Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2001. Том 42, № 3

УДК 517.9

УРАВНЕНИЯ ФАЗОВОГО ПОЛЯ И ГРАДИЕНТНЫЕ ПОТОКИ МАРГИНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

П. И. Плотников, А. В. Клепачёва

Аннотация: Доказано существование решений начально-краевой задачи для квазистационарных
уравнений фазового поля с многомерным параметром порядка. Показано, что построенные решения удовлетворяют принципу максимума энтропии и принципу минимума производства энтропии. Получена новая теорема о селекторе для дифференциальных включений с многозначными отображениями, порожденными обобщенными дифференциалами маргинальных функций. Библиогр. 8.

1. Введение

Постановка задачи. В статье исследуется разрешимость начально-краевой задачи для квазистационарных уравнений фазового поля, описывающих в рамках мезоскопической теории фазовые переходы первого рода. Предполагается, что среда заполняет ограниченную область $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \leq 3$, с границей класса C^2. Ее состояние полностью характеризуется распределением температуры $\vartheta(x,t)$ и набором параметров порядка $\varphi_i(x,t)$, $1 \leq i \leq n$, $x \in \Omega$. Требуется определить в цилиндре $Q_T = \Omega \times [0,T]$ с боковой поверхностью $\Gamma = \partial\Omega \times [0,T]$ функцию $\vartheta(x,t)$ и вектор-функцию $\varphi(x,t) = (\varphi_1(x,t), \dots, \varphi_n(x,t))$ так, чтобы выполнялись следующие уравнения и краевые условия:

$$Q_T: \quad \partial_t(\vartheta + \varphi_1) = \Delta\vartheta, \tag{1.1}$$

$$Q_T: \quad -\Delta\varphi + \nabla_\varphi \Phi(\varphi) = \vartheta \mathbf{e}_1, \tag{1.2}$$

$$\Gamma: \quad \frac{\partial\vartheta}{\partial n} + \lambda\vartheta = 0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial n} + \mu\varphi = 0, \tag{1.3}$$

$$\Omega: \quad \vartheta(\cdot,0) + \varphi_1(\cdot,0) = -u_0(\cdot) \in H_1(\Omega). \tag{1.4}$$

Здесь n — вектор внешней нормали к $\partial\Omega$; λ, μ — постоянные, которые для простоты полагаются положительными; $\mathbf{e}_i$ — векторы канонического базиса в $\mathbb{R}^d$. Предполагается, что термодинамический потенциал Φ допускает представление

$$\Phi = g(\varphi) - \frac{1}{2} Q\varphi \cdot \varphi,$$

в котором Q — произвольная симметрическая матрица, а $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — выпуклая функция, удовлетворяющая условиям

$$c^{-1}|\varphi|^4 \leq g(\varphi) \leq c(|\varphi|^4 + 1), \quad |\nabla_\varphi g(\varphi)| \leq c(|\varphi|^3 + 1). \tag{1.5}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 01–00–00911).

Уравнение (1.1) является уравнением баланса энергии, а (1.2) служит уравнением Эйлера — Лагранжа для функционала свободной энергии Гинзбурга — Ландау

$$F(\vartheta,\varphi)=\int\limits_{\Omega}\left[\frac{|\nabla\varphi|^2}{2}+\Phi(\varphi)-\frac{\vartheta^2}{2}-\vartheta\varphi_1\right]dx+\frac{\mu}{2}\int\limits_{\partial\Omega}|\varphi|^2\,ds,$$

в котором ϑ рассматривается как параметр. Из условий, наложенных на функцию $g(\varphi)$, вытекает, что функционал $F: H_1(\Omega)^n\times H_0(\Omega)\to\mathbb{R}$ непрерывно дифференцируем и, в частности,

$$U(\vartheta,\varphi)\equiv\nabla_{\vartheta}F(\varphi,\vartheta)=-\vartheta-\varphi_1\equiv u. \tag{1.6}$$

Отсюда естественным образом вытекает определение обобщенного решения задачи (1.1)–(1.4).

Определение 1.1. Функции $\varphi\in L_\infty(0,T;H_2(\Omega))$, $\vartheta\in L_\infty(0,T;H_0(\Omega))\cap L_2(0,T;H_1(\Omega))$, $u=-\vartheta-\varphi_1$, называются *обобщенным решением задачи* (1.1)–(1.4), если выполняются следующие условия:

1) для почти всех $t\in[0,T]$ вектор-функция $\varphi(t)$ служит критической точкой функционала $F(\vartheta(t),\cdot\,):H_1(\Omega)^n\to\mathbb{R}$;

2) для любой функции $\eta\in C^\infty(Q_T)$, равной нулю при $t=T$, выполняется интегральное тождество

$$\int\limits_{Q_T}(u\eta_t+\nabla\vartheta\nabla\eta)\,dxdt+\lambda\int\limits_{\Gamma}\vartheta\eta d\Gamma+\int\limits_{\Omega}u_0\eta(x,0)\,dx=0. \tag{1.7}$$

Интерес к квазистационарной модели фазового поля обусловлен тем, что ее макроскопическим пределом является задача Стефана с условием Гиббса — Томсона на свободной границе [1, 2]. Разрешимость задачи (1.1)–(1.4) в скалярном случае ($n=1$) в предположении, что φ удовлетворяет однородному условию Неймана, а ϑ — условию Дирихле, доказана П. И. Плотниковым и В. Н. Старовойтовым [3], а для общих граничных условий — Р. Шетцле [4, 5]. Методы решения задачи (1.1)–(1.4), предложенные в этих работах, применимы только в случае, когда уравнение для φ является скалярным эллиптическим уравнением второго порядка. В настоящей статье предлагается принципиально иной подход к этой проблеме, основанный на идее А. Визинтина [2] о том, что решения многих задач теории фазовых переходов могут интерпретироваться как градиентные потоки функционала энтропии.

Следует отметить основные трудности, возникающие в процессе исследования задачи (1.1)–(1.4). Первая из них обусловлена тем, что уравнения (1.1), (1.2) неразрешимы относительно временных производных. Вторая состоит в том, что при заданном $\vartheta\in H_0(\Omega)$ функционал $F(\cdot\,,\vartheta)$ имеет, вообще говоря, много критических точек. Поэтому решения уравнений (1.1), (1.2) могут быстро осциллировать по временной переменной. Кроме того, необходимо сформулировать правила отбора, которые выделяют физически допустимые решения среди всех остальных. Эти вопросы тесно связаны между собой. Мы покажем, что осцилляции можно успешно подавить, если в качестве правил отбора взять два физических принципа: принцип максимума энтропии и принцип минимума производства энтропии.

Энтальпийная формулировка. Градиентный поток энтропии. Принцип максимума энтропии позволяет свести задачу (1.1)–(1.4) к скалярному дифференциальному включению для функции $u(x,t)$, которое можно рассматривать как энтальпийную формулировку нашей задачи. Для этого удобно ввести некоторые дополнительные обозначения. Через $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ обозначим скалярное произведение в $H_0(\Omega)$ и введем в рассмотрение функционал

$$W(u,\varphi)=\langle\Theta(u,\varphi),u\rangle-F(\Theta(u,\varphi),\varphi),\quad \text{где } \Theta(u,\varphi)=-u-\varphi_1,$$

который мы будем называть *энтропией*, а также билинейную форму

$$\Pi(u,v)=\int\limits_{\Omega}\nabla u\nabla v\,dx+\lambda\int\limits_{\partial\Omega}uv\,dx.$$

Величину $\Pi(\vartheta,\vartheta)$ назовем *производством энтропии.* Введем также в рассмотрение маргинальную функцию — «суммарную энтропию»:

$$S(u)=\max_{\varphi\in H_1(\Omega)}W(u,\varphi).$$

Через $M(u)$ обозначим множество всех элементов $\varphi\in H_1(\Omega)^n$, в которых энтропия достигает максимума, т. е.

$$M(u)=\{\varphi\in H_1(\Omega)^n : W(u,\varphi)=S(u)\},$$

а через $E(u)\subset H_0(\Omega)$ — множество соответствующих значений температуры:

$$E(u)=\{\vartheta\in H_0(\Omega):\vartheta=-u-\varphi\mathbf{e}_1,\ \varphi\in M(u)\}.$$

Справедливо следующее утверждение, доказательство которого приведено в п. 2.

Предложение 1.2. *Функция $S: H_0(\Omega)\to\mathbb{R}$ определена и локально удовлетворяет условию Липшица. Ее обобщенный градиент в смысле Ф. Кларка* [6, гл. 2] *определяется равенством*

$$\partial S(u)=\overline{\mathrm{co}}E(u)=-u-\overline{\mathrm{co}}\{\varphi\mathbf{e}_1:\varphi\in M(u)\}.$$

Для любого $R>0$ существует компакт $K_R\subset H_1(\Omega)^n$ такой, что $M(u)\subset K_R$ при $\|u\|_{H_0}\le R$. Кроме того, если $\varphi\in M(u)$ и $\vartheta^*=-u-\varphi\mathbf{e}_1$, то φ служит критической точкой функционала $F(\vartheta^*,\cdot)$, т. е. $\nabla_\varphi F(\vartheta^*,\varphi)=0$.

Определим градиентный поток энтропии как обобщенное решение дифференциального включения

$$\frac{\partial u}{\partial t}\in-\Delta\partial S(u),\quad u(0)=u_0,\tag{1.8}$$

которое понимается в смысле следующего определения.

Определение 1.3. Функция $u\in L_\infty(0,T;H_0(\Omega))\cap L_2(0,T;H_1(\Omega))$ называется *обобщенным решением дифференциального включения* (1.8), если найдется функция $\vartheta^*\in L_\infty(0,T;H_0(\Omega))\cap L_2(0,T;H_1(\Omega))$ такая, что $\vartheta^*(t)\in\partial S(u(t))$ для почти всех $t\in[0,T]$ и для любой функции $\eta\in C^\infty(Q_T)$, $\eta(\cdot\,,T)=0$, выполняется интегральное тождество

$$\int\limits_0^T\langle u(t),\eta_t(t)\rangle\,dt+\int\limits_0^T\Pi(\vartheta^*(t),\eta(t))\,dt+\langle u_0,\eta(0)\rangle=0.\tag{1.9}$$

Если для некоторого обобщенного решения включения (1.8) $\vartheta^*(t)$ удовлетворяет более сильному условию $\vartheta^*(t) \in E(u(t))$, то согласно последнему утверждению предложения 1.2 функция ϑ^* и соответствующая ей вектор-функция $\varphi(t) \in M(u(t))$ служат обобщенным решением исходной задачи (1.1)–(1.4). Тем самым для доказательства разрешимости задачи (1.1)–(1.4) необходимо, во-первых, доказать существование обобщенного решения дифференциального включения (1.8), а во-вторых, показать, что $\vartheta^*(t) \in E(u(t))$. Последний вопрос наиболее трудный, поскольку функция S не является ни выпуклой, ни вогнутой. Частичный ответ на него дается следующей теоремой, которая представляет собой второй центральный результат настоящей работы.

Теорема о существовании селектора. *Предположим, что обобщенное решение дифференциального включения* (1.8) *удовлетворяет следующим условиям:*

(a) *u принадлежит $L_\infty(0,T;H_0(\Omega)) \cap L_2(0,T;H_1(\Omega))$ и ϑ^* принадлежит $L_\infty(0,T;H_0(\Omega)) \cap L_2(0,T;H_1(\Omega))$;*

(b) *существуют последовательности $u_N \in L_\infty(0,T;H_0(\Omega)) \cap L_2(0,T;H_1(\Omega))$, $\varphi_N \in L_\infty(0,T;H_2(\Omega))$ такие, что*

$$u_N \to u \text{ в } L_p(0,T;H_0(\Omega)), \quad \vartheta(u_N,\varphi_N) \to \vartheta^* \text{ слабо в } L_2(0,T;H_1(\Omega))$$

для любого $p < \infty$ и $W(u_N(t),\varphi_N(t)) \to S(u(t))$ для почти всех $t \in (0,T)$;

(c) *для почти всех t_1, $t_2 \in (0,T)$, $t_1 < t_2$, выполняется неравенство*

$$S(u(t_2)) - S(u(t_1)) \geq \limsup_{N\to\infty} \int\limits_{t_1}^{t_2} \Pi(\Theta(u_N,\varphi_N),\Theta(u_N,\varphi_N))\,dt.$$

Теорема 1.4. *Предположим, что выполнены условия* (a)–(c). *Тогда $\vartheta^*(t) \in E(u(t))$ для почти всех $t \in (0,T)$. Более того, $\vartheta^*(t)$ является единственным решением вариационной задачи*

$$\Pi(\vartheta^*(t),\vartheta^*(t)) = \min_{\theta \in \partial S(u(t))} \Pi(\theta,\theta).$$

Приближенные решения. Существование решений включения (1.8) доказывается с помощью метода семидискретизации с использованием следующей схемы.

Зафиксируем произвольное целое $N > 0$ и определим последовательность приближенных решений задачи (1.1)–(1.4) следующим образом:

$$u_N(t) = u_n,\ \vartheta_N(t) = \vartheta_n,\ \varphi_N(t) = \varphi_n \text{ для } (n-1)\tau < t \leq n\tau,\ 1 \leq n \leq N, \tag{1.10}$$

где $\tau = TN^{-1}$. Здесь элемент φ_0 определяется как решение задачи

$$W(u_0,\varphi_0) = \max_{\xi \in H_1(\Omega)} W(u_0,\xi), \tag{1.11}$$

а ϑ_0 дается формулой $\vartheta_0 = -u_0 - \varphi_0\mathbf{e}_1$. Для $n \geq 1$ элементы ϑ_n, φ_n находятся путем решения вариационной задачи

$$\Psi_n(\vartheta_n,\varphi_n) = \min_{\varphi \in H_1} \max_{\vartheta \in H_0(\Omega)} \Psi_n(\vartheta,\varphi), \tag{1.12}$$

где функционал $\Psi_n(\vartheta,\varphi)$ имеет вид

$$\Psi_n(\vartheta,\varphi) = F(\vartheta,\varphi) - \langle u_{n-1},\vartheta\rangle - \frac{\tau}{2}\Pi(\vartheta,\vartheta).$$

Наконец, элемент u_n определяется по правилу $u_n = U(\vartheta_n,\varphi_n) = -\vartheta_n - \varphi_n\mathbf{e}_1$.

Следующее утверждение показывает, что последовательность приближенных решений определена и удовлетворяет всем условиям теоремы 1.4.

Теорема 1.5. *Существуют ограниченные последовательности приближенных решений* ϑ_N, $u_N \in L_\infty(0,T;H_0(\Omega)) \cap L_2(0,T;H_1(\Omega))$, $\varphi_N \in L_\infty(0,T;H_2(\Omega))$, *и функции* $\vartheta, u \in L_\infty(0,T;H_0(\Omega)) \cap L_2(0,T;H_1(\Omega))$ *такие, что*

$$\vartheta_N \to \vartheta^*, \quad u_N \to u \quad \text{слабо в } L_2(0,T;H_1(\Omega), \tag{1.13}$$

$$u_N \to u \quad \text{сильно в} \quad L_p(0,T;H_0(\Omega)) \quad \text{для любого } p < \infty. \tag{1.14}$$

Предельные функции ϑ^*, u *удовлетворяют интегральному тождеству* (1.9) *и последовательность* $W(u_N(t), \varphi_N(t))$ *сходится к* $S(u(t))$ *и* $\vartheta^*(t) \in \partial S(u(t))$ *для почти каждого* $t \in (0,T)$. *Неравенство диссипации энергии*

$$S(u(t_2)) - S(u(t_1)) \geq \limsup_{N\to\infty} \int\limits_{t_1}^{t_2} \Pi(\vartheta_N(s), \vartheta_N(s))\, ds \tag{1.15}$$

выполняется для почти всех $t_1, t_2 \in (0,T)$, $t_1 < t_2$.

Отсюда и из теоремы 1.4 вытекает следующее утверждение о разрешимости задачи (1.1)–(1.4), которое является основным результатом настоящей статьи.

Теорема 1.6. *Задача* (1.1)–(1.4) *имеет обобщенное решение*

$$\vartheta \in L_\infty(0,T;H_0(\Omega)) \cap L_2(0,T;H_1(\Omega)), \quad \varphi \in L_\infty(0,T;H_2(\Omega))$$

такое, что внутренняя энергия и температура связаны соотношениями $u = U(\vartheta, \varphi)$, $\vartheta = \Theta(u, \varphi)$. *Это решение удовлетворяет принципу максимума энтропии*

$$W(u,\varphi) = \max_{\zeta \in H_1(\Omega)} W(u,\zeta).$$

Более того, оно порождает градиентный поток энтропии и удовлетворяет принципу минимума производства энтропии, т. е.

$$\vartheta(t) \in \partial S(u(t)), \quad \Pi(\vartheta(t), \vartheta(t)) = \min_{\zeta \in \partial S(u(t))} \Pi(\zeta,\zeta) \quad \text{для почти всех } t \in (0,T).$$

Замечание. Легко видеть, что в предположениях теоремы 1.6 функции $u(t)$, $\varphi(t)$ удовлетворяют уравнениям

$$\partial_t u(t) = -\Delta\Theta(u(t), \varphi(t)), \quad \nabla_\varphi W(u(t), \varphi(t)) = 0 \quad \text{для } t \in [0,T],$$

которые можно рассматривать как энтальпийную формулировку исходной задачи.

2. Доказательства предложения 1.2 и теоремы 1.4

Доказательство предложения 1.2 начнем с оценки H_2-нормы точек множества $M(u)$. Согласно условиям, наложенным на Φ, функционал $-W(u,\varphi)$ допускает следующую оценку снизу:

$$-W(u,\varphi) \geq C_1\big(\|\varphi\|^2_{H_1(\Omega)} + \|\varphi\|^4_{L_4(\Omega)}\big) - C_2\big(\|\varphi\|^2_{L_2(\Omega)} + \|u\|^2_{L_2(\Omega)} + 1\big), \tag{2.1}$$

где постоянные C_i зависят лишь от Φ, Ω и параметра μ. Отсюда вытекает, что $-W(u,\varphi) \to \infty$ при $\|\varphi\|_{H_1(\Omega)} \to \infty$. Кроме того, так как $g(\varphi)$ выпукла, то функционал $-W(u,\cdot\,) : H_1(\Omega) \to \mathbb{R}$ полунепрерывен снизу. Следовательно, множество $M(u)$ непусто. Неравенство $W(u,\varphi) \geq W(u,0)$, $\varphi \in M(u)$, и (2.1) приводят к оценке

$$\|\varphi\|_{H_1(\Omega)} \leq C(C_i, \|u\|_{H_0(\Omega)}) \tag{2.2}$$

для всех $\varphi \in M(u)$. Уравнения Эйлера — Лагранжа для функционала $W(u,\cdot)$ показывают, что функция $\varphi \in M(u)$ служит решением краевой задачи

$$\Omega: \quad -\Delta\varphi + \nabla_\varphi \Phi(\varphi) + \varphi_1 + u = 0, \quad \partial\Omega: \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n} + \mu = 0.$$

Неравенство (1.5) вместе с (2.2) и неравенством $\|\varphi\|_{L_6(\Omega)} \le \|\varphi\|_{H_1(\Omega)}$ дают оценку

$$\|\nabla_\varphi \Phi(\varphi) + \varphi_1 + u\|_{H_0(\Omega)} \le C(\|u\|_{H_0(\Omega)}).$$

Отсюда заключаем, что элементы множества $M(u)$ удовлетворяют неравенству

$$\|\varphi\|_{H_2(\Omega)} \le k(\|u\|_{H_0(\Omega)}),$$

где $k : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ — непрерывная функция, ограниченная на каждом ограниченном множестве. Следовательно, $M(u) \subset K_R$ при $\|u\|_{H_0(\Omega)} \le R$, где

$$K_R = \{\varphi \in H_2(\Omega)^n : \|\varphi\|_{H_2(\Omega)} \le k(R)\}.$$

Так как функция $W(u,\varphi)$ непрерывно дифференцируема, отсюда следует, что $S(u)$ удовлетворяет условию Липшица на каждом ограниченном подмножестве $H_0(\Omega)$. Вычислим обобщенный градиент S в точке $u \in H_0(\Omega)$. Выберем R так, чтобы $\|u\|_{H_0(\Omega)} \le R$, тогда $M(u) \subset K_R$. Заметим, что K_R — компакт в $H_1(\Omega)$ и отображение $W : H_0(\Omega) \times K_R \to \mathbb{R}$ непрерывно. Кроме того, $S(u) = \max\limits_{\varphi \in K_R} W(u,\varphi)$. Тем самым W и S удовлетворяют всем условиям следствия 2 теоремы 2.8.2 из [6], согласно которому

$$\partial S(u) = \left\{ \int\limits_{K_R} \nabla_u W(u,\varphi)\, d\nu(\varphi) : \nu \in P(M(u)) \right\},$$

где $P(M(u))$ — множество всех вероятностных мер, сосредоточенных на компакте $M(u)$. Остается заметить, что правая часть этого неравенства совпадает со слабым замыканием co$E(u)$ в гильбертовом пространстве $H_0(\Omega)$ и, следовательно, с сильным замыканием co$E(u)$.

Доказательство теоремы 1.4. Так как $H_0(\Omega)$, $H_1(\Omega)$ являются сепарабельными гильбертовыми пространствами, из бесконечномерных версий теорем Егорова и Лузина [7] заключаем, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое множество $\mathscr{D} \subset [0,T]$, что $\operatorname{meas}([0,T] \setminus \mathscr{D}) \le \varepsilon$ и

(a) отображение $t \mapsto \{\vartheta^*(t), S(u(t))\}$ множества $\mathscr{D}$ в $H_1(\Omega) \times \mathbb{R}^1$ равномерно непрерывно;

(b) последовательность $\{u_N(t), W(u_N(t), \varphi_N(t))\}$ сходится в $H_0(\Omega) \times \mathbb{R}^1$ к $\{u(t), S(u(t))\}$ равномерно на $\mathscr{D}$;

(c) любая точка $t_0 \in \mathscr{D}$ является точкой Лебега функций $\vartheta^*(t)$ и $u(t)$:

$$\frac{1}{h} \int\limits_{t_0-h}^{t_0} (\|\vartheta^*(t_0) - \vartheta^*(t)\|^2_{H_1(\Omega)} + (\|u(t_0) - u(t)\|^2_{H_1(\Omega)})\, dt \to 0 \quad \text{при } h \to 0. \tag{2.3}$$

Зафиксируем произвольную точку $t_0 \in \mathscr{D}$, удовлетворяющую условию

$$|t - t_0|^{-1} \operatorname{meas}(D \cup [t - t_0]) \to 1 \quad \text{при } t \to t_0.$$

Дополнение множества всех таких точек в $\mathscr{D}$ имеет меру нуль. Выберем постоянную $m > 0$ так, что

$$\|u(t_0)\|_{H_1(\Omega)} \le m, \qquad \sup_{\varphi \in E(u(t_0))} \|\Theta(u(t_0),\varphi)\|_{H_1(\Omega)} \le m,$$

и определим функции $\bar{\vartheta}_N(t)$, $\bar{u}_N(t)$ посредством равенств

$$\bar{\vartheta}_N(t) = \vartheta_N(t), \quad \bar{u}_N(t) = u_N(t) \quad \text{при } \|u_N(t)\| \le m,$$
$$\bar{\vartheta}_N(t) = u_N(t) = 0 \quad \text{в противном случае.}$$

Ясно, что $\bar{\vartheta}_N(t)$, $\bar{u}_N(t)$ совпадают с $\vartheta_N(t)$, $u_N(t)$ при $t \in \mathscr{D}$, достаточно близких к t_0.

Докажем теперь несколько вспомогательных лемм.

Лемма 2.1. *При сделанных предположениях неравенство*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{t_0 - t_n}(S(u(t_0)) - S(u(t_n))) \le \Pi(\vartheta, \vartheta^*(t_0)) \tag{2.4}$$

выполняется для любой последовательности $\{t_n\}_{n\ge1} \subset \mathscr{D}$, $t_n \to t_0 - 0$, *и любого* $\vartheta \in E(u(t_0))$.

Доказательство. Зафиксируем произвольное $\vartheta \in E(u(t_0))$. По определению множества $E(u)$ имеем представление $\vartheta = \Theta(u(t_0), \varphi)$, где $\varphi \in M(u(t_0))$ удовлетворяет уравнению $W(u(t_0), \varphi) = S(u(t_0))$. Так как $W(u(t_n), \varphi) \le S(u(t_n))$ и $W(\cdot, \varphi)$ выпуклая, то

$$\begin{aligned} S(u(t_0)) - S(u(t_n)) &\le W(u(t_0), \varphi) - W(u(t_n), \varphi) \\ &\le \langle \nabla_u W(u(t_n), \varphi), u(t_0) - u(t_n)\rangle = \langle \Theta(u(t_n), \varphi), u(t_0) - u(t_n)\rangle. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Обратимся теперь к интегральному тождеству (1.9). В качестве $\eta(x,t)$ возьмем функцию вида $\rho(t)\xi(x)$, где $\xi(x) \in H_2(\Omega)$, а

$$\rho(t) = \begin{cases} \frac{t}{\varepsilon} - \frac{t_n - \varepsilon}{\varepsilon}, & t \in [t_n - \varepsilon, t_n), \\ 1, & t \in [t_n, t_0], \\ -\frac{t}{\varepsilon} + \frac{t_0 + \varepsilon}{\varepsilon}, & t \in (t_0, t_0 + \varepsilon], \\ 0, & t \in [0, t_n - \varepsilon) \cup (t_0 + \varepsilon, T], \end{cases}$$

для некоторого $\varepsilon > 0$. Ясно, что $\rho(t) \to 1$ при $\varepsilon \to 0$ и

$$\int\limits_{t_n-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} \langle u(t), \partial_t \eta(t)\rangle\, dt = \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_{t_n-\varepsilon}^{t_n} \langle u(t), \xi(x)\rangle\, dt - \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_{t_0}^{t_0+\varepsilon} \langle u(t), \xi(x)\rangle\, dt$$
$$= \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_{t_n-\varepsilon}^{t_n} \langle u(t) - u(t_n), \xi(x)\rangle\, dt - \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_{t_0}^{t_0+\varepsilon} \langle u(t) - u(t_0), \xi(x)\rangle\, dt + \langle u(t_n) - u(t_0), \xi(x)\rangle.$$

Отсюда и из (1.9) имеем

$$\frac{1}{\varepsilon} \int\limits_{t_n-\varepsilon}^{t_n} \langle u(t) - u(t_n), \xi(x)\rangle\, dt - \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_{t_0}^{t_0+\varepsilon} \langle u(t) - u(t_0), \xi(x)\rangle\, dt + \langle u(t_n) - u(t_0), \xi(x)\rangle$$
$$= -\int\limits_{t_n-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} \Pi(\vartheta^*(t), \xi(x))\rho(t)\, dt. \tag{2.6}$$

Так как t_0, $t_n \in \mathscr{D}$ служат точками Лебега отображения $u : [0,T] \to H_1(\Omega)$, переходя в (2.6) к пределу при $\varepsilon \to 0$, получаем

$$\langle u(t_0) - u(t_n), \xi\rangle = \int\limits_{t_n}^{t_0} \Pi(\vartheta^*(t), \xi)\, dt.$$

Перепишем это равенство в виде

$$\frac{1}{t_0-t_n}\langle u(t_0)-u(t_n),\xi\rangle=\Pi(\vartheta^*(t_0),\xi)+\frac{1}{t_0-t_n}\int\limits_{t_n}^{t_0}\Pi(\vartheta^*(t)-\vartheta^*(t_0),\xi)\,dt.$$

Положим здесь $\xi=\Theta(u(t_n),\varphi)$ и подставим полученное выражение в правую часть неравенства (2.5). В результате получим

$$\frac{1}{t_0-t_n}(S(u(t_0))-S(u(t_n)))\le\Pi(\vartheta^*(t_0),\Theta(u(t_n),\varphi))+R_n,\tag{2.7}$$

$$R_n=\frac{1}{t_0-t_n}\int\limits_{t_n}^{t_0}\Pi(\vartheta^*(t)-\vartheta^*(t_0),\Theta(u(t_n),\varphi))\,dt.$$

Так как отображение $\Theta(\cdot,\varphi):H_1(\Omega)\to H_1(\Omega)$ непрерывно и для любой последовательности $t_n\to t_0$, $t_n\in\mathscr{D}$, выполняется соотношение $u(t_n)\to u(t_0)$ в $H_1(\Omega)$, то

$$\Pi(\vartheta^*(t_0),\Theta(u(t_n),\varphi))\to\Pi(\vartheta^*(t_0),\Theta(u(t_0),\varphi))\quad\text{при } n\to\infty.\tag{2.8}$$

Кроме того, соотношение (2.3) дает

$$|R_n|\le\frac{c}{t_0-t_n}\|\Theta(u(t_n),\varphi)\|_{H_1(\Omega)}\int\limits_{t_n}^{t_0}\|\vartheta^*(s)-\vartheta^*(t_0)\|_{H_1(\Omega)}\,ds\to 0\quad\text{при } n\to\infty.\tag{2.9}$$

Переходя к пределу в (2.7) с учетом соотношений (2.8) и (2.9), получим утверждение леммы. □

Лемма 2.2. *В предположениях теоремы* 1.4 *и леммы* 2.1 *для любой последовательности* $\{t_k\}_{k\ge1}\subset\mathscr{D}$, $t_k\to t_0-0$, *существует последовательность* N_k *такая, что*

$$\frac{1}{t_0-t_k}\int\limits_{t_k}^{t_0}\vartheta_{N_k}(s)\,ds\to\vartheta^*(t_0)\quad\textit{слабо в } H_0(\Omega)\textit{ при } k\to\infty.\tag{2.10}$$

Доказательство. Пусть ψ_j, $j\ge1$, — ортонормированный базис в $H_0(\Omega)$. Так как ϑ_N сходится слабо в $L_2(0,T;H_0(\Omega))$ к ϑ^*, существует последовательность N_k, $N_k<N_{k+1}$, такая, что

$$\left|\frac{1}{t_0-t_k}\int\limits_{t_k}^{t_0}\langle\vartheta_N(s)-\vartheta^*(s),\psi_j\rangle\,ds\right|\le\frac{1}{k}\quad\text{для любого } N\ge N_k \text{ и } 1\le j\le k.$$

По выбору точки t_0 и множества $\mathscr{D}$ имеем

$$\frac{1}{t_0-t_k}\int\limits_{t_k}^{t_0}\vartheta^*(s)\,ds\to\vartheta^*(t_0)\quad\text{в } H_0(\Omega)\text{ при } k\to\infty.$$

В итоге получаем

$$\frac{1}{t_0-t_k}\int\limits_{t_k}^{t_0}\vartheta_{N_k}(s)\,ds\to\vartheta^*(t_0)\quad\text{слабо в } H_0(\Omega)\text{ при } k\to\infty.\quad\square$$

Обозначим через B_m шар $\|\vartheta\|_{H_1(\Omega)}\le m$ и будем рассматривать его как компактное метрическое пространство с метрикой $\rho(u,v)=\|u-v\|_{H_0(\Omega)}$. Пусть $C(B_m,\mathbb{R}^1)$ — метрическое пространство, состоящее из всех непрерывных функций $f:B_m\mapsto\mathbb{R}^1$.

Лемма 2.3. *В предположениях теоремы* 1.4 *существуют последовательности* u_N, $t_N \in (-\infty, t_0) \cap \mathscr{D}$, $t_N \to t_0$, *и вероятностная мера* $\mu \in C(B_m, \mathbb{R}^1)^*$ *такие, что* $\operatorname{spt}\mu \subset E(u(t_0))$ *и*

$$\frac{1}{t_0 - t_N} \int\limits_{t_N}^{t_0} f(\bar{\vartheta}_N(s))\, ds \to \int\limits_{B_m} f(\vartheta) d\mu(\vartheta) \quad \text{при } N \to \infty, \tag{2.11}$$

$$\int\limits_{B_m} \langle \psi, \vartheta \rangle d\mu(\vartheta) = \langle \psi, \vartheta^*(t_0) \rangle \quad \text{для любого} \quad \psi \in H_0(\Omega). \tag{2.12}$$

Доказательство. Пусть $t_N \in (-\infty, t_0) \cap \mathscr{D}$, $t_N \to t_0$, — произвольная последовательность. Так как метрическое пространство B_m компактно, то пространство $C(B_m, \mathbb{R}^1)$ сепарабельно, т. е. содержит счетное подмножество $\mathscr{S}$, линейная оболочка которого плотна в $C(B_m, \mathbb{R}^1)$. Следовательно, переходя к подпоследовательности, можем считать, что для любого $f_j \in \mathscr{S}$ существует

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{t_0 - t_N} \int\limits_{t_N}^{t_0} f_j(\bar{\vartheta}_N(s))\, ds \equiv F(f_j).$$

Ясно, что $F : \operatorname{span}\mathscr{S} \mapsto \mathbb{R}^1$ — линейный функционал и $|F(f)| \le \|f\|_{C(B_m,\mathbb{R}^1)}$. Значит, F можно расширить на все пространство $C(B_m, \mathbb{R}^1)$. Легко видеть, что $F(1) = 1$ и $F(f) \ge 0$ для $f \ge 0$. По теореме Рисса функционал F имеет представление

$$F(f) = \int\limits_{B_m} f(\vartheta)\, d\mu(\vartheta), \quad f \in C(B_m, \mathbb{R}),$$

где μ — вероятностная мера, сконцентрированная на B_m, откуда получаем (2.11). Переходя, если нужно, к подпоследовательности и применяя лемму 2.2, заключаем, что (2.12) является следствием (2.11).

Осталось доказать, что $\operatorname{spt}\mu \subset E(u(t_0))$. Покажем сначала, что

$$\sup_{t \in \mathscr{D} \cap (t_N, t_0)} \operatorname{dist}\{\vartheta_N(t), E(u(t_0))\} \to 0 \quad \text{при } N \to \infty. \tag{2.13}$$

Если это не так, то существуют последовательности функций ϑ_{N_k} и чисел $t_k \in \mathscr{D}$ такие, что $t_k \to t_0$ и

$$\|\vartheta_{N_k}(t_k) - \vartheta\|_{H_0(\Omega)} \ge \delta > 0 \quad \text{для любого } \vartheta \in E(u(t_0)),$$

где δ не зависит от k и ϑ. По определению $\vartheta_{N_k}(t_k) = \Theta(u_{N_k}(t_k), \varphi_{N_k}(t_k))$. Так как последовательность $\varphi_{N_k}(t_k)$ ограничена в $H_2(\Omega)$, можем считать, что $\varphi_{N_k}(t_k)$ сходится сильно в $H_1(\Omega)$ к некоторому $\varphi^* \in H_1(\Omega)$. Далее, поскольку функции $u_N : \mathscr{D} \mapsto H_0(\Omega)$ равномерно непрерывны, то имеем сходимость $u_{N_k}(t_k) \to u(t_0)$ в $H_0(\Omega)$. Отсюда и из вышесказанного заключаем, что

$$\Theta(u_{N_k}(t_k), \varphi_{N_k}(t_k)) \to \Theta(u(t_0), \varphi^*) \quad \text{в } H_0(\Omega) \text{ при } k \to \infty.$$

С другой стороны, по определению множества $\mathscr{D}$

$$W(u_{N_k}(t_k), \varphi_{N_k}(t_k)) \to S(u(t_0)) \quad \text{при } k \to \infty$$

для любой последовательности $t_k \to t_0$, $t_k \in \mathscr{D}$. Отсюда $W(u(t_0), \varphi^*) = S(u(t_0))$, т. е. $\varphi^* \in M(u(t_0))$, и, значит, $\Theta(u(t_0), \varphi^*) \in E(u(t_0))$. Следовательно, элементы

$\vartheta_{N_K}(t_k)$ сходятся к $\Theta(u(t_0),\varphi^*)\in E(u(t_0))$, что противоречит нашей гипотезе и доказывает справедливость (2.13).

Далее, допустим, что $\mathrm{spt}\mu\cap(B_m\setminus E(u(t_0)))\neq\varnothing$. Тогда существует неотрицательная непрерывная функция $h: B_m\mapsto\mathbb{R}^1$, равная нулю на $E(u(t_0))$ и такая, что

$$\int\limits_{B_m} h(\vartheta)d\mu(\vartheta)\neq 0. \tag{2.14}$$

Из (2.13) имеем

$$\sup_{t\in\mathscr{D}\cap(t_N,t_0)} h(\vartheta_N(t))\to 0 \quad \text{при } N\to\infty. \tag{2.15}$$

С другой стороны,

$$\int\limits_{B_m} h(\vartheta)\,d\mu(\vartheta)=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{t_0-t_N}\int\limits_{t_N}^{t_0} h(\bar\vartheta_N(s))\,ds.$$

Поскольку $\bar\vartheta_N$ совпадает с ϑ_N на $\mathscr{D}$ и равно нулю вне $\mathscr{D}$, то

$$\int\limits_{B_m} h(\vartheta)\,d\mu(\vartheta)=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{t_0-t_N}\biggl\{\int\limits_{(t_N,t_0)\cap\mathscr{D}} h(\vartheta_N(s))\,ds+h(0)\int\limits_{(t_N,t_0)\setminus\mathscr{D}} ds\biggr\}.$$

Так как по выбору точки t_0

$$\frac{1}{t_0-t_N}\,\mathrm{meas}\{(t_N,t_0)\setminus\mathscr{D}\}\to 0,$$

из этого равенства и из (2.15) заключаем, что

$$\int\limits_{B_m} h(\vartheta)\,d\mu(\vartheta)=0,$$

а это противоречит (2.14). Лемма доказана. $\square$

Лемма 2.4. *Пусть последовательность $\{t_N\}_{N\geq 1}$ удовлетворяет требованиям лемм 2.2, 2.3. Тогда функция $\Pi(\vartheta,\vartheta)$ интегрируема по мере μ и*

$$\liminf_{N\to\infty}\frac{1}{t_0-t_N}\int\limits_{t_N}^{t_0}\Pi(\vartheta_N(s),\vartheta_N(s))\,ds\geq\int\limits_{E(u(t_0))}\Pi(\vartheta,\vartheta)\,d\mu(\vartheta).$$

Доказательство. Обозначим через A самосопряженное расширение оператора $-\Delta$ с областью определения

$$\biggl\{u\in H_2(\Omega):\frac{\partial u}{\partial n}+\lambda u=0 \text{ на } \partial\Omega\biggr\}.$$

Напомним, что его квадратный корень $A^{1/2}$ является положительным самосопряженным оператором с областью определения $H_1(\Omega)$ и

$$\langle A^{1/2}u,A^{1/2}v\rangle=\Pi(u,v) \quad \text{при } u,v\in H_1(\Omega). \tag{2.16}$$

Из (2.16) получаем, что

$$(I+hA)^{-1}A^{1/2}u\to A^{1/2}u \quad \text{в } H_0(\Omega) \text{ при } h\to 0,\ h>0,$$

для любого элемента $u \in H_1(\Omega)$ и

$$\|(I+hA)^{-1}A^{1/2}u\|_{H_0(\Omega)} \le \|A^{1/2}u\|_{H_0(\Omega)}.$$

Отсюда и из положительности оператора $(I+hA)^{-1}$, $h>0$, вытекает, что неравенства

$$\int\limits_{t_N}^{t_0} \Pi(\vartheta_N(t),\vartheta_N(t))\,dt \ge \int\limits_{t_N}^{t_0} \Pi(\bar\vartheta_N(t),\bar\vartheta_N(t))\,dt$$
$$= \int\limits_{t_N}^{t_0} \langle A^{1/2}\bar\vartheta_N(t), A^{1/2}\bar\vartheta_N(t)\rangle\,dt \ge \int\limits_{t_N}^{t_0} \langle (I+hA)^{-1}A^{1/2}\bar\vartheta_N(t), A^{1/2}\bar\vartheta_N(t)\rangle\,dt \quad (2.17)$$

выполняются для любого положительного h. Отображение

$$\vartheta \mapsto \langle (I+hA)^{-1}A^{1/2}\vartheta, A^{1/2}\vartheta\rangle$$

непрерывно в $H_0(\Omega)$. Отсюда и из леммы 2.3 находим, что

$$\frac{1}{t_0-t_N}\int\limits_{t_N}^{t_0} \langle (I+hA)^{-1}A^{1/2}\bar\vartheta_N(t), \bar\vartheta_N(t)\rangle\,dt \to \int\limits_{E(u(t_0))} \langle (I+hA)^{-1}A^{1/2}\vartheta, A^{1/2}\vartheta\rangle\,d\mu(\vartheta)$$

при $N\to\infty$, а это вместе с (2.17) и (2.16) дает неравенство

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{t_0-t_N}\int\limits_{t_N}^{t_0} \Pi(\vartheta_N(t),\vartheta_N(t))\,dt \ge \int\limits_{E(u(t_0))} \langle (I+hA)^{-1}A^{1/2}\vartheta, A^{1/2}\vartheta\rangle\,d\mu(\vartheta).$$

Остается заметить, что поскольку $E(u(t_0))$ ограничено в $H_1(\Omega)$, то непрерывные на $E(u(t_0))$ функции $\langle (I+hA)^{-1}A^{1/2}\vartheta, A^{1/2}\vartheta\rangle$ сходятся при $h\to 0$ в каждой точке $\vartheta \in E(u(t_0)$ к равномерно ограниченной на $E(u(t_0))$ функции $\langle A^{1/2}\vartheta, A^{1/2}\vartheta\rangle = \Pi(\vartheta,\vartheta)$. $\square$

Завершим доказательство теоремы 1.4. Зафиксируем произвольное $\varepsilon>0$ и соответствующее множество $\mathscr{D}$. Выберем точку Лебега $t_0 \in \mathscr{D}$ и последовательность $\{t_k\} \in (-\infty,0)\cap\mathscr{D}$. Согласно условию (c) теоремы 1.4 для любого $k>0$ существует такое N_k, что

$$S(u(t_0)) - S(u(t_k)) \ge \int\limits_{t_k}^{t_0} \Pi(\vartheta_{N_k}(t),\vartheta_{N_k}(t))\,dt - \frac{t_0-t_k}{2^k}. \quad (2.18)$$

Выберем подпоследовательности $\{u_{N_j}\}\subset\{u_{N_k}\}$, $\{t_j\}\subset\{t_k\}$, удовлетворяющие всем требованиям лемм 2.3, 2.4. Из этих лемм и (2.18) следует, что

$$\limsup_{j\to\infty} \frac{1}{t_0-t_j}(S(u(t_0)) - S(u(t_{N_j})))$$
$$\ge \limsup_{j\to\infty} \frac{1}{t_0-t_j}\int\limits_{t_j}^{t_0} \Pi(\vartheta_{N_j}(t),\vartheta_{N_j}(t))\,dt \ge \int\limits_{E(u(t_0))} \Pi(\vartheta,\vartheta)\,d\mu(\vartheta). \quad (2.19)$$

С другой стороны, из леммы 2.1 имеем, что неравенство

$$\limsup_{j\to\infty} \frac{1}{t_0 - t_j}\,(S(u(t_0) - S(u(t_j)) \le \Pi(\psi, \vartheta^*(t_0)) = \int\limits_{E(u(t_0))} \Pi(\psi,\vartheta)\,d\mu(\vartheta)$$

выполняется для любого $\psi \in E(u(t_0))$. Подставляя это соотношение в левую сторону (2.19), получаем неравенство

$$\int\limits_{E(u(t_0))} \Pi(\psi,\vartheta)\,d\mu(\vartheta) \ge \int\limits_{E(u(t_0))} \Pi(\vartheta,\vartheta)\,d\mu(\vartheta). \tag{2.20}$$

Выберем последовательность $\psi_k \in E(u(t_0))$ так, что

$$\|\psi_k\|^2_{H_1(\Omega)} \equiv \Pi(\psi_k,\psi_k) \to \Lambda^2 \equiv \inf_{\vartheta\in E(u(t_0))} \Pi(\vartheta,\vartheta).$$

Так как $E(u(t_0))$ ограничено в $H_1(\Omega)$ и $\partial S(u(t_0))$ является замыканием выпуклой оболочки $E(u(t_0))$, переходя к подпоследовательности, находим, что ψ_k сходится слабо в $H_1(\Omega)$ к некоторому $\vartheta_{\min} \in \partial S(u(t_0))$. Очевидно, что $\Pi(\vartheta_{\min},\vartheta_{\min}) \le \Lambda^2$. Подставляя ψ_k в (2.20) и переходя к пределу, получаем неравенство

$$\int\limits_{E(u(t_0))} \Pi(\vartheta_{\min},\vartheta)\,d\mu(\vartheta) \ge \int\limits_{E(u(t_0))} \Pi(\vartheta,\vartheta)\,d\mu(\vartheta),$$

или

$$\int\limits_{E(u(t_0))} (\Pi(\vartheta_{\min},\vartheta) - \Pi(\vartheta,\vartheta)\ d\mu(\vartheta) \ge 0. \tag{2.21}$$

Так как Π является положительной эрмитовой формой, то

$$\sqrt{\Pi(\vartheta_{\min},\vartheta_{\min})}\sqrt{\Pi(\vartheta,\vartheta)} \ge \Pi(\vartheta_{\min},\vartheta)$$

для любого $\vartheta \in H_1(\Omega)$. Равенство возможно только в случае совпадения $\vartheta_{\min}$ и ϑ с точностью до положительной мультипликативной постоянной. С другой стороны, по доказанному

$$\Lambda = \inf_{\vartheta\in E(u(t_0))} \sqrt{\Pi(\vartheta,\vartheta)} \ge \sqrt{\Pi(\vartheta_{\min},\vartheta_{\min})}.$$

Отсюда и из предыдущего неравенства заключаем, что

$$\Pi(\vartheta_{\min},\vartheta) \le \sqrt{\Pi(\vartheta,\vartheta)} \inf_{\vartheta\in E(u(t_0))} \sqrt{\Pi(\vartheta,\vartheta)} \le \Pi(\vartheta,\vartheta) \tag{2.22}$$

для любого $\vartheta \in E(u(t_0))$. Отметим, что здесь равенство возможно только при $\vartheta = \vartheta_{\min}$. Действительно, если имеет место равенство, то $\vartheta = k\vartheta_{\min}$, $k > 0$. В силу выбора элемента $\vartheta_{\min}$ необходимо $k \ge 1$. Непосредственная подстановка ϑ в последнее неравенство дает $k = 1$. Из (2.22) и (2.21) заключаем, что мера μ сконцентрирована в точке $\vartheta_{\min}$ и $\Pi(\vartheta_{\min},\vartheta_{\min}) = \Lambda^2$. Следовательно, $\|w\text{-}\lim \psi_k\|_{H_1(\Omega)} = \lim \|\psi_k\|_{H_1(\Omega)}$ (здесь w — слабый предел последовательности ψ_k). Получаем, что последовательность $\psi_k \in E(u(t_0))$ сходится сильно в $H_1(\Omega)$ и ее предел $\vartheta_{\min}$ принадлежит множеству $E(u(t_0))$. Так как μ — это мера Дирака, сконцентрированная в точке $\vartheta_{\min}$, то из леммы 2.3 имеем

$$\langle \zeta, \vartheta^*(t_0)\rangle = \int\limits_{E(u(t_0))} \langle \zeta, \vartheta\rangle\,d\mu(\vartheta) = \langle \zeta, \vartheta_{\min}\rangle \quad \text{для любого } \zeta \in H_0(\Omega).$$

Следовательно, $\vartheta^*(t_0) = \vartheta_{\min}$, и теорема доказана. $\square$

3. Доказательство теоремы 1.5

Прежде всего докажем существование последовательности приближенных решений задачи (1.1)–(1.4). Напомним, что они определяются формулами (1.10), причем $u_0 \in H_1(\Omega)$ задано, φ_0 находится как решение вариационной задачи (1.11), а $\vartheta_0 = -u_0 - \varphi_0 \mathbf{e}_1$. Элементы ϑ_n, φ_n для $n \geq 1$ определяются из вариационной задачи

$$\Psi_n(\vartheta_n, \varphi_n) = \min_{\varphi \in H_1(\Omega)} \max_{\vartheta \in H_0(\Omega)} \Psi_n(\vartheta, \varphi), \tag{3.1}$$

а $u_n = U(\vartheta_n, \varphi_n) = -\vartheta_n - \varphi_n \mathbf{e}_1$.

Непосредственное вычисление показывает, что

$$\Psi_n(\vartheta, \varphi) = \int\limits_{\Omega} \left[-\tau \frac{|\nabla \vartheta|^2}{2} - \frac{\vartheta^2}{2} - \vartheta \varphi_1 + \frac{|\nabla \varphi|^2}{2} + \Phi(\varphi) - u_{n-1} \vartheta \right] dx \\ - \frac{\tau \lambda}{2} \int\limits_{\partial\Omega} \vartheta^2 \, ds + \frac{\mu}{2} \int\limits_{\partial\Omega} |\varphi^2| \, ds,$$

где $u_{n-1} = -\vartheta_{n-1} - \varphi_{1,n-1}$.

Очевидно, что функционал Ψ_n вогнут по ϑ и дифференцируем. Следовательно, решение $\tilde{\vartheta}$ задачи

$$\Omega: \quad \tau \Delta \tilde{\vartheta} - \tilde{\vartheta} - \varphi_1 = u_{n-1}, \quad \partial\Omega: \quad \frac{\partial \tilde{\vartheta}}{\partial n} + \lambda \tilde{\vartheta} = 0$$

дает максимум функционала Ψ_n, т. е.

$$\Psi_n(\tilde{\vartheta}, \varphi) = \max_{\vartheta \in H_0(\Omega)} \Psi_n(\vartheta, \varphi).$$

Отметим, что поскольку $\varphi \in H_0(\Omega)$, $u_{n-1} \in H_0(\Omega)$, то $\tilde{\vartheta} = \tilde{\vartheta}(\varphi) \in H_2(\Omega)$.

Рассмотрим теперь функционал

$$\widetilde{\Psi}_n(\varphi) \equiv \Psi_n(\tilde{\vartheta}, \varphi) = \int\limits_{\Omega} \left[-\tau \frac{|\nabla \tilde{\vartheta}|^2}{2} - \frac{\tilde{\vartheta}^2}{2} - \tilde{\vartheta} \varphi_1 + \frac{|\nabla \varphi|^2}{2} + \Phi(\varphi) - u_{n-1} \tilde{\vartheta} \right] dx \\ - \frac{\tau \lambda}{2} \int\limits_{\partial\Omega} \tilde{\vartheta}^2 \, ds + \frac{\mu}{2} \int\limits_{\partial\Omega} |\varphi^2| \, ds.$$

Учитывая вид функции $g(\varphi)$, имеем

$$\widetilde{\Psi}_n \geq c\big(\|\varphi\|^2_{H_1(\Omega)} + \|\varphi\|^3_{L_3} - \|\varphi\|^2_{H_0(\Omega)} \big), \tag{3.2}$$

т. е. $\widetilde{\Psi}_n$ ограничен снизу.

Пусть φ_k — минимизирующая последовательность для $\widetilde{\Psi}_n$,

$$\widetilde{\Psi}_n(\varphi_k) \to \inf_{\varphi \in H_0(\Omega)} \widetilde{\Psi}_n(\varphi) \quad \text{при } k \to \infty.$$

Согласно (3.2) последовательность φ_k ограничена в $H_1(\Omega)$, откуда, переходя к подпоследовательности, получаем, что $\varphi_k \to \varphi^*$ слабо в $H_1(\Omega)$.

Рассмотрим последовательность функций $\tilde{\vartheta}_k$, соответствующих φ_k и удовлетворяющих уравнениям

$$\Omega: \quad \tau \Delta \tilde{\vartheta}_k - \tilde{\vartheta}_k = u_{n-1} + \varphi_{1k}, \quad \partial\Omega: \quad \frac{\partial \tilde{\vartheta}_k}{\partial n} + \lambda \tilde{\vartheta}_k = 0.$$

Так как последовательность функций $u_{n-1}+\varphi_{1k}$ ограничена в $H_0(\Omega)$, последовательность $\tilde\vartheta_k$ ограничена в $H_2(\Omega)$, следовательно, переходя к подпоследовательности, выводим, что $\tilde\vartheta_k\to\tilde\vartheta$ сильно в $H_1(\Omega)$, откуда $\nabla\tilde\vartheta_k\to\nabla\tilde\vartheta$ сильно в $H_0(\Omega)$ и, значит,

$$\widetilde\Psi_n(\varphi^*)\le\liminf_{k\to\infty}\widetilde\Psi_n(\varphi_k).$$

Таким образом, мы доказали существование последовательности приближенных решений задачи (1.1)–(1.4). Далее, докажем следующее предложение об ограниченности приближенных решений.

Предложение 3.1. *Для любого $N\ge 1$ приближенное решение u_N, ϑ_N, φ_N удовлетворяет неравенствам*

$$\sup_{t\in(0,T)}\{-W(u_N(t),\varphi_N(t)\}+\|\varphi_N\|_{L_\infty(0,T;H_2)}\le c,$$

$$\|\vartheta_N\|_{L_\infty(0,T;H_0(\Omega))}+\|\vartheta_N\|_{L_2(0,T;H_1(\Omega)}\le c,$$

где константа c не зависит от N.

Доказательство. Прежде всего отметим, что ϑ_n — критическая точка функционала $\Psi_n(\cdot,\varphi_n)$, удовлетворяющая уравнению $\nabla_\vartheta\Psi(\vartheta_n,\varphi_n)=0$, откуда

$$\tau\Delta\vartheta_n+U(\vartheta_n,\varphi_n)=u_{n-1}.$$

Из последнего равенства и определения Ψ_n заключаем, что

$$\Psi_n(\vartheta_n,\varphi_n)=F(\vartheta_n,\varphi_n)-\langle U(\vartheta_n,\varphi_n),\vartheta_n\rangle+\frac{\tau}{2}\Pi(\vartheta_n,\vartheta_n). \tag{3.3}$$

Обозначим через $\vartheta^*\in H_0(\Omega)$ решение вариационной задачи

$$\Psi_n(\vartheta^*,\varphi_{n-1})=\max_{\vartheta\in H_1(\Omega)}\Psi_n(\vartheta,\varphi_{n-1}).$$

Легко проверить, что элемент ϑ^* служит решением уравнения

$$\tau\Delta\vartheta^*+U(\vartheta^*,\varphi_{n-1})=u_{n-1}, \tag{3.4}$$

тем самым

$$\Psi_n(\vartheta^*,\varphi_{n-1})=F(\vartheta^*,\varphi_{n-1})-\frac12\langle U(\vartheta^*,\varphi_{n-1}),\vartheta^*\rangle-\frac12\langle u_{n-1},\vartheta^*\rangle. \tag{3.5}$$

Заметим, что

$$\Psi_n(\vartheta_n,\varphi_n)=\min_{\varphi\in H_1(\Omega)}\max_{\vartheta\in H_1(\Omega)}\Psi_n(\vartheta,\varphi)\le\max_{\vartheta\in H_1(\Omega)}\Psi_n(\vartheta,\varphi_{n-1})=\Psi_n(\vartheta^*,\varphi_{n-1}).$$

Отсюда, из (3.3) и (3.5) получаем

$$\begin{aligned}F(\vartheta_n,\varphi_n)-F(\vartheta^*,\varphi_{n-1})+\frac{\tau}{2}\Pi(\vartheta_n,\vartheta_n)&\\ \le\langle U(\vartheta_n,\varphi_n),\vartheta_n\rangle-\frac12(\langle U(\vartheta^*,\varphi_{n-1}),\vartheta^*\rangle&+\langle u_{n-1},\vartheta^*\rangle).\end{aligned}$$

Используя выражение $W(u_n,\varphi_n)=\langle U(\vartheta_n,\varphi_n),\vartheta_n\rangle-F(\vartheta_n,\varphi_n)$, перепишем последнее неравенство в виде

$$-W(u_n,\varphi_n)+\frac{\tau}{2}\Pi(\vartheta_n,\vartheta_n)\le F(\vartheta^*,\varphi_{n-1})-\frac12(\langle U(\vartheta^*,\varphi_{n-1}),\vartheta^*\rangle+\langle u_{n-1},\vartheta^*\rangle). \tag{3.6}$$

Далее, так как $F(\vartheta,\varphi)$ выпуклый по ϑ и $U=\nabla_\vartheta F$, то

$$\begin{aligned}F(\vartheta^*,\varphi_{n-1}) &\le F(\vartheta_{n-1},\varphi_{n-1})+\langle U(\vartheta_{n-1},\varphi_{n-1}),\vartheta^*-\vartheta_{n-1}\rangle\\ &= -W(u_{n-1},\vartheta_{n-1})+\langle U(\vartheta_{n-1},\varphi_{n-1}),\vartheta^*\rangle.\end{aligned}$$

Подстановка этого соотношения в правую часть (3.6) дает

$$\begin{aligned}&-W(u_n,\varphi_n)+\frac{\tau}{2}\Pi(\vartheta_n,\vartheta_n)\\ &\qquad\le -W(\vartheta_{n-1},\varphi_{n-1})+\frac{1}{2}(\langle U(\vartheta^*,\varphi_{n-1}),\vartheta^*\rangle-\langle U(\vartheta_{n-1},\varphi_{n-1}),\vartheta^*\rangle).\end{aligned}\tag{3.7}$$

Из уравнения (3.4) и из того, что $u_{n-1}=U(\vartheta_{n-1},\varphi_{n-1})$, имеем

$$\langle U(\vartheta^*,\varphi_{n-1}),\vartheta^*\rangle-\langle U(\vartheta_{n-1},\varphi_{n-1}),\vartheta^*\rangle=-\tau\Pi(\vartheta^*,\vartheta^*)\le 0,$$

откуда, применяя (3.7), получаем

$$-W(u_n,\varphi_n)+\frac{\tau}{2}\Pi(\vartheta_n,\vartheta_n)\le -W(u_{n-1},\varphi_{n-1}).\tag{3.8}$$

Суммируя по n обе части последнего неравенства, заключаем, что

$$\max_{t\in[0,T]}\{-W(u_N(t),\varphi_N(t))\}+\|\vartheta_N\|_{L_2(0,T;H_1(\Omega))}\le c.$$

Отсюда и из вида $W(u)$ имеем неравенство

$$\max_{t\in[0,T]}(\|\varphi_N(t)\|_{H_1(\Omega)}+\|\vartheta_N(t)\|_{H_0(\Omega)})\le c.\tag{3.9}$$

Далее, заметим, что φ_n — критическая точка функционала $F(\vartheta_n,\cdot)$, что вместе с ограниченностью φ в H_2 и оценкой (3.9) дает $\max\limits_{t\in[0,T]}\|\varphi_N(t)\|_{H_2}\le c$. $\square$

Вернемся к доказательству теоремы 1.5. Существование подпоследовательности ϑ_N, удовлетворяющей соотношению (1.13), является следствием оценок предложения 3.1. Докажем (1.14). Обозначим через $H_{-2}(\Omega)$ двойственное пространство к $H_2(\Omega)$. Заметим, что вложение $H_1(\Omega)\subset H_0(\Omega)\subset H_{-2}(\Omega)$ компактно и оператор $-\Delta: H_0(\Omega)\mapsto H_{-2}(\Omega)$ ограничен. Вспомним, что по предложению 3.1 последовательность u_N ограничена в $L_2(0,T;H_1(\Omega))\cap L_\infty(0,T;H_0(\Omega))$. Значит, следуя [8], достаточно показать, что

$$\|u_N-u_N(\cdot-h)\|_{L_2(0,T;H_{-2}(\Omega))}\to 0 \quad \text{при } h\to 0\tag{3.10}$$

равномерно по N. Каждая ступенчатая функция u_N имеет скачок, равный $-\tau\Delta\vartheta_n$, в каждой точке $n\tau$. Поэтому для любой функции $f\in H_2(\Omega)$ имеем

$$\|\langle u_N(t)-u_N(t-h),f\rangle\|\le C\sum_{t-h\le n\tau\le t}\tau|\langle\vartheta_n,-\Delta f\rangle|.$$

Из предложения 3.1 вытекает, что каждое слагаемое в правой части не превышает $C\tau\|f\|_{H_2(\Omega)}$. Значит,

$$\|u_N(t)-u_N(t-h)\|_{H_{-2}(\Omega)}\le C\sum_{t-h\le n\tau\le t}\tau.$$

Отсюда получаем неравенство

$$\|u_N-u_N(\cdot-h)\|_{L_2(0,T;H_{-2}(\Omega))}\le C(h+TN^{-1}).$$

Зафиксируем произвольное $\delta > 0$ и $N_0 > 2CT\delta^{-1}$ и выберем $h_0 < \delta(2C)^{-1}$. Тогда для любого $N > N_0$ и $0 < h < h_0$ имеем

$$\|u_N - u_N(\cdot - h)\|_{L_2(0,T;H_{-2}(\Omega))} \le \delta,$$

откуда следует (3.10).

Докажем теперь, что $W(u_N(t), \varphi_N(t))$ сходится к $S(u_N(t))$ почти всюду на $(0, T)$. Для этого перепишем сначала (1.12) в виде

$$F(\vartheta_N(t), \varphi_N(t)) - \langle u_N(t-\tau), \vartheta_N(t)\rangle - \frac{\tau}{2}\Pi(\vartheta_N(t), \vartheta_N(t)) = \min_{\varphi \in H_1(\Omega)} \max_{\vartheta \in H_0(\Omega)} \Big\{F(\vartheta, \varphi) - \langle u_N(t-\tau), \vartheta\rangle - \frac{\tau}{2}\Pi(\vartheta, \vartheta)\Big\}. \quad (3.11)$$

Вычисления показывают, что для произвольного $\varphi \in H_2$

$$\max_{\vartheta \in H_0(\Omega)} \Big\{F(\vartheta, \varphi) - \langle u_N(t-\tau), \vartheta\rangle - \frac{\tau}{2}\Pi(\vartheta, \vartheta)\Big\} = F(\vartheta_m, \varphi) - \langle u_N(t-\tau), \vartheta_m\rangle - \frac{\tau}{2}\Pi(\vartheta_m, \vartheta_m),$$

где ϑ_m — решение уравнения

$$-\tau\Delta\vartheta_m - U(\vartheta_m, \varphi) = u_N(t-\tau). \quad (3.12)$$

Положим $\Theta_m = \Theta(u_N(t-\tau), \varphi)$. Из определения отображения $\Theta(u, \varphi)$ следует, что $U(\Theta_m, \varphi) = u_N(t-\tau)$. Так как $F(\cdot, \varphi)$ выпуклый и $U = \nabla_\vartheta F$, то

$$F(\vartheta_m, \varphi) \le F(\Theta_m, \varphi) + \langle U(\Theta_m, \varphi), \vartheta_m - \Theta_m\rangle,$$

что вместе с равенством $U(\Theta_m, \varphi) = u_N(t-\tau)$ дает

$$F(\vartheta_m, \varphi) - \langle u_N(t-\tau), \vartheta_m\rangle - \frac{\tau}{2}\Pi(\vartheta_m, \vartheta_m) \le F(\Theta_m, \varphi) - \langle u_N(t-\tau), \Theta_m\rangle.$$

Подставляя это неравенство в правую сторону (3.11), имеем

$$F(\vartheta_N(t), \varphi_N(t)) - \langle u_N(t-\tau), \vartheta_N(t)\rangle - \frac{\tau}{2}\Pi(\vartheta_N(t), \vartheta_N(t)) \le F(\Theta_m, \varphi) - \langle u_N(t-\tau), \Theta_m\rangle.$$

Легко видеть, что

$$F(\vartheta_N, \varphi_N) - \langle u_N, \vartheta_N\rangle = -W(u_N, \varphi_N),$$

$$F(\Theta_m, \varphi) - \langle u_N(\cdot - \tau), \Theta_m\rangle = -W(u_N(\cdot - \tau, \varphi).$$

Отсюда и из предыдущего неравенства получаем

$$-W(u_N(t), \varphi_N(t)) \le -W(u_N(t-\tau), \varphi) + R_N(t), \quad (3.13)$$

где остаточный член

$$R_N(t) = \langle u_N(t-\tau) - u_N(t), \vartheta_N(t)\rangle + \frac{\tau}{2}\Pi(\vartheta_N(t), \vartheta_N(t))$$

не зависит от φ. Более того, так как $\tau = TN^{-1} \to 0$ и $u_N(t) \to u(t)$ в $H_0(\Omega)$, то

$$\int_0^T |R_N(t)|\,dt \to 0 \quad \text{при} \quad N \to \infty. \quad (3.14)$$

Используя теорему существования измеримого селектора, выберем ограниченное измеримое отображение $\varphi : (0,T) \mapsto H_2$ такое, что $\varphi(t) \in M(u(t))$ для почти всех $t \in (0,T)$. Тогда $S(u(t)) = W(u(t), \varphi(t))$. Поскольку $W(u,\varphi)$ — непрерывная функция, определенная на $H_0(\Omega) \times H_1(\Omega)$, то $W(u_N(t-\tau), \varphi(t-\tau)) \to S(u(t))$ при $N \to \infty$ почти всюду на $(0,T)$. Далее, заметим, что

$$|S(u(t)) - W(u_N(t), \varphi_N(t))| \le S(u_N(t)) - W(u_N(t), \varphi_N(t)) + |S(u_N(t)) - S(u(t))|.$$

Отсюда и из (3.13) имеем

$$\begin{aligned}|S(u(t)) - W(u_N(t), \varphi_N(t))| \le S(u_N(t)) - W(u_N(t-\tau), \varphi(t-\tau)) + R_N(t) \\ + |S(u_N(t)) - S(u(t))| \to 0 \quad \text{при} \quad N \to \infty\end{aligned}$$

для почти каждого $t \in (0,T)$, что и доказывает сходимость $W(u_N(t), \varphi_N(t))$ к $S(u_N(t))$ почти всюду на $(0,T)$.

Покажем, что $\vartheta^*(t) \in \partial S(u(t))$. Из теоремы Мазура следует существование такой последовательности λ_i^N, $N \le i \le M(N)$, $0 \le \lambda_i^N$, $\sum\limits_i \lambda_i^N = 1$, что

$$\Big\|\sum_i \lambda_i^N \vartheta_i - \vartheta^*\Big\|_{L_2(0,T;H_1(\Omega))} \to 0 \quad \text{при } N \to \infty.$$

Переходя к подпоследовательности, имеем

$$\Big\|\sum_i \lambda_i^N \vartheta_i(t) - \vartheta^*(t)\Big\|_{H_1(\Omega)} \to 0 \quad \text{при } N \to \infty, \tag{3.15}$$

$$\|u_N(t) - u(t)\|_{H_1(\Omega)} \to 0, \quad W(u_N(t), \varphi_N(t)) \to S(u(t)) \quad \text{при } N \to \infty \tag{3.16}$$

для почти каждого $t \in (0,T)$. Докажем, что в таком случае

$$\operatorname{dist}\{\vartheta_N(t), E(u(t))\} \equiv \inf_{\vartheta \in E(u(t))} \|\vartheta_N(t) - \vartheta\|_{H_0(\Omega)} \to 0 \quad \text{при } N \to \infty. \tag{3.17}$$

Предположим обратное, т. е. пусть существуют подпоследовательность N_k и $\delta > 0$, такие, что

$$\operatorname{dist}\{\vartheta_{N_k}(t), E(u(t))\} > \delta > 0. \tag{3.18}$$

Так как последовательность $\varphi_{N_k}(t)$ ограничена в $H_2(\Omega)$, переходя к подпоследовательности, получим $\varphi_{N_k}(t) \to \varphi^*$ в $H_1(\Omega)$ при $k \to \infty$. Отсюда заключаем, что

$$\begin{aligned}\Theta(u_{N_k}(t), \varphi_{N_k}(t)) \to \Theta(u(t), \varphi^*) \quad \text{в} \quad H_0(\Omega),\\ W(u_{N_k}(t), \varphi_{N_k}(t)) \to W(u(t), \varphi^*) \quad \text{при } k \to \infty.\end{aligned}$$

Следовательно, применяя (3.16), имеем $W(u(t), \varphi^*) = S(u(t))$ и $\Theta(u(t), \varphi^*) \in E(u(t))$, что противоречит нашему предположению и доказывает справедливость (3.17).

Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ существуют N_ε и последовательность $\Theta_N \in E(u(t))$ такие, что неравенство $\|\vartheta_N(t) - \Theta_N\|_{H_0(\Omega)} \le \varepsilon$ выполняется для любого $N > N_\varepsilon$. Значит, для любого $N > N_\varepsilon$

$$\Big\|\sum_i \lambda_i^N \vartheta_i(t) - \Theta^N\Big\|_{H_1(\Omega)} \le \varepsilon, \quad \text{где} \quad \Theta^N = \sum_i \lambda_i^N \Theta_i.$$

Заметим, что $\Theta^N \in \mathrm{co}E(u(t)) = \partial S(u(t))$. Отсюда и из предыдущего неравенства выводим, что

$$\operatorname{dist}\Big\{\sum_i \lambda_i^N \vartheta_i(t), \partial S(u(t))\Big\} \to 0 \quad \text{при} \quad N \to \infty.$$

Поскольку выпуклое множество $\partial S(u(t))$ замкнуто в $H_0(\Omega)$, то $\vartheta^*(t) \in \partial S(u(t))$.

Итак, осталось показать, что ϑ_N и u удовлетворяют неравенству диссипации энергии (1.15). Прежде всего отметим, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\limsup_{N\to\infty}\int\limits_{t_1+\varepsilon}^{t_2-\varepsilon}\Pi(\vartheta_N(t),\vartheta_N(t))\,dt = \limsup_{N\to\infty}\int\limits_{t_1}^{t_2}\Pi(\vartheta_N(t),\vartheta_N(t))\,dt. \tag{3.19}$$

Для доказательства этого равенства заметим, что функция

$$G(t_1,t_2) = \limsup_{N\to\infty}\int\limits_{t_1}^{t_2}\Pi(\vartheta_N(t),\vartheta_N(t))\,dt$$

монотонна в треугольнике $\Delta = \{0 \le t_1 \le t_2 \le T\}$, а значит, монотонна на любом сегменте $I_\lambda = \{t_1 + t_2 = \lambda\} \cap \Delta$. Следовательно, равенство

$$\lim_{\varepsilon\to 0} G(t_1+\varepsilon, t_2-\varepsilon) = G(t_1,t_2)$$

выполняется для всех $(t_1,t_2) \in I_\lambda$, за исключением, быть может, некоторого счетного множества, т. е. выполняется почти всюду в Δ, откуда следует (3.19). Далее, из (3.8) имеем

$$W(u_N(n\tau),\varphi_N(n\tau)) - W(u_N(m\tau),\varphi_N(m\tau)) \ge \int\limits_{(m+1)\tau}^{n\tau}\Pi(\vartheta_N(t),\vartheta_N(t))\,dt$$

для любых $0 < m\tau < n\tau < T$. Таким образом,

$$\begin{aligned} W(u_N(t_2),\varphi_N(t_2)) - W(u_N(t_1),\varphi_N(t_1)) - \int\limits_{t_1}^{t_2}\Pi(\vartheta_N(t),\vartheta_N(t))\,dt \\ \ge \left(\int\limits_{(m-1)\tau}^{m\tau} + \int\limits_{n\tau}^{(n+1)\tau}\right)\Pi(\vartheta_N(t),\vartheta_N(t))\,dt, \end{aligned}$$

где $t_1 \in [(m-1)\tau, m\tau]$, $t_2 \in [n\tau,(n+1)\tau]$. Следовательно,

$$W(u_N(t_2),\varphi_N(t_2)) - W(u_N(t_1),\varphi_N(t_1)) \ge \int\limits_{t_1+\tau}^{t_2-\tau}\Pi(\vartheta_N(t),\vartheta_N(t))\,dt.$$

Отсюда, используя (3.19), заключаем, что

$$\begin{aligned} S(u(t_2)) - S(u(t_1)) &= \lim_{N\to\infty}(W(u_N(t_2),\varphi_N(t_2)) - W(u_N(t_1),\varphi_N(t_1))) \\ &\ge \lim_{\tau\to 0}\limsup_{N\to\infty}\int\limits_{t_1+\tau}^{t_2-\tau}\Pi(\vartheta_N(t),\vartheta_N(t))\,dt = \limsup_{N\to\infty}\int\limits_{t_1}^{t_2}\Pi(\vartheta_N(t),\vartheta_N(t))\,dt. \end{aligned}$$

Теорема доказана. □

ЛИТЕРАТУРА

1. *Luckhaus S.* Solutions of the two-phase Stefan problem with the Gibbs — Thomson law for the melting temperature // European J. Appl. Math. 1990. V. 1, N 2. P. 101–111.
2. *Visintin A.* Models of phase transitions. Boston: Birkhauser-Verl., 1996.
3. *Plotnikov P. I, Starovoitov V. N.* The Stefan problem with surface tension as the limit of a phase field model // Differential Equations. 1993. V. 29, N 3. P. 395–404.
4. *Schätzle R.* An approximation of the Stefan problem with the Gibbs — Thomson law by using functionals of the Landau — Ginsburg theory as free energy. Sonderforschungsbereich 256. Bonn, 1994. (Preprint; 339).
5. *Schätzle R.* The quasistationary phase field equations with Neumann boundary conditions // J. Differential Equations. 2000. V. 162, N 2. P. 473–503.
6. *Clarke F. H.* Optimization and nonsmooth analysis. New York; Chichester; Brisban; Singapore; Toronto: John Wiley and Sons, 1983.
7. *Варга Дж.* Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977.
8. *Simon J.* Compact sets in the space $L^p(0, T; B)$ // Ann. Mat. Pura Appl. (4). 1987. V. 146. P. 65–96.

Статья поступила 13 декабря 2000 г.

Плотников Павел Игоревич
Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск 630090
plotnikov@hydro.nsc.ru

Клепачёва Анастасия Валерьевна
Новосибирский гос. университет, Новосибирск 630090
kle@narod.ru