Сибирский математический журнал
Июль—август, 2001. Том 42, № 4

УДК 517.518.36

МАТРИЧНО–МНОГОЧЛЕННАЯ СТРУКТУРА В КОНЕЧНОМЕРНОМ ЛИНЕЙНОМ ВЕКТОРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Ю. И. Кузнецов

Аннотация: Классическая интерпретация матрицы — представление оператора в фиксированной координатной системе. Для симметричной матрицы это также представление квадратичной формы. В данной статье представлена новая концепция, состоящая в том, что рассматриваемые совместно (i) строго невырожденная матрица, (ii) неразложимые нижняя и верхняя матрицы Хессенберга и (iii) две системы специальных многочленов характеризуют различные аспекты некоторого объекта, лежащего вне пространства $\mathbb{R}^n$, и такая характеристика носит взаимно однозначный характер. Например, если элемент (ii) есть якобиева матрица с неотрицательным спектром, то этим объектом является идеальная колебательная система с n степенями свободы. Библиогр. 8.

В линейной алгебре широко используются те или иные интерпретации матриц. Так, класс подобных матриц рассматривается как представление во всевозможных координатных системах пространства $\mathbb{R}^n$ некоторого абстрактного линейного оператора [1]. Аналогично класс конгруентных симметричных матриц является представлением в $\mathbb{R}^n$ некоторой абстрактной квадратичной формы. В данной статье развивается новая концепция, состоящая в том, что рассматриваемые совместно (i) строго невырожденная матрица, (ii) неразложимые нижняя и верхняя матрицы Хессенберга и (iii) две системы специальных многочленов, характеризуют те или иные стороны некоторого объекта, не входящего в пространство $\mathbb{R}^n$, и такая характеристика носит взаимно однозначный характер. Например, если в качестве неразложимой матрицы Хессенберга взята якобиева матрица с неотрицательным спектром, то этим объектом является идеальная колебательная система с n степенями свободы [2].

В ряде предыдущих работ [3–6] исследованы случаи, связанные с положительно определенной, в частности, ганкелевой матрицей A. В данной работе снимается условие положительной определенности (что важно, например, в случае псевдоортогональных многочленов [7]) и даже симметричности матрицы. Кроме того, получен ряд новых соотношений, детализирующих взаимосвязь всех трех элементов (i)–(iii), совокупность которых названа Rn-структурой. Задача, обратная рассмотренной в [2], изучена в [8].

Введение

В отношении строк и столбцов некоторой матрицы будем придерживаться следующих правил: $B_{\bullet k} = Be_k$, $B_{l\bullet} = e_l^T B$, где e_k есть k-й столбец единичной матрицы E, обозначают k-й столбец и l-ю строку матрицы B. В то же время B_k обозначает усеченную подматрицу k-го порядка матрицы B, получающуюся при отбрасывании строк и столбцов с номерами, большими k. Под вектором $\bar{b}$ понимается вектор, составленный из первых компонент вектора b, а размерность его определяется из контекста.

Пусть $\mathscr{R} = (\mathbf{r}_{ij})$ — невырожденная верхняя треугольная матрица. Как показано в [4], ей соответствует неразложимая верхняя матрица Хессенберга

$$\mathscr{T} = \begin{bmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \cdots & & \tau_{1n} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} & \cdots & \tau_{2n} \\ & \tau_{32} & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \tau_{n-1,n} \\ & & & \tau_{n,n-1} & \tau_{nn} \end{bmatrix}$$

с произвольным последним столбцом. Матрица $\mathscr{T}$ следующим образом связывает соседние столбцы матрицы $\mathscr{R}$:

$$\mathscr{R}_{\bullet k+1} = \mathscr{T}\mathscr{R}_{\bullet k} = \mathbf{r}_{11}\mathscr{T}^k e_1, \quad k = 0(1)n \tag{1}$$

(соотношение при $k = n$ включает уже окаймление матрицы R, и вместо $\mathscr{R}_{\bullet n+1}$ следует читать $\overline{\mathscr{R}}_{\bullet n+1}$), а ее элементы находятся рекуррентно:

$$\tau_{lk} = \frac{\mathbf{r}_{l,k+1}}{\mathbf{r}_{kk}} - \sum_{j=m}^{k-1} \frac{\mathbf{r}_{jk}}{\mathbf{r}_{kk}}\tau_{lj}, \quad l = 1(1)k+1, \ k = 1(1)n, \quad m = \max(l-1, 1). \tag{2}$$

В частности,

$$\begin{gathered} \tau_{k+1,k} = \frac{\mathbf{r}_{k+1,k+1}}{\mathbf{r}_{kk}}, \quad \tau_{k,k} = \frac{\mathbf{r}_{k,k+1}}{\mathbf{r}_{kk}} - \frac{\mathbf{r}_{k-1,k}}{\mathbf{r}_{k-1,k-1}}, \\ \tau_{k,k-1}\tau_{k-1,k} = \frac{\mathbf{r}_{k-1,k+1}}{\mathbf{r}_{k-1,k-1}} - \frac{\mathbf{r}_{k-1,k}}{\mathbf{r}_{k-1,k-1}}\tau_{k-1,k-1} - \frac{\mathbf{r}_{k-2,k}}{\mathbf{r}_{k-2,k-2}}, \quad k = 1(1)n-1. \end{gathered} \tag{3}$$

Первые $n-1$ столбцов $\mathscr{T}$ линейно независимы и определены однозначно. Последний столбец произволен и может быть выбран так, что спектр матрицы $\mathscr{T}$ наперед задан. Это можно сделать следующим образом. Пусть

$$\pi_n(x) = x^n - \sum_{j=1}^{n} p_{n-j+1}x^{j-1}$$

является характеристическим многочленом матрицы $\mathscr{T}$ и $\mathscr{P} = (p_n, \dots, p_1)^T$. Рассмотрим равенство (1) при $k = n$ и вектор $\mathscr{R}_{\bullet n+1}$, окаймляющий матрицу $\mathscr{R}$, подставим в (2) при $k = n$. Благодаря тождеству Кели — Гамильтона получим [4]

$$\mathscr{P} = \mathscr{R}^{-1}\mathscr{T}\mathscr{R}_{\bullet n}, \tag{4}$$

$$\mathscr{T}_{\bullet n} = \frac{1}{\mathbf{r}_{nn}}\left(\mathscr{R}\mathscr{P} - \sum_{j=1}^{n-1}\mathbf{r}_{jn}\mathscr{T}_{\bullet j}\right). \tag{5}$$

Произвольным невырожденным нижней и верхней треугольным матрицам L и R через треугольное разложение ставится в соответствие строго невырожденная матрица $A = LR$. Если A симметрична ($L^T = DR$, где D — диагональная матрица), то ей соответствует фактически одна матрица Хессенберга.

В дальнейшем нам понадобится выражение элементов матриц L и R через окаймленные миноры матрицы A, поэтому введем окаймленную матрицу

$$A_k(m,l) = \begin{bmatrix} A_{k-1} & \overline{A}_{\bullet l} \\ \overline{A}_{m\bullet} & a_{ml} \end{bmatrix}$$

порядка k, где A_{k-1} — усеченная матрица порядка $k-1$ и $A_k(k,k) = A_k$. Как известно [1],

$$A = LDU, \tag{6}$$

где $L = (l_{ij})$, $U = (u_{ij})$, $i,j = 1(1)n$, $D = \operatorname{diag}(d_1, \dots, d_n)$ суть нижняя и верхняя треугольные матрицы соответственно, D диагональная, с элементами

$$l_{ij} = |A_j(i,j)|, \quad d_i = 1/(|A_{i-1}|\,|A_i|),\ |A_0| = 1, \quad u_{ij} = |A_i(i,j)|. \tag{7}$$

Разложение (6) неединственно, однако существует инвариант

$$l_{kk}d_k u_{kk} = |A_k|/|A_{k-1}|, \quad k = 1(1)n. \tag{8}$$

В частности, если A симметрична ($L^T = U$), то при $\varepsilon_k = \operatorname{sign}(|A_k|/|A_{k-1}|)$, $\mathscr{E} = \operatorname{diag}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ и $R = (\mathscr{E}D)^{1/2}U$ имеем разложение

$$A = R^T \mathscr{E} R. \tag{9}$$

Аналогичную окаймленным минорам роль играют вложенные миноры, т. е. определители матриц вида

$$A_{k-1}[i,j] = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1k} \\ \dots & & \dots & \dots & & \dots \\ a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,k} \\ a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,k} \\ \dots & & \dots & \dots & & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{k,j-1} & a_{k,j+1} & \dots & a_{kk} \end{bmatrix}, \quad i,j = 1(1)k.$$

Это матрица минора, дополнительного к элементу a_{ij} в матрице A_k. В разложении (6) применим операцию обращения матриц:

$$A^{-1} = U^* D L^*, \tag{10}$$

где

$$U^* = U^{-1}D^{-1} = (u^*_{ij}), \quad L^* = D^{-1}L^{-1} = (l^*_{ij}).$$

Имеет место [3] следующее представление элементов треугольных матриц через определители матриц $A_{k-1}[i,j]$.

Теорема. *Для треугольного разложения* (10) *строго невырожденной матрицы* A^{-1} *справедливы соотношения*

$$l^*_{ij} = (-1)^{i+j}|A_{i-1}[j,i]|, \quad i \ge j, \quad u^*_{ij} = (-1)^{i+j}|A_{j-1}[j,i]|, \quad j \ge i. \tag{11}$$

К этому надо добавить, что в случае, если матрица $A = \mathscr{R}^T\mathscr{R}$ является ганкелевой положительно определенной, матрица Хессенберга $\mathscr{T}$ с точностью до последнего столбца является симметричной [4].

Все эти сведения нам понадобятся в дальнейшем.

2. Система многочленов

Непосредственно связь матрицы A с многочленами устанавливает следующая, вытекающая из (11)

Теорема 1. *Элементы k-го столбца матрицы U^* и k-й строки матрицы L^* представляют собой коэффициенты многочленов $(k-1)$-го порядка $U^*_{k-1}(x)$ и $L^*_{k-1}(x)$ соответственно, вычисляемых по формулам*

$$U^*_{k-1}(x)=\sum_{i=1}^{k}u^*_{ik}x^{i-1}=\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+k}|A_{k-1}[k,i]|x^{i-1}=\begin{vmatrix}A_{k-1} & \overline{A}_{\bullet k}\\ 1\dots x^{k-2} & x^{k-1}\end{vmatrix},$$

$$L^*_{k-1}(x)=\sum_{i=1}^{k}l^*_{ki}x^{i-1}=\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+k}|A_{k-1}[i,k]|x^{i-1}=\begin{vmatrix} & 1\\ A_{k-1} & \dots\\ & x^{k-2}\\ \overline{A}_{k\bullet} & x^{k-1}\end{vmatrix}.$$

Коэффициенты при старших членах этих многочленов равны $|A_{k-1}|$. За счет изменения нормировки матриц в треугольном разложении нормировка многочленов $U^*_{k-1}(x)$, $L^*_{k-1}(x)$ может быть изменена.

Итак, k-й столбец матрицы $U^*=U^{-1}D^{-1}$ (k-я строка $L^*=D^{-1}L^{-1}$) состоит из коэффициентов разложения многочлена $U^*_{k-1}(x)$ $\big(L^*_{k-1}(x)\big)$ по степеням x.

В качестве примера рассмотрим невырожденную матрицу Вандермонда

$$V=\begin{bmatrix}1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1}\\ 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-1}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1}\end{bmatrix}$$

как элемент (i) Rn-структуры. Введем узловые многочлены

$$\pi_k(x)=\prod_{i=1}^{k}(x-x_i)=\sum_{i=1}^{k}c_{k,k-i}x^i,\quad \varphi_l^{(k)}(x)=\frac{\pi_k(x)}{x-x_l},\quad l=1(1)k,\ k=1(1)n,$$

и рассмотрим треугольные разложения матриц V и V^{-1} [3, 6]: $V=ZW$, где $Z=(z_{ij})$, $W=(w_{ij})$, $i,j=1(1)n$, — нижняя и верхняя треугольные матрицы соответственно, причем

$$w_{ij}=\sum_{l=1}^{i}\frac{x_l^{j-1}}{\varphi_l^{(i)}(x_l)},\quad z_{ji}=\pi_{i-1}(x_j);$$

и $V^{-1}=W^{-1}Z^{-1}$, где элементы матриц $Z^{-1}=(z^\star_{ij})$ и $W^{-1}=(w^\star_{ij})$, $i,j=1(1)n$, даются соотношениями

$$z^\star_{jl}=\frac{1}{\varphi_l^{(j)}(x_l)},\quad l=1(1)j,\quad w^\star_{ij}=c_{j-1,j-i},\quad i=1(1)j,$$

соответственно.

Для верхней треугольной матрицы W (элемент w_{ij} которой есть разделенная разность $(i-1)$-го порядка функции x^{j-1} на узлах $x_1,\dots,x_i$) матрица Хессенберга имеет вид [3] (последний столбец может быть и другим)

$$\mathscr{T}=\begin{bmatrix}x_1 & & & & \\ 1 & x_2 & & & \\ & 1 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & x_n\end{bmatrix},$$

а W^{-1} определяет узловые многочлены $\pi_k(x)$, $k = 0(1)n-1$.

Применим теперь теорему 1 к симметричной матрице A.

Следствие 1. *Для симметричной матрицы имеется аналог представления* (7). *Полагая в* (10) $P = U^*(\mathscr{E}D)^{1/2}$ *и* $\mathscr{E} = \operatorname{diag}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$, *приходим к разложению*

$$A^{-1} = P\mathscr{E}P^T. \tag{12}$$

Если $P = \left(p_{i-1}^{j-1}\right)$, $i = 1(1)j$, $j = 1(1)n$, *то*

$$p_{i-1}^{j-1} = (-1)^{i+j}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_j|A_{j-1}|\,|A_j|}}|A_{j-1}[j,i]|, \quad j \geq i, \ \varepsilon_j = \operatorname{sign}(|A_j|/|A_{j-1}|). \tag{13}$$

Следствие 2. *Элементы k-го столбца матрицы P представляют собой коэффициенты многочлена $p_{k-1}(x)$ порядка $k-1$, вычисляемого по формуле*

$$\begin{aligned} p_{k-1}(x) = \sum_{i=0}^{k-1} p_i^{k-1}x^i &= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_k|A_{k-1}|\,|A_k|}}\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+k}|A_{k-1}[k,i]|x^{i-1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_k|A_{k-1}|\,|A_k|}}\begin{vmatrix} A_{k-1} & \overline{A}_{\bullet k} \\ 1 \dots x^{k-2} & x^{k-1}\end{vmatrix}. \end{aligned} \tag{14}$$

3. Диагональное преобразование подобия

Неединственность треугольного разложения матрицы A сказывается на нормировке соответствующих многочленов и порождает семейство матриц Хессенберга. Это семейство представляет собой класс подобных матриц, как утверждает следующая

Теорема 2. *Пусть столбцы некоторой невырожденной треугольной матрицы $\mathscr{R}$ порождаются неразложимой матрицей Хессенберга $\mathscr{T}$ согласно соотношениям* (1). *Тогда для любой невырожденной диагональной матрицы D имеют место соотношения $R_{\bullet k+1} = TR_{\bullet k}$, $k = 1(1)n-1$, где $T = D\mathscr{T}D^{-1} = (t_{ij})$ — неразложимая хессенбергова и $R = D\mathscr{R}$ — невырожденная треугольные матрицы. В этом преобразовании существуют две группы инвариантов, т. е. не зависящих от D тождеств: $t_{kk} = \tau_{kk}$, $t_{k,k-1}t_{k-1,k} = \tau_{k,k-1}\tau_{k-1,k}$.*

Доказательство. Матрица R, очевидно, невырожденна и треугольна, поэтому существует некоторая матрица Хессенберга T, для которой

$$R_{\bullet k+1} = TR_{\bullet k}, \quad k = 1(1)n-1.$$

В то же время при тех же значениях k по условию теоремы $\mathscr{R}_{\bullet k+1} = \mathscr{T}\mathscr{R}_{\bullet k}$. А так как $R_{\bullet l} = D\mathscr{R}_{\bullet l}$, то $\mathscr{R}_{\bullet k+1} = D^{-1}TD\mathscr{R}_{\bullet k} = \mathscr{T}\mathscr{R}_{\bullet k}$ или, обозначая $U = D^{-1}TD - \mathscr{T}$, получим

$$U\mathscr{R}_{\bullet k} = \sum_{j=1}^{k}\mathbf{r}_{jk}U_{\bullet j} = 0, \quad k = 1(1)n-1.$$

При $k = 1$ находим, что $U_{\bullet 1} = 0$. По индукции из условия $U_{\bullet j} = 0$, $j = 1(1)k-1$, находим $U_{\bullet k} = 0$, $k = 1(1)n-1$. Но последний столбец матрицы T произволен и его выберем из условия $U_{\bullet n} = 0$. Следовательно, матрица U равна нулю, что совпадает с первым утверждением теоремы. Последнее утверждение теоремы представляет собой очевидное следствие матричного перемножения $D^{-1}TD$. $\square$

4. Собственная проблема матрицы $\mathscr{T}$

Представим матрицу $\mathscr{R}$, используя для этого выражение (1):

$$\mathscr{R} = \sum_{k=1}^{n-1} \mathscr{T}^{k-1} \mathscr{R}_{\bullet 1} e_k^T + \mathscr{R}_{\bullet n} e_n^T,$$

умножим ее слева на $\mathscr{T}$, после чего исключим последнее слагаемое с помощью (4):

$$\mathscr{T}\mathscr{R} = \sum_{k=1}^{n-1} \mathscr{T}^{k} \mathscr{R}_{\bullet 1} e_k^T + \mathscr{R}\mathscr{P} e_n^T.$$

Вновь применив тождество Кели — Гамильтона, найдем представление матрицы Хессенберга в форме Фробениуса:

$$\mathscr{T}\mathscr{R} = \mathscr{R}F, \tag{16}$$

где $F = \sum\limits_{k=1}^{n-1} e_{k+1} e_k^T + \mathscr{P} e_n$ — матрица Фробениуса. Матрица F, как легко видеть, обладает тем свойством, что если $\pi(x_i) = 0$, то x_i — ее собственное число, а $v(x_i) = (1, x_i, \dots, x_i^{n-1})$ — соответствующий ему левый собственный вектор. Положим $P = \mathscr{R}^{-1}$. Имеет место

Лемма 1. *Справедливы соотношения*

$$P\mathscr{T} = FP, \tag{17}$$

$$v(x_i)P\mathscr{T} = x_i v(x_i)P. \tag{18}$$

Возьмем теперь разложение строго невырожденной матрицы A, $A = LDU$, с матрицей D, не обязательно подчиненной условиям (7), и рассмотрим окаймление матрицы

$$\begin{bmatrix} A & \overline{A}_{\bullet n+1} \\ \overline{A}_{n+1\bullet} & a_{n+1,n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} LD & 0 \\ lD & \lambda d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U & u \\ 0 & \rho \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} LDU & LDu \\ lDU & d\lambda\rho + lDu \end{bmatrix}.$$

Применительно к матрицам U и T_U, а также L и T_L в обозначениях данного контекста соотношения (1) при $k = n$ будут иметь вид $u = T_U U_{\bullet n} = UP$, $l = L_{n\bullet} T_L = P^T L$, если при этом учесть равенство (4). Поэтому

$$\overline{A}_{\bullet n+1} = LDu = AP, \quad \overline{A}_{n+1\bullet} = P^T A.$$

Теорема 3. *Для строго невырожденной матрицы A характеристический многочлен связанных с ней неразложимых матриц Хессенберга T_U и T_L, если выбрать для них одинаковые характеристические многочлены, имеет вид*

$$\pi(x) = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} A & AP \\ v^T(x) & x^n \end{bmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} A & v(x) \\ P^T A & x^n \end{bmatrix}, \tag{19}$$

$v(x) = (1, x, \dots, x^{n-1})^T$. *Каждому собственному числу независимо от кратности соответствует по одному собственному вектору для обоих матриц: левый $v^T(x_i)P_U$ для матрицы T_U и правый $P_L v(x_i)$ для матрицы T_L, причем $P_U U = P_L L = E$.*

Доказательство. Справедливость (19) устанавливается простым раскрытием определителя по строке (в первом случае) или по столбцу (во втором). При этом нужно только учесть свойство умножения матрицы на вектор, например $AP = \sum_{i=1}^{n} p_j A_{\bullet n-j+1}$. Утверждения относительно собственных векторов следуют из неразложимости матриц Хессенберга, а также из соотношений (18). $\square$

Совокупность представленных выше доказательств обосновывает и еще один важный в смысле постановки прямых и обратных задач результат.

Теорема 4. *Для задания элементов Rn-структуры достаточно определить один из них.*

Это очевидно. Если дана матрица A, то через ее треугольное разложение $A = LR$ находятся и матрицы Хессенберга T_L, T_R, и системы многочленов $p_k^{(L)}(x)$, $p_k^{(R)}(x)$, $k = 0(1)n-1$. Если известны $T^{(L)}$, $T^{(R)}$ (достаточно без последнего столбца), то находим треугольные матрицы

$$L = l_{11} \sum_{k=1}^{n} e_k e_1^T T_L^{k-1}, \quad R = r_{11} \sum_{k=1}^{n} T_R^{k-1} e_1 e_k^T$$

и вслед за ними матрицу A. Наконец, если имеем системы многочленов $p_k^{(L)}(x)$ и $p_k^{(R)}(x)$, $k = 0(1)n-1$, то из их коэффициентов составляем матрицы L^{-1} и R^{-1}, после чего можно определить A.

В случае симметричной матрицы A задача упрощается.

5. Строго невырожденная симметричная матрица

Если матрица положительно определена, то ей соответствует треугольная матрица, определяемая разложением $A = R^T R$. Но для строго невырожденной симметричной матрицы согласно разложению (9) кроме матрицы R следует учитывать также и диагональную матрицу $\mathscr{E}$. Помимо (9) удобно пользоваться следующей его модификацией:

$$A = \widetilde{R}^T \widetilde{D} \widetilde{R}, \tag{20}$$

где $\widetilde{D} = \operatorname{diag}(\tilde{d}_1, \dots, \tilde{d}_n)$, $\widetilde{R} = (\tilde{r}_{ij})$, $i, j = 1(1)n$, — верхняя единичная треугольная матрица,

$$\tilde{d}_i = |A_i|/|A_{i-1}|, \quad \tilde{r}_{ij} = |A_i(i,j)|/|A_i|. \tag{21}$$

Так как матрицы R и $\widetilde{R}$ связаны отношением

$$R = (\widetilde{D}\mathscr{E})^{1/2} \widetilde{R}, \tag{22}$$

$\mathscr{E} = \operatorname{diag}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$, $\varepsilon_i = \operatorname{sign} \tilde{d}_i$, то по теореме 3 находим связь матриц Хессенберга:

$$T = (D\mathscr{E})^{1/2} \widetilde{T} (\widetilde{D}\mathscr{E})^{-1/2}, \tag{23}$$

и $\widetilde{T} = (\tilde{t}_{ij})$, $i, j = 1(1)n$, отвечающих треугольным разложениям (9) и (20) соответственно.

Разумеется, как для пары T, R, так и для пары $\widetilde{T}$, $\widetilde{R}$ справедливы с точностью до обозначений соотношения (1)–(3). Например, в силу (22), (23) матрицы $\widetilde{T}$ и $\widetilde{R}$ связаны соотношениями

$$\widetilde{R}_{\bullet k+1} = \widetilde{T} \widetilde{R}_{\bullet k} = \widetilde{T}^k \widetilde{R}_{\bullet 1}, \quad k = 0(1)n-1, \tag{24}$$

или

$$\tilde{t}_{jk} = \tilde{r}_{j,k+1} - \sum_{i=m}^{k-1} \tilde{r}_{ik}\tilde{t}_{ji}, \quad j = 1(1)k+1,\ k = 1(1)n-1,\ m = \max(j-1,1), \tag{25}$$

и, в частности,

$$\begin{gathered} \tilde{t}_{k+1,k} = 1, \quad \tilde{t}_{k,k} = \tilde{r}_{k,k+1} - \tilde{r}_{k-1,k}, \\ \tilde{t}_{k-1,k} = \tilde{r}_{k-1,k+1} - \tilde{r}_{k-2,k} - \tilde{r}_{k-1,k}\tilde{t}_{k-1,k-1}, \quad k = 1(1)n-1. \end{gathered} \tag{26}$$

Перейдем теперь к основной задаче этого раздела — выразим элементы матрицы $\widetilde{R}$ через окаймленные миноры матрицы A, для чего введем матрицу $\widetilde{D}^+ = \mathrm{diag}(\tilde{d}_1^+, \dots, \tilde{d}_n^+)$ равенством

$$\widetilde{D} = \widetilde{D}^+ \mathscr{E}.$$

Из всевозможных матриц $\mathscr{E}$ (их общее число равно 2^n) одна является единичной, причем ей соответствует положительно определенная матрица $A^+ = \widetilde{R}^T \widetilde{D}^+ \widetilde{R}$ в семействе 2^n матриц $A = \widetilde{R}^T \widetilde{D} \widetilde{R}$. И через элементы треугольного разложения A^+ могут быть выражены все окаймленные миноры матриц A этого семейства.

Лемма 2. *Для симметричной строго невырожденной матрицы A и ее разложений* (9) *и* (20) *имеют место соотношения*

$$\widetilde{D} = \mathscr{E}\widetilde{D}^+, \quad \widetilde{R} = \widetilde{R}^+, \quad R = R^+.$$

Доказательство. Первое равенство — это просто определение $\widetilde{D}^+$. Далее, так как в разложении (20) $\tilde{r}_{ii} = 1$, $i = 1(1)n$, должны выполняться равенства

$$|A_i(i,j)| = |\widetilde{R}_i^T|\,|\widetilde{D}_i|\,|\widetilde{R}_i(ij)| = |\mathscr{E}_i|\,|\widetilde{R}_i^T|\,|\widetilde{D}_i^+|\,|\widetilde{R}_i(ij)| = |\mathscr{E}_i|\,|A_i^+(i,j)|.$$

Это означает, что в разложении (6) с $L = U^T$

$$u_{ij} = |A_i(ij)| = |\mathscr{E}_i| u_{ij}^+,$$

следовательно,

$$\tilde{r}_{ij} = \frac{u_{ij}}{|A_i|} = \frac{|u_{ij}^+|}{|A_i^+|} = \tilde{r}_{ij}^+.$$

Этим обосновывается второе равенство. Очевидно и третье равенство, поскольку из сопоставления разложений $A = R^T \mathscr{E} R = \widetilde{R}^T \widetilde{D} \widetilde{R}$ следует $R = (\widetilde{D}^+)^{1/2}\widetilde{R} = (\widetilde{D}^+)^{1/2}\widetilde{R}^+ = R^+$. $\square$

6. Ганкелева *Rn*-структура

Rn-структуру с ганкелевой матрицей $A = (a_{ij})$, $a_{ij} = a_{i+j-2}$, будем называть *ганкелевой Rn*-структурой. Применим к общему случаю строго невырожденной матрицы технику, использованную в [3, 4].

Теорема 5. *В ганкелевой Rn-структуре матрица Хессенберга $\widetilde{T}$, соответствующая разложению (20), является трехдиагональной и имеет вид*

$$\widetilde{T} = \begin{bmatrix} b_1 & g_1 & & \\ 1 & b_2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & g_{n-1} \\ & & 1 & b_n \end{bmatrix}$$

с элементами

$$b_j = r_{j,j+1} - r_{j-1,j},\ j = 1(1)n, \quad g_j = \frac{|A_{j-1}|\,|A_{j+1}|}{|A_j|^2},\ j = 1(1)n-1. \tag{27}$$

Доказательство. Рассуждения основаны на двух соотношениях [3, 4]:

1) тождестве Фробениуса для ганкелевой матрицы в форме

$$|A_{l-1}(l,k)| = u_{l-1,k+1} + |A_{l-1}|\frac{u_{l-2,l-1}u_{l-1,k} - u_{l-2,k}|A_{l-1}|}{|A_{l-2}|\,|A_{l-1}|}; \tag{28}$$

2) тождестве Сильвестра в форме

$$|A_{l-2}|u_{lk} = |A_{l-1}|\,|A_{l-1}(l,k)| - u_{l,l-1}u_{l-1,k} \tag{29}$$

(здесь учтено, что если в определителе $|A_l|$ заменим l-й столбец на k-й, то получим u_{lk}). Исключая из обеих тождеств определитель $|A_{l-1}(l,k)|$ и учитывая симметричность матрицы A, приходим к следующему базовому выражению:

$$\frac{u_{l-1,k+1}}{|A_{l-1}|} = \frac{u_{l-2,k}}{|A_{l-2}|} + \frac{u_{l-1,k}}{|A_{l-1}|}\left(\frac{u_{l-1,l}}{|A_{l-1}|} - \frac{u_{l-2,l-1}}{|A_{l-2}|}\right) + \frac{|A_{l-2}|u_{lk}}{|A_{l-1}|^2},$$

или в силу (16)

$$\tilde{r}_{l-1,k+1} = \tilde{r}_{l-2,k} + \tilde{r}_{l-1,k}\big(\tilde{r}_{l-1,l} - \tilde{r}_{l-2,l-1}\big) + \frac{|A_{l-2}|\,|A_l|}{|A_{l-1}|^2}\tilde{r}_{lk}. \tag{30}$$

Беря последнее выражение при $l = k$ и подставляя его в третье уравнение системы (26) (учитывая и другие уравнения этой системы), находим

$$\tilde{t}_{k-1,k} = \frac{|A_{k-2}|\,|A_k|}{|A_{k-1}|^2}.$$

Вместе с первым и вторым уравнениями (26) это составляет утверждение (27).

Остается доказать, что $\tilde{t}_{j-1,k} = 0$ при $j < k$, т. е. трехдиагональность матрицы T. Берем два равенства: (30), которое запишем в виде

$$\tilde{r}_{l-1,k+1} = \sum_{i=l-2}^{l} \tilde{r}_{ik}\tilde{t}_{l-1,i},$$

и (25), которое запишем в виде

$$\tilde{r}_{l-1,k+1} = \sum_{i=l-2}^{k} \tilde{r}_{ik}\tilde{t}_{l-1,i};$$

вместе они приводят к соотношениям

$$\sum_{i=l+1}^{k} \tilde{r}_{ik}\tilde{t}_{l-1,i} = 0. \tag{31}$$

При $l = k-1$ находим $\tilde{t}_{k-2,k} = 0$ для $k = 3(1)n$. Таким образом, нижним пределом в (31) становится $l+2$. Повышая нижний предел до k, по индукции доказываем, что из $\tilde{t}_{k-j,k} = 0$ следует $\tilde{t}_{k-j-1,k} = 0$. При доказательстве учтено, что матрица $\widetilde{T}$ определена с точностью до последнего столбца. □

Теперь рассмотрим матрицу T, связанную с соотношением (9).

Определение. Матрицу B будем называть *симметричной по модулю*, если она обладает свойством $|b_{ij}| = |b_{ji}|$.

Следствие. *Для строго невырожденной ганкелевой матрицы A с разложением* (9) *матрица T является симметричной по модулю, т. е.*

$$T = \begin{bmatrix} b_1 & a_1\varepsilon_1\varepsilon_2 & & \\ a_1 & b_2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & a_{n-1}\varepsilon_{n-1}\varepsilon_n \\ & & a_{n-1} & b_n \end{bmatrix},$$

где

$$a_j = \sqrt{\frac{\mathrm{abs}(|A_{j-1}|\,|A_{j+1}|)}{|A_j|^2}}.$$

Легко убедиться в том, что для симметричной по модулю матрицы выполняется равенство $T^T = \mathscr{E}T\mathscr{E}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1966.
2. *Гантмахер Ф. Р., Крейн М. Г.* Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем. М.; Л.: ГИТТЛ, 1950.
3. *Ильин В. П., Кузнецов Ю. И.* Алгебраические основы численного анализа. Новосибирск: Наука, 1986.
4. *Кузнецов Ю. И.* Связь положительно определенных матриц и матриц Хессенберга // Сиб. мат. журн. 1986. Т. 27, № 2. С. 84–90.
5. *Кузнецов Ю. И.* О свойствах матрицы Хессенберга // Сиб. мат. журн. 1987. Т. 28, № 6. С. 148.
6. *Кузнецов Ю. И.* Элементы анализа на конечном множестве точек. Новосибирск: ВЦ СО РАН, 1994.
7. *Кузнецов Ю. И.* Системы псевдоортогональных многочленов. Новосибирск, 1996. (Препринт / ВЦ СО РАН; 1068).
8. *Кузнецов Ю. И.* Гамильтонова форма якобиевых матриц // Сиб. журн. вычисл. математики. 2000. Т. 3, № 2. С. 159–164.

Статья поступила 9 октября 1999 г.

Кузнецов Юрий Иванович
Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск 630090
kuzn@ommfao.sscc.ru