{ng}, а сумму

$$n^{-1/2}\sum_{i\le n}\big(l'_\theta\big(X_i^{(2)},\theta_0\big)-\mathbf{E}_{\theta_0}l'_\theta\big(X_i^{(2)},\theta_0\big)\big)$$

— нормально распределенным случайным вектором η.

Лемма 7. *Случайный вектор η может быть так задан на основном вероятностном пространстве, что*

$$\frac{1}{n}\sum_{i\le n}\big(u, l'_\theta\big(X_i^{(2)},\theta_0\big) - \mathbf{E}_{\theta_0} l'_\theta\big(X_i^{(2)},\theta_0\big)\big) = n^{-1/2}(u,\eta) + O(\gamma_n), |u| \le T_n,$$

где $\gamma_n = (\ln n)^{\alpha/(1+\alpha)} n^{2/(1+\alpha)-1}$, если у случайного вектора $l'_\theta(X_1,\theta_0)$ существует конечный момент порядка $\alpha > \min\{3, d+1\}$, и $\gamma_n = \ln^2 n/n$ при выполнении условия Крамера.

Доказательство. Обозначим

$$S_n = \sum_{i\le n}\big(l'_\theta\big(X_i^{(2)},\theta_0\big) - \mathbf{E}_{\theta_0} l'_\theta\big(X_i^{(2)},\theta_0\big)\big).$$

Предположим, что у случайного вектора $l'_\theta(X_1,\theta_0)$ существует момент порядка $\alpha > \min\{3, d+1\}$. Тогда в случае $d = 1$ мы можем воспользоваться результатом из [11], а в случае $d \ge 2$ — результатом из [12]: нормально распределенный случайный вектор η может быть построен таким образом, чтобы была верна оценка

$$\mathbf{P}(\|n^{-1/2}(u, n^{-1/2}S_n - \eta)\|_{T_n} \ge c(\ln n)^{\alpha/(1+\alpha)} n^{2/(1+\alpha)-1}) \\ \le c(\ln n)^{\alpha/(1+\alpha)} n^{2/(1+\alpha)-1},$$

если c достаточно велико.

Если выполнено условие Крамера, то мы можем воспользоваться результатом из [13]: нормально распределенный случайный вектор может быть построен таким образом, чтобы была верна оценка

$$\mathbf{P}(\|n^{-1/2}(u, n^{-1/2}S_n - \eta)\|_{T_n} \ge c(\ln n)^2/n) \le c/n$$

при достаточно большом c. Лемма 7 доказана.

Для суммы B_n можно так построить случайную величину π_{ng}, имеющую распределение Пуассона с параметром ng, что

$$\mathbf{P}(B_n \ne \pi_{ng}) \le ng^2 \le c\ln^2 n/n,$$

если c достаточно велико (см. [14]).

Из лемм 2–7 и последнего неравенства следует, что имеет место утверждение теоремы с заменой процесса $Y(u)$ на $Y^{(n)}(u)$.

Далее, пусть V — случайная пуассоновская мера на $\mathbb{R}\times K_{\theta_0}$ такая, что для любого $b \in \mathbb{R}$ и любого борелевского множества $B \subseteq K_{\theta_0}$

$$\mathbf{E}V([0,b]\times B) = b\int_B p(s,\theta_0)ds,\ b > 0, \quad \mathbf{E}V([b,0]\times B) = -b\int_B q(s,\theta_0)ds,\ b < 0.$$

Обозначим через $K' = K'(s,\theta_0)$ матрицу частных производных по параметру θ, составленную из следующих векторов-строк (напомним, что $y(t,\theta)$ — вектор-функция):

$$K'_i(s,\theta) = \lim_{\delta\to 0}\frac{y(t,\theta+\delta e_i) - y(t,\theta)}{\delta},$$

где $s = y(t,\theta)$ — точка на поверхности K_θ, e_i — единичные орты системы координат в $\mathbb{R}^m$. Определение $K'(s,\theta)$ корректно в силу условия 1. Заметим, что матрица $K'(s,\theta)$ совпадает с матрицей частных производных $D(t,\theta)$ с точностью до замены переменных $s = y(t,\theta)$. Положим

$$\Pi_0(u) = \int_{K_{\theta_0}} \ln\frac{q(s,\theta_0)}{p(s,\theta_0)} \int_0^{\frac{1}{n}(uK',N)} V(d\delta, ds).$$

Лемма 8. *Процессы* $\Pi_0(u)$ *и* $\Pi_n(u)$ *можно так задать на одном вероятностном пространстве, что*

$$\Pi_n(u) = \Pi_0(u) + O(\varepsilon_n), \quad |u| \le T_n.$$

Доказательство. Процесс $\Pi_n(u)$ можно представить в виде интеграла

$$\Pi_n(u) = \int\limits_{G_n^2(u)} \sum_{i=1}^{\pi_{ng}} I\big\{X_i^{(1)} \in dG\big\} \ln \frac{q(\operatorname{pr} X_i^{(1)}, \theta_0)}{p(\operatorname{pr} X_i^{(1)}, \theta_0)}$$
$$- \int\limits_{G_n^1(u)} \sum_{i=1}^{\pi_{ng}} I\big\{X_i^{(1)} \in dG\big\} \ln \frac{q(\operatorname{pr} X_i^{(1)}, \theta_0)}{p(\operatorname{pr} X_i^{(1)}, \theta_0)}$$
$$= \int\limits_{K\theta} \ln \frac{q(s,\theta_0)}{p(s,\theta_0)} \int\limits_0^{\frac{1}{n}(uK',N)} \sum_{i=1}^{\pi_{ng}} I\big\{X_i^{(1)} \in (d\delta, ds)\big\}.$$

Пусть A — некоторая хаусдорфова ε-окрестность многообразия K_θ (ниже мы уточним условия, накладываемые на ε), $\mathscr{B}$ — класс всех конечных объединений шаров с рациональными диаметрами и рациональными центрами, целиком содержащихся в A. Рассмотрим функциональное пространство

$$\mathbf{B} = \{f(B); B \in \mathscr{B} : \sup_{B\in\mathscr{B}} |f(B)| < \infty\}$$

с нормой $\|f\| = \sup\limits_i \{\alpha_i |f(B_i)|\}$, где $\{B_i\} = \mathscr{B}$, а $\{\alpha_i\}$ — последовательность положительных чисел, монотонно стремящаяся к нулю. Отметим, что линейное нормированное пространство $\{\mathbf{B}, \|\cdot\|\}$ сепарабельно (но не полно).

Напомним, что обобщенное пуассоновское распределение $\operatorname{Pois}(\lambda)$ с мерой Леви λ в сепарабельном линейном нормированном пространстве $\mathbf{B}$ определяется следующим соотношением:

$$\operatorname{Pois}(\lambda) := e^{-\lambda(\mathbf{B})} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{*k}}{k!},$$

где λ^{*k} — k-кратная свертка конечной меры λ с собой, λ^{*0} — единичная масса, сосредоточенная в нуле.

Пуассоновскую случайную меру $\sum\limits_{i=1}^{\pi_{ng}} I\big\{X_i^{(1)} \in (\cdot)\big\}$, заданную на множествах из $\mathscr{B}$, обозначим через Λ_1. Мера Леви распределения $\mathscr{L}\{\Lambda_1\}$ в пространстве $\mathbf{B}$ имеет вид $\lambda_1 = ng\mathscr{L}\big\{I\big\{X_i^1 \in B\big\}; B \in \mathscr{B}\big\}$. Пусть Y — случайная величина, распределенная в A с плотностью

$$f_Y(x,\theta_0) = \frac{c_0 \ln n}{ng} q(\operatorname{pr} x, \theta_0), \quad x \in A \cap \Omega^1_{\theta_0},$$

$$f_Y(x,\theta_0) = \frac{c_0 \ln n}{ng} p(\operatorname{pr} x, \theta_0), \quad x \in A \cap \Omega^2_{\theta_0},$$

где постоянная c_0 определена в асимптотическом представлении величины g в лемме 1. Окрестность A (точнее, ε) выберем так, чтобы

$$\int\limits_A f_Y(x,\theta_0)\,dx = 1.$$

Возможность такого выбора следует из условия 4 и того факта, что $q(y,\theta_0) \neq 0$ и $p(y,\theta_0) \neq 0$ для всех $y \in K_{\theta_0}$, что влечет отделимость от нуля этих функций в окрестности любой точки многообразия K_{θ_0}.

Определим случайную пуассоновскую меру Λ_2. Мера Леви распределения $\mathscr{L}\{\Lambda_2\}$ в пространстве $\mathbf{B}$ имеет вид

$$\lambda_2 = ng\mathscr{L}\biggl\{I\biggl\{\frac{c_0 \ln n}{n} * Y \in B\biggr\}; B \in \mathscr{B}\biggr\},$$

где операция $*$ определяется как $m * x = m(x - \operatorname{pr} x) + \operatorname{pr} x$ для всех положительных m и всех $x \in \mathbb{R}^d$.

Оценим расстояние по вариации $\|\cdot\|_{\mathrm{var}}$ между распределениями $\mathrm{Pois}(\lambda_1)$ и $\mathrm{Pois}(\lambda_2)$. Сначала получим следующую верхнюю оценку:

$$\|\mathrm{Pois}(\lambda_1) - \mathrm{Pois}(\lambda_2)\|_{\mathrm{var}} \le 2\|\lambda_1 - \lambda_2\|_{\mathrm{var}}. \tag{7}$$

Без ограничения общности можем считать, что $\lambda_1(\mathbf{B}) \le \lambda_2(\mathbf{B})$. Тогда

$$\|\mathrm{Pois}(\lambda_1) - \mathrm{Pois}(\lambda_2)\|_{\mathrm{var}} \\ \le (e^{-\lambda_1(\mathbf{B})} - e^{-\lambda_2(\mathbf{B})})e^{\lambda_1(\mathbf{B})} + e^{-\lambda_2(\mathbf{B})}\biggl\|\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda_1^{*k}}{k!} - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda_2^{*k}}{k!}\biggr\|_{\mathrm{var}}.$$

Искомая верхняя оценка выводится из этого неравенства и оценок

$$e^{-\lambda_1(\mathbf{B})} - e^{-\lambda_2(\mathbf{B})} \le (\lambda_2(\mathbf{B}) - \lambda_1(\mathbf{B}))e^{-\lambda_1(\mathbf{B})},$$
$$\|\lambda_1^{*k} - \lambda_2^{*k}\|_{\mathrm{var}} \le k\lambda_2(\mathbf{B})^{k-1}\|\lambda_1 - \lambda_2\|_{\mathrm{var}}.$$

Вследствие сепарабельности и определения нормы в $\mathbf{B}$ расстояние полной вариации в правой части (7) совпадает с супремумом по всем конечномерным цилиндрическим множествам в $\{\mathbf{B}, \|\cdot\|\}$, откуда следует оценка

$$\|\mathrm{Pois}(\lambda_1) - \mathrm{Pois}(\lambda_2)\|_{\mathrm{var}} \le 2ng \sup_{B\in\mathscr{B}}\biggl|\mathbf{P}(X_1^1 \in B) - \mathbf{P}\biggl(\frac{c_0 \ln n}{n} * Y \in B\biggr)\biggr|.$$

Обозначим $A_n = \{\frac{c_0 \ln n}{n} * x : x \in A\}$. Тогда с помощью условия 4 имеем

$$2ng \sup_{B\in\mathscr{B}}\biggl|\mathbf{P}\bigl(X_1^1 \in B\bigr) - \mathbf{P}\biggl(\frac{c_0 \ln n}{n} * Y \in B\biggr)\biggr| \\ \le ng\int\limits_{A_n}\biggl|\frac{1}{g}f(x,\theta_0) - \frac{n}{c_0 \ln n}f_Y(x,\theta_0)\biggr|\,dx \le c\ln n \operatorname{mes}\{A_n\} \le c' n^{-1}\ln^2 n.$$

Воспользуемся теоремой Добрушина [15], которая утверждает, что два случайных элемента со значениями в сепарабельном метрическом пространстве можно так задать на одном вероятностном пространстве, что вероятность их несовпадения равняется расстоянию по вариации между распределениями этих случайных элементов. Расстояние по вариации между распределениями случайных мер Λ_1 и Λ_2 не превышает $c\ln^2 n/n$, в силу чего два стохастических интеграла

$$\int\limits_{K_{\theta_0}} \ln\frac{q(s,\theta_0)}{p(s,\theta_0)} \int\limits_0^{\frac{1}{n}(uK',N)} \Lambda_1(d\delta, ds), \quad \int\limits_{K_{\theta_0}} \ln\frac{q(s,\theta_0)}{p(s,\theta_0)} \int\limits_0^{\frac{1}{n}(uK',N)} \Lambda_2(d\delta, ds)$$

можно так построить на одном вероятностном пространстве, что они совпадают для всех $|u| \le c \ln n$ с вероятностью, не меньшей $1 - cn^{-1} \ln^2 n$.

Сделав во втором интеграле замену переменных $\delta = nv$ и приняв во внимание тот факт, что в силу определения Y мера Леви $ng\mathscr{L}\{I\{c_0 \ln n * Y \in B\}; B \in \mathscr{B}\}$ на самом деле не зависит от n и совпадает с мерой Леви распределения $\mathscr{L}\{V\}$, получим утверждение леммы.

Еще одна замена переменных во втором интеграле по формуле $s = y(t, \theta_0)$, $t \in [0,1]^{d-1}$, заканчивает доказательство теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Борисов И. С., Миронов Д. В.* Асимптотическое представление отношения правдоподобия для многомерных выборок с разрывными плотностями // Теория вероятностей и ее применения. 2000. Т. 45, № 2. С. 345–356.
2. *Зорич В. А.* Математический анализ. М.: Наука, 1984.
3. *Ермаков М. С.* Асимптотическое поведение статистических оценок параметров многомерной разрывной плотности // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. 1977. Т. 74. С. 88–107.
4. *Ибрагимов И. А., Хасьминский Р. З.* Асимптотическая теория оценивания. М.: Наука, 1979.
5. *Мосягин В. Е.* Оценка скорости сходимости распределения процесса максимального правдоподобия в нерегулярном случае // Сиб. мат. журн. 1991. Т. 32, № 4. С. 96–103.
6. *Зайцев А. Ю.* Многомерный вариант второй равномерной предельной теоремы Колмогорова // Теория вероятностей и ее применения. 1989. Т. 34, № 1. С. 128–151.
7. *Борисов И. С., Боровков А. А.* Аппроксимация второго порядка случайных ломанных в принципе инвариантности Донскера — Прохорова // Теория вероятностей и ее применения. 1986. Т. 31, № 2. С. 179–202.
8. *Мосягин В. Е.* Асимптотическое представление для процесса отношения правдоподобия в случае разрывной плотности // Сиб. мат. журн. 1994. Т. 35, № 2. С. 416–423.
9. *Borisov I. S.* Strong Poisson and mixed approximations of sums of independent random variables in Banach spaces // Siberian Adv. Math. 1993. V. 3, N 2. P. 1–13.
10. *Пинелис И. Ф., Саханенко А. И.* Замечания о неравенствах для вероятностей больших уклонений // Теория вероятностей и ее применения. 1985. Т. 30, № 1. С. 127–131.
11. *Саханенко А. И.* О точности нормальной аппроксимации в принципе инвариантности // Асимптотический анализ распределений случайных процессов. Новосибирск: Наука, 1989. С. 40–66.
12. *Einmahl U.* Extension of results of Komlos, Major, and Tusnady to the multivariate case // J. Multivariate Anal. 1989. V. 28, N 1. P. 20–68.
13. *Зайцев А. Ю.* Оценки квантилей гладких условных распределений и многомерный принцип инвариантности // Сиб. мат. журн. 1996. Т. 37, № 4. С. 807–831.
14. *Боровков А. А.* Теория вероятностей. М.: Наука, 1976.
15. *Добрушин Р. Л.* Задание системы случайных величин при помощи условных распределений // Теория вероятностей и ее применения. 1970. Т. 15, № 3. С. 469–497.

Статья поступила 13 октября 2000 г.

Борисов Игорь Семенович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск 630090
sibam@math.nsc.ru

Миронов Дмитрий Витальевич
Новосибирский гос. университет, Новосибирск 630090