Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2001. Том 42, № 2

УДК 519.214

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ ОБЩИХ ЦЕПЕЙ МАРКОВА

Д. А. Коршунов

Аннотация: Рассматривается цепь Маркова $\{X_n\}$ со значениями в измеримом пространстве, не являющаяся, вообще говоря, однородной во времени. В различных предположениях о природе пространства состояний цепи получены утверждения типа закона больших чисел, интегральной и локальной центральной предельной теоремы для X_n. Эти результаты являются наиболее содержательными для невозвратных цепей Маркова. Библиогр. 9.

§ 1. Введение

Пусть S — измеримое пространство с σ-алгеброй измеримых множеств $\mathscr{B}(S)$. Пусть $P_n(x,B)$, $x \in S$, $B \in \mathscr{B}(S)$, — некоторая переходная вероятность в S; в настоящей работе параметр-время n принимает значения из множества целых неотрицательных чисел $\mathbb{Z}^+ = \{0,1,2,\dots\}$. Однородность переходной вероятности во времени n не предполагается. Рассмотрим цепь Маркова $X = \{X_n,\ n \in \mathbb{Z}^+\}$ со значениями в S и с переходной вероятностью $P_n(\cdot,\cdot)$, т. е.

$$\mathbf{P}\{X_{n+1} \in B \mid X_n = x\} = P_n(x,B).$$

В § 2 выясняются условия, при которых $f(X_n)/n$ сходится почти наверное к некоторому пределу, где $f : S \to \mathscr{Y}$ — функция со значениями в сепарабельном банаховом пространстве $\mathscr{Y}$. Рассматривается так называемое p-гладкое банахово пространство. В § 3 исследуется поведение во времени характеристического функционала цепи Маркова со значениями в произвольном сепарабельном банаховом пространстве. В § 4 для цепи Маркова со значениями в конечномерном евклидовом пространстве формулируются условия, при которых X_n удовлетворяет центральной предельной теореме. В § 5 выводится верхняя оценка вероятности попадания в компакт асимптотически однородной во времени и по пространству (в некотором направлении) цепи Маркова со значениями в $\mathbb{R}^d$. В § 6 для асимптотически однородной цепи Маркова со значениями на целочисленной решетке $\mathbb{Z}^d$ доказана локальная центральная предельная теорема, в § 7 — аналог этой теоремы для нерешетчатой цепи Маркова со значениями в $\mathbb{R}^d$.

Хотя в условиях теорем явно не оговаривается, является ли цепь Маркова $\{X_n\}$ положительно возвратной, нуль-возвратной или невозвратной, предлагаемые результаты наиболее содержательны для невозвратных цепей. Более того, в ряде теорем явно предполагается, что значение цепи X_n «уходит на бесконечность в некотором направлении».

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 99–01–00504, 99–01–00561) и INTAS (грант № 1625).

С точки зрения усиленного закона больших чисел и центральной предельной теоремы в литературе лучше всего изучены положительно возвратные по Харрису (эргодические) однородные во времени цепи Маркова (см., например, [1, § 17]). Некоторые результаты, относящиеся к центральной предельной теореме для неоднородных во времени эргодических цепей Маркова, можно найти в [2, 3]. Отметим, что для эргодических цепей в отличие от невозвратных (на изучение которых в основном и направлена настоящая работа) более естественной оказывается задача исследования асимптотического поведения распределения сумм значений функции $f : S \to \mathbb{R}$ от цепи Маркова, т. е. распределения $f(X_1) + \dots + f(X_n)$. При этом использование циклической структуры эргодической цепи (циклов по возвращению в атомарное состояние) так или иначе сводит задачу к известным предельным теоремам о суммах независимых случайных величин.

§ 2. Утверждения типа усиленного закона больших чисел для функции от цепи Маркова

2.1. Усиленный закон больших чисел для мартингалов в банаховых пространствах. Пусть $p \in [1, 2]$. Говорят, что банахово пространство $\mathscr{Y}$ с нормой $\|\cdot\|$ является *p-гладким*, если найдется такая константа $D < \infty$, что для любых векторов x и $y \in \mathscr{Y}$, $\|x\| = 1$, $\|y\| \le 1$, имеет место неравенство

$$\|x + y\| + \|x - y\| \le 2 + D\|y\|^p. \tag{1}$$

Из определения вытекает, что p-гладкое банахово пространство $\mathscr{Y}$ является p_1-гладким для любого $p_1 \in [1, p]$.

Любое банахово пространство будет 1-гладким при $D = 2$ (неравенство треугольника). Банахово пространство $\mathscr{Y}$ 2-гладкое тогда и только тогда, когда найдется такая константа $D < \infty$, что

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 \le 2\|x\|^2 + D\|y\|^2 \tag{2}$$

(см. [4]). Если $\mathscr{Y}$ — гильбертово пространство, оно автоматически является 2-гладким, поскольку неравенство (2) превращается в равенство с $D = 2$ (равенство параллелограмма).

Известен (см. [5, теорема 2.2; 6]) следующий усиленный закон больших чисел для мартингалов в сепарабельных банаховых пространствах (сепарабельность предполагается для того, чтобы операция сложения случайных элементов со значениями в этом пространстве была измеримой).

Теорема 1. *Пусть последовательность случайных элементов Z_n, $n = 1, 2, \dots$, со значениями в сепарабельном банаховом пространстве $\mathscr{Y}$ образует мартингал относительно некоторого потока σ-алгебр основного вероятностного пространства. Если для некоторого $p \in [1, 2]$ банахово пространство $\mathscr{Y}$ является p-гладким и ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{E}\|X_{n+1} - X_n\|^p}{n^p}$$

сходится, то $X_n/n \to 0$ при $n \to \infty$ почти наверное.

2.2. Функция от цепи Маркова. Пусть $\mathscr{Y}$ — сепарабельное банахово пространство с нормой $\|\cdot\|$ и σ-алгеброй борелевских множеств $\mathscr{B}(\mathscr{Y})$. Через $\mathop{\mathscr{L}im}\limits_{n\to\infty} y_n$ обозначаем множество предельных точек последовательности $\{y_n\}$, т. е.

множество всех $y \in \mathscr{Y}$ таких, что $y_{n_k} \to y$ для некоторой подпоследовательности индексов $n_k \to \infty$. Множество предельных точек с необходимостью замкнуто.

Пусть f — измеримая функция из S в $\mathscr{Y}$. Обозначим через $\eta_n(x)$, $x \in S$, случайный вектор, отвечающий скачку процесса $Y_n = f(X_n)$, т. е. такой, что для любого $B \in \mathscr{B}(\mathscr{Y})$

$$\mathbf{P}\{\eta_n(x) \in B\} = \mathbf{P}\{f(X_{n+1}) - f(X_n) \in B \mid X_n = x\}.$$

Положим $m_n^X(x) = \mathbf{E}\eta_n(x)$. Здесь и далее под математическим ожиданием понимается интеграл Бохнера.

На множестве случайных величин введем отношение частичного порядка $\leq_{\rm st}$: для любых двух случайных величин η_1 и η_1 пишем $\eta_1 \leq_{\rm st} \eta_2$, если $\mathbf{P}\{\eta_1 \geq x\} \leq \mathbf{P}\{\eta_2 \geq x\}$ для любого $x \in \mathbb{R}$.

Теорема 2. *Пусть для некоторого $p \in (1,2]$ банахово пространство $\mathscr{Y}$ является p-гладким, и пусть множество $\widetilde{B} \in \mathscr{B}(\mathscr{Y})$ таково, что при $N \to \infty$ имеет место сходимость*

$$\mathbf{P}\{f(X_n) \in \widetilde{B} \text{ при всех } n \geq N\} \to 1. \tag{3}$$

Пусть также для некоторых момента времени $\widetilde{N}$ и замкнутого выпуклого множества M из $\mathscr{B}(\mathscr{Y})$ справедливо включение

$$\bigl\{m_n^X(x):\ n \geq \widetilde{N},\ f(x) \in \widetilde{B}\bigr\} \subseteq M. \tag{4}$$

Кроме того, пусть для семейства случайных величин $\{\|\eta_n(x)\|,\ n \geq \widetilde{N},\ f(x) \in \widetilde{B}\}$ найдется интегрируемая мажоранта, т. е. такая случайная величина η с конечным средним значением, что

$$\|\eta_n(x)\| \leq_{\rm st} \eta \quad \text{для любых } n \geq \widetilde{N} \quad \text{и} \quad f(x) \in \widetilde{B}. \tag{5}$$

Тогда почти наверное

$$\operatorname*{\mathscr{L}\!\mathit{im}}_{n\to\infty} \frac{f(X_n)}{n} \subseteq M.$$

Доказательство следует в некоторых своих чертах рассуждениям из доказательства леммы 1 в [7]. Не ограничивая общности, считаем, что $\widetilde{N} = 0$. Сначала предположим дополнительно, что случайная величина η является мажорантой не только для семейства $\{\|\eta_n(x)\|,\ n \geq 0,\ f(x) \in \widetilde{B}\}$, но и для всего семейства $\{\|\eta_n(x)\|,\ n \geq 0,\ x \in S\}$, т. е.

$$\|\eta_n(x)\| \leq_{\rm st} \eta \quad \text{для любых } n \geq 0 \quad \text{и} \quad x \in S. \tag{6}$$

Прежде всего отметим, что ввиду условий (3) и (4) почти наверное имеет место включение

$$\operatorname*{\mathscr{L}\!\mathit{im}}_{n\to\infty} \mathbf{E}\{f(X_{n+1}) - f(X_n) \mid X_n\} \equiv \operatorname*{\mathscr{L}\!\mathit{im}}_{n\to\infty}\ m_n^X(X_n) \subseteq M. \tag{7}$$

Для любых числа $c > 0$ и точки $x \in S$ положим

$$B_x^{[c]} = \{u \in S : \|f(u) - f(x)\| < c\}.$$

Определим переходную вероятность $P_n^{[c]}(x,B)$ и случайный вектор $\eta_n^{[c]}(x)$ равенствами

$$P_n^{[c]}(x,B) \equiv \begin{cases} P_n\bigl(x, B \cap B_x^{[c]}\bigr), & \text{если } x \notin B, \\ P_n\bigl(x, B \cap B_x^{[c]}\bigr) + P_n\bigl(x, \bigl\{S \setminus B_x^{[c]}\bigr\}\bigr), & \text{если } x \in B, \end{cases}$$

и

$$\eta_n^{[c]}(x) \equiv \begin{cases} \eta_n(x), & \text{если } \|\eta_n(x))\| < c, \\ 0, & \text{если } \|\eta_n(x))\| \geq c. \end{cases}$$

По построению распределение случайного вектора $\eta_n^{[c]}(x)$ совпадает с распределением разности $f(Z) - f(x)$, где Z имеет распределение $P_n^{[c]}(x, \cdot)$.

Пусть $A > 0$. Рассмотрим цепь Маркова Y_n, $Y_0 = X_0$, с переходными вероятностями $P_n^{[An]}(\cdot, \cdot)$. Цепи Y_n и X_n можно задать на одном вероятностном пространстве таким образом, что вероятность несовпадения траекторий Y_n и X_n не будет превосходить

$$\mathbf{P}\{Y_n \neq X_n \text{ для некоторого } n\} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}\{\|f(X_{n+1}) - f(X_n)\| \geq An\}$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\{\eta \geq An\} \leq \frac{\mathbf{E}\eta}{A}. \quad (8)$$

Следовательно,

$$\mathbf{P}\left\{ \mathscr{L}\!\mathit{im}_{n\to\infty} \frac{f(X_n)}{n} \neq \mathscr{L}\!\mathit{im}_{n\to\infty} \frac{f(Y_n)}{n} \right\} \leq \frac{\mathbf{E}\eta}{A}. \quad (9)$$

Положим $m_n^Y(Y_n) = \mathbf{E}\{f(Y_{n+1}) - f(Y_n) \mid Y_n\} \equiv \mathbf{E}\eta_n^{[An]}(x)\big|_{x=Y_n}$ и $\Delta_n = f(Y_{n+1}) - f(Y_n) - m_n^Y(Y_n)$, так что

$$f(Y_n) - f(Y_0) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k^Y(Y_k) + \sum_{k=0}^{n-1} \Delta_k \equiv Z_n^0 + Z_n^1.$$

В силу условия (6) на скачки $\eta_n(x)$ имеем оценку

$$\left\| m_k^Y(Y_k) - m_k^X(Y_k) \right\| \leq \mathbf{E}\{\eta; \eta \geq Ak\}.$$

Поэтому

$$\left\| \frac{Z_n^0}{n} - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} m_k^X(Y_k) \right\| \leq \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \left\| m_k^Y(Y_k) - m_k^X(Y_k) \right\| \leq \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{E}\{\eta; \eta \geq Ak\}.$$

Ввиду конечности $\mathbf{E}\eta$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{E}\{\eta; \eta \geq Ak\} \to 0$$

при $n \to \infty$ и, следовательно, на всех элементарных исходах

$$\mathscr{L}\!\mathit{im}_{n\to\infty} \frac{Z_n^0}{n} = \mathscr{L}\!\mathit{im}_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} m_k^X(Y_k). \quad (10)$$

Из (8) имеем оценку

$$\mathbf{P}\left\{ \mathscr{L}\!\mathit{im}_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} m_k^X(Y_k) \neq \mathscr{L}\!\mathit{im}_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} m_k^X(X_k) \right\} \leq \frac{\mathbf{E}\eta}{A}. \quad (11)$$

Поскольку множество M замкнуто и выпукло, из (7) вытекает почти наверное включение

$$\mathscr{L}\!\mathit{im}_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} m_k^X(X_k) \subseteq M. \quad (12)$$

Соотношения (10)–(12) влекут оценку

$$\mathbf{P}\left\{\mathop{\mathscr{L}im}_{n\to\infty} \frac{Z_n^0}{n} \subseteq M\right\} \ge 1 - \frac{\mathbf{E}\eta}{A}. \tag{13}$$

Ввиду того, что последовательность Y_n является цепью Маркова, по определению Δ_n имеем равенства

$$\mathbf{E}\{\Delta_n \mid Y_0,\dots,Y_n\} = \mathbf{E}\{\Delta_n \mid Y_n\} = 0.$$

Поэтому процесс Z_n^1 образует мартингал относительно потока σ-алгебр $\sigma(Y_0,\dots, Y_{n-1})$. Докажем, что приращения этого мартингала удовлетворяют условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{E}\|\Delta_n\|^p}{n^p} < \infty. \tag{14}$$

Для любого x по построению Δ_n в силу неравенства $\|a+b\|^p \le 2^p\|a\|^p + 2^p\|b\|^p$ и ввиду условия (6) имеем

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\{\|\Delta_n\|^p \mid Y_n = x\} &= \mathbf{E}\big\|\eta_n^{[An]}(x) - \mathbf{E}\eta_n^{[An]}(x)\big\|^p \\ &\le 2^p\mathbf{E}\big\|\eta_n^{[An]}(u)\big\|^p + 2^p\big\|\mathbf{E}\eta_n^{[An]}(u)\big\|^p \le 2^{p+1}\mathbf{E}\{\eta^p; \eta < An\}.\end{aligned}$$

Тем самым

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{E}\|\Delta_n\|^p}{n^p} \le 8\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{E}\{\eta^p; \eta < An\}}{n^p}.$$

Последний ряд сходится при любом значении A, так как

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{E}\{\eta^p; \eta < An\}}{n^p} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^p}{n^p}\mathbf{E}\{(\eta/A)^p; \eta/A < n\} \\ &\le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^p}{n^p} \sum_{k=1}^{n} k^p\mathbf{P}\{k-1 \le \eta/A < k\} = A^p \sum_{k=1}^{\infty} k^p\mathbf{P}\{k-1 \le \eta/A < k\} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n^p} < \infty\end{aligned}$$

в силу эквивалентности $\sum\limits_{n=k}^{\infty} 1/n^p \sim k/k^p$ (ибо $p > 1$) и существования $\mathbf{E}\eta$.

Итак, мартингал Z_n^1 действительно удовлетворяет условию (14), и можно воспользоваться теоремой 1, согласно которой $Z_n^1/n \to 0$ при $n \to \infty$ почти наверное. Следовательно, имеет место следующее равенство почти наверное:

$$\mathop{\mathscr{L}im}_{n\to\infty} \frac{f(Y_n) - f(Y_0)}{n} \equiv \mathop{\mathscr{L}im}_{n\to\infty} \frac{Z_n^0 + Z_n^1}{n} = \mathop{\mathscr{L}im}_{n\to\infty} \frac{Z_n^0}{n}.$$

Утверждение теоремы при дополнительном условии (6) вытекает теперь из (13) вследствие произвольности выбора числа A.

Откажемся теперь от выполнения условия (6). Фиксируем $\varepsilon > 0$. Ввиду условия (3) найдется момент времени $N_1 \ge 1$ такой, что

$$\mathbf{P}\{f(X_n) \in \widetilde{B} \text{ для любого } n \ge N_1\} \ge 1 - \varepsilon. \tag{15}$$

Рассмотрим вспомогательную также неоднородную во времени цепь Маркова $\widetilde{X}_n$, у которой переходные вероятности $\widetilde{P}_n(x,\cdot)$ совпадают с $P_n(x,\cdot)$ при $f(x) \in \widetilde{B}$ и равны $\mathbf{I}\{x \in \cdot\}$ при $f(x) \notin \widetilde{B}$. В частности, $\widetilde{\eta}_n(x) = \eta_n(x)$ при $f(x) \in \widetilde{B}$ и $\widetilde{\eta}_n(x) = 0$ при $f(x) \notin \widetilde{B}$. Поэтому в силу (5) приращения $\widetilde{\eta}_n(x)$

удовлетворяют условию (6). Следовательно, по теореме 2 почти наверное справедливо включение

$$\mathop{\mathscr{L}im}_{n\to\infty} f(\widetilde{X}_n)/n \subseteq M.$$

Если при этом рассмотреть не все значения цепи Маркова $\widetilde{X}_n$, а лишь $\{\widetilde{X}_n,\ n \geq N_1\}$ и распределение $\widetilde{X}_{N_1}$ взять совпадающим с распределением X_{N_1}, то ввиду (15) имеем, что траектории цепей X_n и $\widetilde{X}_n$ совпадают при $n \geq N_1$ с вероятностью, не меньшей $1-\varepsilon$. Поэтому

$$\mathbf{P}\{\mathop{\mathscr{L}im}_{n\to\infty} f(X_n)/n \subseteq M\} \geq 1-\varepsilon.$$

Учитывая произвольность выбора числа $\varepsilon > 0$, приходим к заключению теоремы.

2.3. Усиленный закон больших чисел для одномерной цепи Маркова с асимптотически однородным сносом. В настоящем пункте рассматривается цепь Маркова $\{X_n\}$ со значениями на действительной прямой $\mathbb{R}$. Обозначим через $\xi_n(x)$ случайную величину, распределение которой соответствует распределению скачка цепи $\{X_n\}$ из состояния x в момент времени n, т. е. $\mathbf{P}\{x+\xi_n(x) \in B\} = P_n(x,B)$, $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$.

Будем говорить, что цепь X_n со значениями в $\mathbb{R}$ является *цепью с асимптотически однородным* (*во времени и в пространстве*) *сносом*, если $\mathbf{E}\xi_n(x)$ сходится при n, $x \to \infty$ к некоторому числу $\mu \in \mathbb{R}$ (при этом не имеется в виду существование $\mathbf{E}\xi_n(x)$ при всех значениях n и x).

Теорема 3. *Пусть цепь Маркова X_n имеет асимптотически однородный во времени и в пространстве средний снос $\mu \geq 0$ и имеет место сходимость почти наверное*

$$X_n \to \infty \quad \textit{при } n\to\infty. \tag{16}$$

Пусть для некоторого пространственного уровня U и момента времени N семейство случайных величин $\{|\xi_n(u)|,\ n\geq N,\ u \geq U\}$ обладает интегрируемой мажорантой, т. е. существует такая случайная величина ξ с конечным средним значением, что $|\xi_n(u)| \leq_{\rm st} \xi$ для любых $n \geq N$ и $u \geq U$. Тогда $X_n/n \to \mu$ при $n\to\infty$ почти наверное.

Замечание 1. Простейшие примеры цепей Маркова, удовлетворяющих условиям теоремы, дают (а) обычный процесс суммирования $X_n = \xi_1+\dots+\xi_n$ независимых одинаково распределенных случайных величин ξ_1, ξ_2, ... с положительным средним значением и (б) случайное блуждание с задержкой в нуле $X_{n+1} = \max(0, X_n+\xi_n)$.

Замечание 2. Для неприводимой счетной цепи Маркова со значениями в $\mathbb{Z}^+$ условие (16) эквивалентно невозвратности цепи.

Доказательство теоремы 3. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Так как $\mathbf{E}\xi_n(x) \to \mu$, найдутся $\widetilde{N} > N$ и $\widetilde{U} > U$ такие, что

$$\mathbf{E}\xi_n(x) \in [\mu-\varepsilon, \mu+\varepsilon] \quad \text{при } n \geq \widetilde{N} \text{ и } x \geq \widetilde{U}.$$

Ввиду условия (16)

$$\mathop{\mathscr{L}im}_{N_1\to\infty} \mathbf{P}\{X_n \geq \widetilde{U} \text{ для любого } n \geq N_1\} \to 1.$$

Итак, цепь X_n удовлетворяет условиям теоремы 2 при $S=\mathscr{Y}=\mathbb{R}$, $f(x)=x$, $\widetilde{B}=[\widetilde{U},\infty)$ и $M=[\mu-\varepsilon,\mu+\varepsilon]$. Следовательно, почти наверное справедливо включение

$$\mathop{\mathscr{L}im}_{n\to\infty} X_n/n \subseteq [\mu-\varepsilon,\mu+\varepsilon].$$

Поскольку $\varepsilon>0$ выбрано произвольно, теорема доказана.

§ 3. Изменение во времени значения характеристического функционала цепи Маркова

Характеристический функционал суммы независимых слагаемых равен произведению характеристических функционалов самих слагаемых. В настоящем параграфе выясняется, в какой степени это утверждение сохраняется для цепи Маркова со значениями в сепарабельном банаховом пространстве $\mathscr{Y}$.

3.1. Оценка близости значения характеристического функционала цепи к произведению характеристических функционалов скачков.

Лемма 1. *Пусть $\lambda:\mathscr{Y}\to\mathbb{R}$ — линейный функционал. Для любых $n\ge 1$, $k\le n$ и комплексного числа $\varphi\in\mathbb{C}$, $|\varphi|\le 1$, справедливо неравенство* (здесь i — *мнимая единица*)

$$|\mathbf{E}e^{i\lambda(X_n)}-\varphi^{n-k}\mathbf{E}e^{i\lambda(X_k)}|\le\sum_{j=k}^{n-1}\delta_j|\varphi|^{n-j-1},$$

где

$$\delta_j=\sup_{x\in\mathscr{Y}}|\mathbf{E}e^{i\lambda(\xi_j(x))}-\varphi|. \tag{17}$$

Доказательство. Пусть $j\in[k+1,n]$. В силу линейности λ и марковости $\{X_n\}$ имеем

$$\mathbf{E}e^{i\lambda(X_j)}=\mathbf{E}\{\mathbf{E}\{e^{i\lambda(X_j-X_{j-1})}e^{i\lambda(X_{j-1})}|X_{j-1}\}\} \\ =\int_{\mathscr{Y}}(\mathbf{E}e^{i\lambda(\xi_{j-1}(x))})e^{i\lambda(x)}\mathbf{P}\{X_{j-1}\in dx\}.$$

Следовательно,

$$|\mathbf{E}e^{i\lambda(X_j)}-\varphi\mathbf{E}e^{i\lambda(X_{j-1})}|=\left|\int_{\mathscr{Y}}(\mathbf{E}e^{i\lambda(\xi_{j-1}(x))}-\varphi)e^{i\lambda(x)}\mathbf{P}\{X_{j-1}\in dx\}\right|\le\delta_{j-1}$$

ввиду (17). Отсюда выводим неравенства

$$|\mathbf{E}e^{i\lambda(X_n)}-\varphi^{n-k}\mathbf{E}e^{i\lambda(X_k)}| \\ \le\sum_{j=k+1}^{n}|\varphi^{n-j}\mathbf{E}e^{i\lambda(X_j)}-\varphi^{n-(j-1)}\mathbf{E}e^{i\lambda(X_{j-1})}|\le\sum_{j=k+1}^{n}\delta_{j-1}|\varphi|^{n-j},$$

Лемма доказана.

3.2. Оценка близости в терминах множеств высокой вероятности. В формуле (17) величина δ_j определялась как максимальное по всему фазовому пространству отклонение значения характеристического функционала скачка цепи от некоторого комплексного числа $\varphi\in\mathbb{C}$. В формулируемой ниже лемме значение δ_j определяется как максимальное отклонение значения характеристического функционала скачка цепи от φ не на всем фазовом пространстве, а лишь на некотором множестве; при применении этой леммы в следующих параграфах соответствующие множества имеют вероятность, близкую к 1.

Пусть B_0, $B_1, \dots$ — некоторые множества в $\mathscr{Y}$. Для $k \le n$ обозначим событие

$$B_{k,n} = \{X_j \in B_j \text{ для любого } j \in [k,n]\}.$$

События $B_{k,n}$ образуют невозрастающую по n последовательность.

Лемма 2. *Пусть $\lambda : \mathscr{Y} \to \mathbb{R}$ — линейный функционал. Для любых $n \ge 1$, $k \le n$ и комплексного числа $\varphi \in \mathbb{C}$, $|\varphi| \le 1$, справедливо неравенство*

$$|\mathbf{E}e^{i\lambda(X_n)} - \varphi^{n-k}\mathbf{E}e^{i\lambda(X_k)}| \le \sum_{j=k}^{n-1} \delta_j |\varphi|^{n-j-1} + 2(1 - \mathbf{P}\{B_{k,n-1}\}),$$

где

$$\delta_j = \sup_{x \in B_j} |\mathbf{E}e^{i\lambda(\xi_j(x))} - \varphi|. \tag{18}$$

Доказательство. Не ограничивая общности, считаем, что $k = 0$. Для любого n выберем произвольную точку x_n из множества B_n. Определим вспомогательную цепь $\widetilde{X}_n$ со скачками $\tilde{\xi}_n(x)$, положив $\tilde{\xi}_n(x) = \xi_n(x)$ при $x \in B_n$ и $\tilde{\xi}_n(x) = \xi_n(x_n)$ при $x \notin B_n$. По построению и ввиду (18) для цепи $\widetilde{X}_n$ выполняется

$$\delta_j = \sup_{x \in \mathscr{Y}} |\mathbf{E}e^{i\lambda(\tilde{\xi}_j(x))} - \varphi|.$$

Поэтому по лемме 1 имеем оценку

$$|\mathbf{E}e^{i\lambda(\widetilde{X}_n)} - \varphi^n\mathbf{E}e^{i\lambda(\widetilde{X}_0)}| \le \sum_{j=0}^{n-1} \delta_j |\varphi|^{n-j-1}.$$

Положим $\widetilde{X}_0 = X_0$. Тогда вследствие марковости и совпадения скачков двух цепей на событии $B_{0,n-1}$ значения X_n и $\widetilde{X}_n$ совпадают с вероятностью, не меньшей $\mathbf{P}\{B_{0,n-1}\}$. Значит,

$$|\mathbf{E}e^{i\lambda(X_n)} - \mathbf{E}e^{i\lambda(\widetilde{X}_n)}| \le 2(1 - \mathbf{P}\{B_{0,n-1}\}),$$

что и завершает доказательство оценки леммы.

§ 4. Центральная предельная теорема для цепи Маркова со значениями в евклидовом пространстве

В настоящем параграфе исследуется цепь Маркова в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^d$. Для скалярного произведения двух вектор-строк ξ и $\eta \in \mathbb{R}^d$ используем обозначение $\langle \xi, \eta \rangle$. Под вектор-столбцом ξ^T понимаем транспонированную вектор-строку ξ.

4.1. Центральная предельная теорема. В следующей теореме выясняются достаточные условия, при которых цепь Маркова со значениями в $\mathbb{R}^d$ удовлетворяет центральной предельной теореме.

Теорема 4. *Пусть невозрастающая последовательность множеств $B_0 \supseteq B_1 \supseteq \dots$ в $\mathbb{R}^d$ такова, что при $N \to \infty$*

$$\mathbf{P}\{X_n \in B_n \text{ для любого } n \geq N\} \to 1. \tag{19}$$

Пусть для некоторого момента времени $\widetilde{N}$ семейство $\{\|\xi_n(x)\|^2,\ n \geq \widetilde{N},\ x \in B_0\}$ интегрируемо равномерно по n и x. Если для некоторых вектора $\mu \in \mathbb{R}^d$ и симметричной неотрицательно определенной матрицы σ^2 размера $d \times d$ имеют место соотношения

$$\sup_{x \in B_n} \|\mathbf{E}\xi_n(x) - \mu\| = o(1/\sqrt{n}), \tag{20}$$

$$\sup_{x \in B_n} \|\mathbf{Cov}(\xi_n(x), \xi_n(x)) - \sigma^2\| \to 0 \tag{21}$$

при $n \to \infty$, то распределение случайного вектора $n^{-1/2}(X_n - n\mu)$ слабо сходится при $n \to \infty$ к d-мерному нормальному закону с нулевым средним и ковариационной матрицей σ^2.

Доказательство будет проведено методом характеристических функций; далее $\lambda \in \mathbb{R}^d$. Ввиду условия равномерной интегрируемости семейства квадратов скачков справедливо разложение

$$\mathbf{E}e^{i\langle \lambda, \xi_j(x) - \mu\rangle} = 1 + i\langle \lambda, \mathbf{E}\xi_j(x) - \mu\rangle - \frac{1}{2}\lambda \mathbf{E}(\xi_j(x) - \mu)^T(\xi_j(x) - \mu)\lambda^T + o(\|\lambda\|^2)$$

при $\lambda \to 0$ равномерно по $j \geq \widetilde{N}$ и $x \in B_0$. Учитывая здесь условия (20) и (21), получаем соотношение

$$\mathbf{E}e^{i\langle \lambda, \xi_j(x) - \mu\rangle} = 1 - \lambda\sigma^2\lambda^T/2 + \varepsilon_j(\lambda, x)(\|\lambda\|/\sqrt{j} + \|\lambda\|^2),$$

где $\varepsilon_j(\lambda, x) \to 0$ при $\lambda \to 0$ и $j \to \infty$ равномерно по $x \in B_j$. Фиксируем произвольным образом $\lambda \in \mathbb{R}^d$ и $\varepsilon > 0$. В силу последнего соотношения и условия (19) найдется $k \geq \widetilde{N}$ такое, что для любого $j \geq k$

$$|\mathbf{E}e^{i\langle \lambda/\sqrt{n}, \xi_j(x) - \mu\rangle} - (1 - \lambda\sigma^2\lambda^T/2n)| \leq \varepsilon/\sqrt{nj}$$

равномерно по $x \in B_n$ и

$$\mathbf{P}\{X_j \in B_j \text{ для любого } j \geq k\} \geq 1 - \varepsilon.$$

Применяя теперь к цепи $\frac{X_n - n\mu}{\sqrt{n}}$ лемму 2 при $\varphi = 1 - \lambda\sigma^2\lambda^T/2n$, получаем оценку

$$\left|\mathbf{E}e^{i\langle \lambda, \frac{X_n - n\mu}{\sqrt{n}}\rangle} - \left(1 - \frac{\lambda\sigma^2\lambda^T}{2n}\right)^{n-k} \mathbf{E}e^{i\langle \lambda, \frac{X_k - k\mu}{\sqrt{n}}\rangle}\right| \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} \sum_{j=k}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{j}} + 2\varepsilon \leq 3\varepsilon.$$

Поскольку для любого фиксированного k

$$\mathbf{E}e^{i\langle \lambda, \frac{X_k - k\mu}{\sqrt{n}}\rangle} \to 1$$

при $n \to \infty$ и

$$\left(1 - \frac{\lambda\sigma^2\lambda^T}{2n}\right)^{n-k} \to e^{-\lambda\sigma^2\lambda^T/2},$$

выводим оценку

$$\limsup_{n \to \infty} |\mathbf{E}e^{i\langle \lambda, \frac{X_n - n\mu}{\sqrt{n}}\rangle} - e^{-\lambda\sigma^2\lambda^T/2}| \leq 3\varepsilon.$$

Так как $\varepsilon > 0$ выбрано произвольно, теорема доказана.

4.2. Центральная предельная теорема для одномерной цепи Маркова с асимптотически однородным сносом. В настоящем пункте результат теоремы 4 конкретизируется для цепи Маркова $\{X_n\}$ со значениями на действительной прямой $\mathbb{R}$.

Теорема 5. *Пусть цепь X имеет асимптотически однородный во времени и в пространстве средний снос $\mu > 0$ и выполнено условие* (16). *Пусть для некоторых момента времени $\widetilde{N}$ и пространственного уровня $\widetilde{U}$ семейство квадратов скачков $\{\xi_n^2(x),\ n \ge \widetilde{N},\ x \ge \widetilde{U}\}$ интегрируемо равномерно по n и x. Если при $n, x \to \infty$ имеют место соотношения*

$$\mathbf{E}\xi_n(x) = \mu + o(1/\sqrt{n} + 1/\sqrt{x}), \tag{22}$$

$$\mathbf{D}\xi_n(x) \to \sigma^2 > 0, \tag{23}$$

то распределение случайной величины $(X_n - n\mu)/\sqrt{n\sigma^2}$ слабо сходится при $n \to \infty$ к стандартному нормальному закону.

Доказательство. Поскольку семейство квадратов скачков $\{\xi_n^2(x),\ n \ge \widetilde{N},\ x \ge \widetilde{U}\}$ равномерно интегрируемо, семейство случайных величин $\{|\xi_n(x)|, n \ge \widetilde{N}, x \ge \widetilde{U}\}$ обладает интегрируемой мажорантой и цепь X_n удовлетворяет условиям теоремы 3. В силу теоремы 3 $X_n/n \to \mu$ при $n \to \infty$. Следовательно, множества $B_n = [n\mu/2, \infty)$ удовлетворяют условию

$$\mathbf{P}\{X_n \in B_n \text{ для любого } n \ge N\} \to 1$$

при $N \to \infty$. Ввиду условий (22) и (23) для множеств B_n справедливы соотношения (20) и (23). Применение теоремы 4 завершает доказательство.

§ 5. Локальная оценка для распределения цепи Маркова со значениями в евклидовом пространстве

5.1. Верхняя оценка вероятности попадания значения цепи Маркова в компакт. Пусть случайные величины ξ_n, $n = 1, 2, \ldots$, со значениями в $\mathbb{R}$ независимы и одинаково распределены. Известна (см., например, теорему 9 в [8, гл. III]) следующая оценка для функции концентрации распределения сумм $S_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$: существует такая постоянная c, зависящая лишь от распределения ξ_1, что для любых $x \in \mathbb{R}$ и $n \ge 1$

$$\mathbf{P}\{S_n \in [x, x+1)\} \le c/\sqrt{n}.$$

В формулируемой ниже теореме это утверждение обобщается на цепи Маркова со значениями в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^d$. Как и прежде, $\xi_n(x)$ используется для обозначения скачка цепи в момент времени n из состояния x. Обозначим характеристическую функцию скачка $\xi_n(x)$ через $\varphi_n(\lambda, x)$, $\lambda \in \mathbb{R}^d$.

Пусть $\varphi(\lambda)$ — характеристическая функция некоторого случайного вектора $\xi \in \mathbb{R}^d$ с невырожденным распределением. Под невырожденностью понимается то свойство, что распределение ξ не сосредоточено ни на какой гиперплоскости; другими словами, (симметричная неотрицательно определенная) матрица ковариаций распределения F_r, $F_r(B) = \{\xi \in B \mid \|\xi\| < r\}$, невырождена хотя бы для одного значения $r > 0$ (а следовательно, и для всех достаточно больших r).

Лемма 3. *Для любого случайного вектора ξ с невырожденным распределением найдется такое положительное число $\delta > 0$, что $|\mathbf{E}e^{i\langle\lambda,\xi\rangle}| \le e^{-\delta\|\lambda\|^2}$ для $\|\lambda\| \le \delta$.*

Доказательство. Пусть r таково, что матрица ковариаций σ^2 распределения F_r невырожденна. Тогда найдется $\delta_1 > 0$ такое, что $\langle\lambda\sigma^2, \lambda\rangle \ge \delta_1\|\lambda\|^2$

для любого $\lambda \in \mathbb{R}^d$. Обозначим через μ среднее значение распределения F_r. Поскольку

$$|\mathbf{E}\{e^{i\langle\lambda,\xi\rangle} \mid \|\xi\| < r\}| = |\mathbf{E}\{e^{i\langle\lambda,\xi-\mu\rangle} \mid \|\xi\| < r\}| = 1 - \langle\lambda\sigma^2,\lambda\rangle/2 + o(\|\lambda\|^2)$$

при $\lambda \to 0$, то существует $\delta > 0$ такое, что при $\|\lambda\| < \delta$

$$|\mathbf{E}\{e^{i\langle\lambda,\xi\rangle} \mid \|\xi\| < r\}| \le 1 - \delta\|\lambda\|^2.$$

Следовательно, при $\|\lambda\| < \delta$ справедливо неравенство

$$\begin{aligned}|\mathbf{E}e^{i\langle\lambda,\xi\rangle}| &= |\mathbf{E}\{e^{i\langle\lambda,\xi\rangle}\big|\|\xi\| < r\}\mathbf{P}\{\|\xi\| < r\} + \mathbf{E}\{e^{i\langle\lambda,\xi\rangle}\big|\|\xi\| \ge r\}\mathbf{P}\{\|\xi\| \ge r\}| \\ &\le |\mathbf{E}\{e^{i\langle\lambda,\xi\rangle}\big|\|\xi\| < r\}|\mathbf{P}\{\|\xi\| < r\} + \mathbf{P}\{\|\xi\| \ge r\} \le 1 - \delta\|\lambda\|^2\mathbf{P}\{\|\xi\| < r\}.\end{aligned}$$

Утверждение леммы вытекает теперь из неравенства $1 + h \le e^h$, верного для любого действительного числа h.

Обозначим единичный куб с «левой нижней» вершиной $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ через $\square(x)$:

$$\square(x) = \{y = (y_1, \dots, y_d) : y_j \in [x_j, x_j + 1] \text{ для любого } j = 1, \dots, d\}.$$

Теорема 6. *Пусть для некоторых невозрастающей последовательности множеств $B_0 \supseteq B_1 \supseteq \dots$ и числа $\varepsilon > 0$ выполняются следующие соотношения:*

$$\mathbf{P}\{X_k \notin B_k \text{ для некоторого } k \ge n\} = O(n^{-d/2}) \tag{24}$$

при $n \to \infty$ и

$$\sup_{x \in B_n, \|\lambda\| \le \varepsilon} |\varphi_n(\lambda, x) - \varphi(\lambda)| = O(\delta_n), \tag{25}$$

где

$$\delta_n = \begin{cases} n^{-1} & \text{при } d = 1, \\ (n\ln n)^{-1} & \text{при } d = 2, \\ n^{-d/2} & \text{при } d \ge 3. \end{cases} \tag{26}$$

Тогда найдется такая постоянная c_1, что имеет место равномерное по n и $x \in \mathbb{R}^d$ неравенство

$$\mathbf{P}\{X_n \in \square(x)\} \le c_1 n^{-d/2}.$$

Замечание 3. Условия, достаточные для выполнения (24) при $d = 1$ для множеств $B_n = [na, \infty)$, $a \in \mathbb{R}$, приведены в конце настоящего параграфа.

Доказательство. Не ограничивая общности, считаем, что число $\delta > 0$, доставляемое леммой 3, равно ε. В силу этой леммы для любого $j \ge 1$ справедлива оценка

$$\int\limits_{[-\varepsilon,\varepsilon]^d} |\varphi(\lambda)|^j \, d\lambda \le \int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{-j\varepsilon\|\lambda\|^2} d\lambda = \left(\frac{2\pi}{j\varepsilon}\right)^{d/2}. \tag{27}$$

Оценим значение характеристической функции $\mathbf{E}e^{i\langle\lambda,X_n\rangle}$ в окрестности нуля. Применим лемму 2 к цепи X_n при $\varphi = \varphi(\lambda)$ и $k = n/2$. Ввиду условий (24) и (25) делаем вывод о существовании $c_2 < \infty$ такого, что равномерно по $\|\lambda\| \le \varepsilon$ имеет место оценка

$$|\mathbf{E}e^{i\langle\lambda,X_n\rangle}| \le |\varphi(\lambda)|^{n/2} + c_2\delta_n \sum_{j=1}^{n/2} |\varphi(\lambda)|^j + O(n^{-d/2}). \tag{28}$$

Рассмотрим случайный вектор $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_d)$ с независимыми координатами, каждая из которых имеет общее распределение с плотностью (см. [9, гл. XVI, § 3])

$$p(z) = (1 - \cos z)/\pi z^2, \quad z \in \mathbb{R}, \tag{29}$$

и характеристической функцией, $\lambda_1 \in \mathbb{R}$,

$$\psi(\lambda_1) = \mathbf{E}e^{i\lambda_1\eta_1} = \begin{cases} 1 - |\lambda_1|, & \text{если } |\lambda_1| \le 1, \\ 0, & \text{если } |\lambda_1| > 1. \end{cases} \tag{30}$$

Предполагаем, что η не зависит от X_n. Характеристическая функция суммы $X_n + \eta/\varepsilon$ равна $\mathbf{E}e^{i\langle\lambda, X_n\rangle}\psi(\lambda/\varepsilon)$, где $\psi(\lambda) = \psi(\lambda_1)\ldots\psi(\lambda_d)$, $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_d)$. Поскольку характеристическая функция $|\psi(\lambda)|$ интегрируема, сумма $X_n + \eta/\varepsilon$ имеет ограниченную непрерывную плотность $p_{X_n+\eta/\varepsilon}(z)$, которая восстанавливается по следующей формуле обращения (см., например, [9, гл. XV, § 3, 7]):

$$p_{X_n+\eta/\varepsilon}(z) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{-i\langle\lambda, z\rangle}\mathbf{E}e^{i\langle\lambda, X_n\rangle}\psi(\lambda/\varepsilon)\,d\lambda, \quad z \in \mathbb{R}^d.$$

Следовательно,

$$p_{X_n+\eta/\varepsilon}(z) \le \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{E}e^{i\langle\lambda, X_n\rangle}|\psi(\lambda/\varepsilon)\,d\lambda \le \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{[-\varepsilon,\varepsilon]^d} |\mathbf{E}e^{i\langle\lambda, X_n\rangle}|\,d\lambda$$

ввиду определения $\psi(\lambda)$. Используя оценки (28) и (27), приходим к неравенствам

$$p_{X_n+\eta/\varepsilon}(z) \le \left(\frac{2}{n\delta}\right)^{d/2} + c_2\delta_n \sum_{j=1}^{n/2} \left(\frac{1}{j\delta}\right)^{d/2} + O(n^{-d/2}).$$

Сумма во втором слагаемом из правой части неравенства является величиной порядка $O(\sqrt{n})$ при $d = 1$, порядка $O(\ln n)$ при $d = 2$ и порядка $O(1)$ при $d \ge 3$. Поэтому найдется такое c_3, что

$$p_{X_n+\eta/\varepsilon}(z) \le c_3 n^{-d/2},$$

и для любой u-окрестности $\square_u(x)$ куба $\square(x)$

$$\mathbf{P}\{X_n + \eta \in \square_u(x)\} \le c_3(1 + 2u)^d n^{-d/2}. \tag{31}$$

Выберем $u > 0$ таким образом, чтобы $\mathbf{P}\{\|\eta/\varepsilon\| \le u\} \ge 1/2$. Тогда ввиду независимости X_n и η справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{X_n + \eta/\varepsilon \in \square_u(x)\} &\ge \mathbf{P}\{X_n \in \square(x),\ \|\eta/\varepsilon\| \le u\} \\ &= \mathbf{P}\{X_n \in \square(x)\}\mathbf{P}\{\|\eta/\varepsilon\| \le u\} \ge \mathbf{P}\{X_n \in \square(x)\}/2. \end{aligned}$$

Вместе с (31) последнее неравенство влечет оценку леммы.

5.2. Условия, достаточные для выполнения соотношения (24) в одномерном случае. Пусть $d = 1$, левый хвост начального распределения цепи удовлетворяет условию

$$\mathbf{P}\{X_0 \le -x\} = O(1/\sqrt{x}) \quad \text{при } x \to \infty$$

и найдется такая случайная величина η со средним значением $m = a + \delta$, $\delta > 0$, и конечной дисперсией, что при всех значениях n и x имеет место неравенство

$$\xi_n(x) \ge_{\mathrm{st}} \eta.$$

Тогда при $n \to \infty$

$$\mathbf{P}\{X_k < na \text{ для некоторого } k \geq n\} = O(1/\sqrt{n}).$$

Действительно, пусть η_n, $n \in \mathbf{Z}^+$, суть независимые копии η и $S_n = \eta_0 + \dots + \eta_{n-1}$. Зададим цепь X и величины η_n, $n \in \mathbf{Z}^+$, на одном вероятностном пространстве таким образом, чтобы $\xi_n(x) \geq \eta_n$ почти наверное для любых n и x. Тогда на событии $X_0 \geq -n\delta/2$ имеем $X_k \geq S_k - k\delta/2$ для любого $k \geq n$. Поэтому

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\{X_k < ka &\text{ для некоторого } k \geq n\} \\ &\leq \mathbf{P}\{X_0 < -n\delta/2\} + \mathbf{P}\{S_k - k\delta/2 < ka \text{ для некоторого } k \geq n\} \\ &\qquad = O(1/\sqrt{n}) + \mathbf{P}\{(S_k - km)/k < -\delta/2 \text{ для некоторого } k \geq n\}.\end{aligned}$$

Последовательность $(S_k - km)/k$, $k = 1, 2, \dots$, образует обратный мартингал; в силу неравенства Колмогорова для мартингалов

$$\begin{aligned}\mathbf{P}&\left\{\frac{S_k - km}{k} < -\frac{\delta}{2} \text{ для некоторого } k \geq n\right\} \\ &\leq \mathbf{P}\left\{\sup_{k\geq n} \frac{|S_k - km|}{k} > \frac{\delta}{2}\right\} \leq \frac{4\mathbf{E}(S_n - nm)^2}{\delta^2 n^2} = O(1/n) = O(1/\sqrt{n}),\end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

§ 6. Локальная центральная предельная теорема в решетчатом случае

Пусть $B_0 \supseteq B_1 \supseteq \dots$ — некоторая невозрастающая последовательность множеств в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^d$. В настоящем и в следующем параграфах рассматривается *асимптотически однородная во времени и в пространстве* (*в направлении множеств* B_n) *цепь Маркова* со значениями в $\mathbb{R}^d$, т. е. такая цепь X_n, что распределение скачка $\xi_n(x)$ слабо сходится к распределению некоторой случайной величины ξ при $n \to \infty$ равномерно по $x \in B_n$.

Предполагаем, что «предельный скачок» ξ имеет конечные среднее значение $\mu \in \mathbb{R}^d$ и матрицу ковариаций $\sigma^2 > 0$ порядка d. Предполагаем, что распределение ξ не сосредоточено ни на какой гиперплоскости, т. е. симметричная неотрицательно определенная матрица σ^2 невырожденна. Через Q обозначим матрицу, обратную к матрице σ^2.

Пусть независимые одинаково распределенные случайные величины ξ_n, $n = 1, 2, \dots$, со значениями в $\mathbb{Z}$ имеют конечное среднее значение μ и дисперсию $\sigma^2 = \mathbf{D}\xi_1$. Пусть наибольший общий делитель чисел из множества $\{k \in \mathbb{Z} : \mathbf{P}\{\xi_1 = k\} > 0$ равен единице; это означает, что $\mathbb{Z}$ — минимальная решетка для распределения ξ_1. Известна (см., например, теорему 3 в [9, гл. XV, § 5]) локальная теорема для распределения сумм $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$, согласно которой

$$\mathbf{P}\{S_n = k\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi n\sigma^2}} e^{-(k-n\mu)^2/2n\sigma^2} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

при $n \to \infty$ равномерно по всем $k \in \mathbb{Z}$. В формулируемой ниже теореме это утверждение обобщается на цепь Маркова X со значениями на целочисленной решетке $\mathbb{Z}^d$.

Обозначим $\varphi_n(\lambda, x) \equiv \mathbf{E}e^{i\langle\lambda,\xi_n(x)-\mu\rangle}$ и $\varphi(\lambda) \equiv \mathbf{E}e^{i\langle\lambda,\xi-\mu\rangle}$. В этом параграфе предполагаем, что распределение ξ решетчатое, причем $\mathbb{Z}^d$ — минимальная решетка в том смысле, что для любого $\varepsilon > 0$ выполняется

$$\sup_{\lambda\in[-\pi,\pi]^d\setminus[-\varepsilon,\varepsilon]^d} |\varphi(\lambda)| < 1. \tag{32}$$

В одномерном случае $d = 1$ последнее соотношение эквивалентно тому, что решетка $\mathbb{Z}$ является минимальной для распределения ξ.

Теорема 7. *Пусть при $n \to \infty$*

$$(X_n - n\mu)n^{-1/2} \Rightarrow N(0, \sigma^2). \tag{33}$$

Кроме того, пусть выполняются следующие два соотношения:

$$\mathbf{P}\{X_k \notin B_k \text{ для некоторого } k \geq n\} = o(n^{-d/2}) \tag{34}$$

при $n \to \infty$ и

$$\sup_{x\in B_n,\ \lambda\in[-\pi,\pi]^d} |\varphi_n(\lambda, x) - \varphi(\lambda)| = o(\delta_n), \tag{35}$$

где δ_n определено в (26). *Тогда равномерно по всем $k \in \mathbb{Z}^d$ имеет место соотношение*

$$\mathbf{P}\{X_n = k\} = \frac{\sqrt{\det Q}}{(2\pi n)^{d/2}} e^{-\langle(k-n\mu)Q,k-n\mu\rangle/2n} + o(n^{-d/2}).$$

Замечание 4. Достаточные для слабой сходимости (3) условия приведены в теореме 5.

Доказательство. Справедлива следующая формула обращения:

$$\mathbf{P}\{X_n = k\} = \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{[-\pi,\pi]^d} e^{-i\langle\lambda,k\rangle}\mathbf{E}e^{i\langle\lambda,X_n\rangle}\, d\lambda.$$

Следовательно,

$$n^{d/2}\mathbf{P}\{X_n = k\} = \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{[-\pi\sqrt{n},\pi\sqrt{n}]^d} e^{-i\langle\lambda,k-n\mu\rangle/\sqrt{n}}\mathbf{E}e^{i\langle\lambda,\frac{X_n-n\mu}{\sqrt{n}}\rangle}\, d\lambda.$$

Учитывая также, что при любом $z \in \mathbb{R}^d$

$$\frac{\sqrt{\det Q}}{(2\pi)^{d/2}} e^{-\langle zQ,z\rangle/2} = \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{-i\langle\lambda,z\rangle-\langle\lambda\sigma^2,\lambda\rangle/2}\, d\lambda, \tag{36}$$

получаем при $z = (k - n\mu)/\sqrt{n}$ для любого $A > 0$ равенство и неравенство

$$\begin{aligned}
&\left| n^{d/2}\mathbf{P}\{X_n = k\} - \frac{\sqrt{\det Q}}{(2\pi)^{d/2}} e^{-\langle (k-n\mu)Q, k-n\mu\rangle/2n} \right| \\
&\quad = \frac{1}{(2\pi)^d} \Bigg| \int\limits_{[-\pi\sqrt{n},\pi\sqrt{n}]^d} e^{-i\langle \lambda, k-n\mu\rangle/\sqrt{n}} \big(\mathbf{E} e^{i\langle \lambda, \frac{X_n - n\mu}{\sqrt{n}}\rangle} - e^{-\langle \lambda\sigma^2, \lambda\rangle/2}\big)\, d\lambda \\
&\qquad - \int\limits_{\mathbb{R}^d \setminus [-\pi\sqrt{n},\pi\sqrt{n}]^d} e^{-i\langle \lambda, k-n\mu\rangle/\sqrt{n} - \langle \lambda\sigma^2, \lambda\rangle/2}\, d\lambda \Bigg| \\
&\qquad \le \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{[-A,A]^d} |\mathbf{E} e^{i\langle \lambda, \frac{X_n - n\mu}{\sqrt{n}}\rangle} - e^{-\langle \lambda\sigma^2, \lambda\rangle/2}|\, d\lambda \\
&\qquad + \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{[-\pi\sqrt{n},\pi\sqrt{n}]^d \setminus [-A,A]^d} |\mathbf{E} e^{i\langle \lambda, \frac{X_n - n\mu}{\sqrt{n}}\rangle}|\, d\lambda \\
&\qquad\qquad + \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{\mathbb{R}^d \setminus [-A,A]^d} e^{-\langle \lambda\sigma^2, \lambda\rangle/2}\, d\lambda \equiv I_1 + I_2 + I_3.
\end{aligned}$$

Ввиду слабой сходимости (33) характеристическая функция $\mathbf{E} e^{i\langle \lambda, \frac{X_n - n\mu}{\sqrt{n}}\rangle}$ сходится при $n \to \infty$ равномерно по λ из любого компакта к характеристической функции $e^{-\langle \lambda\sigma^2, \lambda\rangle/2}$ нормального закона. Поэтому $I_1 \to 0$ при $n \to \infty$ для любого фиксированного $A > 0$. Кроме того, $I_3 \to 0$ при $A \to \infty$, поскольку матрица σ^2 строго положительно определенная. Поэтому для доказательства теоремы достаточно показать, что

$$I_2 \to 0 \quad \text{при } n,\ A \to \infty. \tag{37}$$

Применим лемму 2 к цепи X_n при $k = n/2$ и $\varphi = \varphi(\lambda/\sqrt{n})$. Ввиду условий (34) и (35) имеет место оценка

$$|\mathbf{E} e^{i\langle \lambda, \frac{X_n - n\mu}{\sqrt{n}}\rangle}| \le |\varphi(\lambda/\sqrt{n})|^{n/2} + o(\delta_n) \sum_{j=1}^{n/2} |\varphi(\lambda/\sqrt{n})|^j + o(n^{-d/2}) \tag{38}$$

при $n \to \infty$ равномерно по $\lambda \in [-\pi\sqrt{n}, \pi\sqrt{n}]^d$. В силу условия (32) и леммы 3 существует такое число $\delta > 0$, что для любого $\lambda \in [-\pi, \pi]^d$

$$|\varphi(\lambda)| \le e^{-\delta\|\lambda\|^2}.$$

Следовательно, для любого $j \ge 1$ справедлива оценка

$$\begin{aligned}
\int\limits_{[-\pi\sqrt{n},\pi\sqrt{n}]^d \setminus [-A,A]^d} |\varphi(\lambda/\sqrt{n})|^j\, d\lambda &\le \int\limits_{\mathbb{R}^d \setminus [-A,A]^d} e^{-j\delta\|\lambda\|^2/n}\, d\lambda \\
&= \left(\frac{n}{j\delta}\right)^{d/2} \int\limits_{\mathbb{R}^d \setminus [-A\sqrt{k\delta/n}, A\sqrt{k\delta/n}]^d} e^{-\|\lambda\|^2}\, d\lambda.
\end{aligned}$$

Подставляя эту оценку в (38), получаем, что I_2 не превосходит

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \left(\left(\frac{2}{\delta}\right)^{d/2} \int\limits_{\mathbb{R}^d \setminus [-A\sqrt{\delta/2}, A\sqrt{\delta/2}]^d} e^{-\|\lambda\|^2}\, d\lambda + o(\delta_n) \sum_{j=1}^{n/2} \left(\frac{n}{j\delta}\right)^{d/2} \right) + o(1).$$

Последняя величина стремится к нулю при n, $A \to \infty$, поскольку сумма во втором слагаемом есть величина порядка $O(n)$ при $d = 1$, порядка $O(n \ln n)$ при $d = 2$ и порядка $O(n^{d/2})$ при $d \geq 3$. Сходимость (37), а вместе с ней и сама теорема доказаны.

§ 7. Локальная центральная предельная теорема в нерешетчатом случае

В настоящем параграфе, как и в предыдущем, рассматривается асимптотически однородная во времени и в пространстве (также в направлении множеств B_n) цепь Маркова X, но распределение предельной случайной величины ξ предполагается нерешетчатым. Более того, распределение скалярного произведения $\langle \lambda, \xi \rangle$ предполагается нерешетчатым для любого $\lambda \in \mathbb{R}^d$. Поэтому для любых $0 < \varepsilon < a$ выполняется неравенство

$$\sup_{\lambda \in [-a,a]^d \setminus [-\varepsilon,\varepsilon]^d} |\varphi(\lambda)| < 1. \tag{39}$$

Обозначим параллелепипед с «левой нижней» вершиной $x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ и со сторонами длины $r_1, \ldots, r_d$ через $\square(x, r_1, \ldots, r_d) = \square(x, r)$, $r = (r_1, \ldots, r_d)$:

$$\square(x, r) = \{y = (y_1, \ldots, y_d) : y_j \in [x_j, x_j + r_j] \text{ для любого } j = 1, \ldots, d\}.$$

Теорема 8. *Пусть выполнены условия теоремы 7. Тогда для любого фиксированного набора чисел $r_1 > 0, \ldots, r_d > 0$ имеет место равномерное по $x \in \mathbb{R}^d$ соотношение*

$$\mathbf{P}\{X_n \in \square(x, r)\} = \frac{\sqrt{\det Q}}{(2\pi n)^{d/2}} e^{-\langle (x-n\mu)Q, x-n\mu \rangle/2n} \prod_{j=1}^{d} r_j + o(n^{-d/2}).$$

Доказательство. Утверждение теоремы эквивалентно следующему: при $n \to \infty$ равномерно по x

$$\mathbf{P}\{X_n \in \square(x, r)\} = \frac{1}{(2\pi n)^{d/2}} \int\limits_{\square(x,r)} e^{-\langle (t-n\mu)Q, t-n\mu \rangle/2n}\, dt + o(n^{-d/2}).$$

Рассмотрим случайный вектор $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_d)$ с независимыми координатами, каждая из которых имеет общее распределение с плотностью (29) и характеристической функцией (30). Предполагаем, что η не зависит от X_n.

Фиксируем $\varepsilon > 0$. Характеристическая функция суммы $X_n + \varepsilon^2 \eta$ равна $\mathbf{E} e^{i\langle \lambda, X_n \rangle} \psi(\varepsilon^2 \lambda)$, где $\psi(\lambda) = \psi(\lambda_1) \ldots \psi(\lambda_d)$, $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_d)$. Поскольку характеристическая функция $|\psi(\lambda)|$ интегрируема в $\mathbb{R}^d$, сумма $X_n + \varepsilon^2 \eta$ имеет ограниченную непрерывную плотность $p_{X_n + \varepsilon^2 \eta}(z)$, которая для любого $z \in \mathbb{R}^d$ может быть восстановлена по следующей формуле обращения (см., например, [9, гл. XV, § 3, 7]):

$$p_{X_n + \varepsilon^2 \eta}(z) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \psi(\varepsilon^2 \lambda) e^{-i\langle \lambda, z \rangle} \mathbf{E} e^{i\langle \lambda, X_n \rangle}\, d\lambda.$$

Значит,

$$n^{d/2} p_{X_n + \varepsilon^2 \eta}(z) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \psi(\varepsilon^2 \lambda / \sqrt{n}) e^{-i\langle \lambda, z - n\mu \rangle/\sqrt{n}} \mathbf{E} e^{i\langle \lambda, \frac{X_n - n\mu}{\sqrt{n}} \rangle}\, d\lambda.$$

Из этого равенства и формулы (36) выводим

$$\Delta_n \equiv \left| n^{d/2} p_{X_n+\varepsilon^2\eta}(z) - \frac{\sqrt{\det Q}}{(2\pi)^{d/2}} e^{-\langle (z-n\mu)Q, z-n\mu\rangle/2n} \right|$$
$$\le \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{\mathbb{R}^d} |\psi(\varepsilon^2\lambda/\sqrt{n}) \mathbf{E} e^{i\langle \lambda, \frac{X_n-n\mu}{\sqrt{n}}\rangle} - e^{-\langle \lambda\sigma^2, \lambda\rangle/2}| \, d\lambda.$$

Отсюда ввиду компактности носителя функции $\psi(\lambda)$ для любого $A > 0$ получаем неравенство

$$\Delta_n \le \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{[-A,A)^d} |\psi(\varepsilon^2\lambda/\sqrt{n}) \mathbf{E} e^{i\langle \lambda, \frac{X_n-n\mu}{\sqrt{n}}\rangle} - e^{-\langle \lambda\sigma^2, \lambda\rangle/2}| \, d\lambda$$
$$+ \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{[-\sqrt{n}/\varepsilon^2, \sqrt{n}/\varepsilon^2]^d \setminus [-A,A]^d} |\mathbf{E} e^{i\langle \lambda, \frac{X_n-n\mu}{\sqrt{n}}\rangle}| \, d\lambda + \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{\mathbb{R}^d \setminus [-A,A]^d} e^{-\langle \lambda\sigma^2, \lambda\rangle/2} \, d\lambda.$$

Точно такие же рассуждения, как и при доказательстве теоремы 7, показывают, что каждое из трех слагаемых в правой части последней оценки стремится к нулю при n, $A \to \infty$ равномерно по $z \in \mathbb{R}^d$; при этом вместо свойства (32) отделимости характеристической функции от нуля используется (39). Итак,

$$p_{X_n+\varepsilon^2\eta}(z) = \frac{\sqrt{\det Q}}{(2\pi n)^{d/2}} e^{-\langle (z-n\mu)Q, z-n\mu\rangle/2n} + o(n^{-d/2}) \tag{40}$$

при $n \to \infty$ равномерно по $z \in \mathbb{R}^d$.

Положим

$$\Box_\varepsilon^+(x,r) = \{y = (y_1, \dots, y_d) : y_j \in [x_j - \varepsilon, x_j + r_j + \varepsilon]\},$$
$$\Box_\varepsilon^-(x,r) = \{y = (y_1, \dots, y_d) : y_j \in [x_j + \varepsilon, x_j + r_j - \varepsilon]\}.$$

Из определения плотности (29) вытекает, что $\mathbf{P}\{|\eta_1| \ge t\} \le 1/t$. Значит,

$$\mathbf{P}\{\varepsilon^2\eta \notin [-\varepsilon,\varepsilon]^d\} \le \sum_{j=1}^d \mathbf{P}\{\varepsilon^2\eta_j \notin [-\varepsilon,\varepsilon]\} \le d\varepsilon.$$

Поскольку ввиду независимости X_n и η

$$\mathbf{P}\{X_n + \varepsilon^2\eta \in \Box_\varepsilon^+(x,r)\} \ge \mathbf{P}\{X_n \in \Box(x,r),\ \varepsilon^2\eta \in [-\varepsilon,\varepsilon]^d\}$$
$$= \mathbf{P}\{X_n \in \Box(x,r)\}\mathbf{P}\{\varepsilon^2\eta \in [-\varepsilon,\varepsilon]^d\} \ge \mathbf{P}\{X_n \in \Box(x,r)\}(1 - d\varepsilon),$$

имеем из (40) оценку сверху

$$\mathbf{P}\{X_n \in \Box(x,r)\} \le \frac{\mathbf{P}\{X_n + \varepsilon^2\eta \in \Box_\varepsilon^+(x,r)\}}{1 - d\varepsilon}$$
$$= \frac{\sqrt{\det Q}}{(2\pi n)^{d/2}} e^{-\langle (x-n\mu)Q, x-n\mu\rangle/2n} \frac{\prod_{j=1}^d (r_j + 2\varepsilon)}{1 - d\varepsilon} + o(n^{-d/2}) \tag{41}$$

при $n \to \infty$ равномерно по $x \in \mathbb{R}^d$. Поэтому (можно использовать также теорему 6) найдется постоянная c такая, что для любого $z \in \mathbb{R}^d$

$$\mathbf{P}\{X_n \in \Box(z,r)\} \le cn^{-d/2}.$$

Из этой оценки следует неравенство

$$\mathbf{P}\{X_n + \varepsilon^2\eta \in \square_\varepsilon^-(x,r),\ \varepsilon^2\eta \notin [-\varepsilon,\varepsilon]^d\}$$
$$= \int\limits_{u\notin[-\varepsilon,\varepsilon]^d} \mathbf{P}\{X_n \in \square_\varepsilon^-(x-u,r)\}\mathbf{P}\{\varepsilon^2\eta \in du\} \le cn^{-d/2}\mathbf{P}\{\varepsilon^2\eta \notin [-\varepsilon,\varepsilon]^d\} \le cn^{-d/2}d\varepsilon.$$

Отсюда, а также из неравенства

$$\mathbf{P}\{X_n + \varepsilon^2\eta \in \square_\varepsilon^-(x,r),\ \varepsilon^2\eta \in [-\varepsilon,\varepsilon]^d\} \le \mathbf{P}\{X_n \in \square(x,r)\}$$

вытекает следующая оценка снизу:

$$\mathbf{P}\{X_n \in \square(x,r)\} \ge \mathbf{P}\{X_n + \varepsilon^2\eta \in \square_\varepsilon^-(x,r)\} - cn^{-d/2}d\varepsilon$$
$$= \frac{\sqrt{\det Q}}{(2\pi n)^{d/2}} e^{-\langle (x-n\mu)Q, x-n\mu\rangle/2n} \prod_{j=1}^{d}(r_j - 2\varepsilon) + o(n^{-d/2}) - cn^{-d/2}d\varepsilon \quad (42)$$

в силу (40). Объединение оценок сверху (41) и снизу (42) ввиду произвольности выбора числа $\varepsilon > 0$ завершает доказательство теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Meyn S. P., Tweedie R. L.* Markov chains and stochastic stability. London; Berlin, etc.: Springer-Verl., 1993.
2. *Добрушин Р. Л.* Центральная предельная теорема для неоднородных цепей Маркова. I // Теория вероятностей и ее применения. 1956. Т. 1. С. 72–89.
3. *Добрушин Р. Л.* Центральная предельная теорема для неоднородных цепей Маркова. II // Теория вероятностей и ее применения. 1956. Т. 1. С. 365–425.
4. *Pinelis I.* Optimum bounds for the distribution of martingales in Banach spaces // Ann. Probab. 1994. V. 22. P. 1679–1706.
5. *Hoffman-Jfirgensen J., Pisier G.* The law of large numbers and the central limit theorem in Banach spaces // Ann. Probab. 1976. V. 4. P. 587–599.
6. *Pisier G.* Martingales with values in uniformly convex spaces // Israel J. Math. 1975. V. 20. P. 326–350.
7. *Боровков А. А., Коршунов Д. А.* Вероятности больших уклонений одномерных цепей Маркова. Часть 3. Достационарные распределения в субэкспоненциальном случае // Теория вероятностей и ее применения (в печати).
8. *Петров В. В.* Суммы независимых случайных величин. М.: Наука, 1972.
9. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М.: Мир, 1984. Т. 2.

Статья поступила 9 августа 2000 г.

Коршунов Дмитрий Алексеевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск 630090
`korshunov@math.nsc.ru`