Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2001. Том 42, № 5

УДК 517.555+517.547+517.988

ОПТИМАЛЬНАЯ ПОГРЕШНОСТЬ АНАЛИТИЧЕСКОГО ПРОДОЛЖЕНИЯ С КОНЕЧНОГО МНОЖЕСТВА ПО НЕТОЧНЫМ ДАННЫМ В ГИЛЬБЕРТОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

Л. С. Маергойз, А. М. Федотов

Аннотация: Рассматривается задача аналитического продолжения по неточным данным с конечного подмножества U области D пространства $\mathbb{C}^n$ в точку $z_0 \in D \setminus U$ функции f из $H(D)$, принадлежащей ограниченному множеству корректности V. Здесь $H(D)$ — гильбертово пространство функций, аналитических в D. Для случая, когда $H(D)$ — гильбертово пространство с воспроизводящим ядром, найдены конструктивные формулы для вычисления *оптимальной погрешности, оптимального линейного алгоритма* экстраполяции в точку z_0 функций множества $V = \{f \in H(D) : \|f\| \leq r\}$ $(r > 0)$, чьи приближенные значения заданы на множестве U, и *экстремальной функции.* Кроме того, исследуется асимптотика оптимальной погрешности, когда ошибки при получении исходных данных стремятся к 0. Библиогр. 20.

Вопросам экстраполяции аналитических функций с заданного множества посвящена обширная литература (см., например, [1]). В данной работе изучается следующий аспект этого направления исследований.

Пусть D — область в $\mathbb{C}^n$; $U = \{z_1, \dots, z_N\}$ — множество ее различных точек; $z_0 \in D \setminus U$; $H(D)$ — гильбертово пространство функций, аналитических в D. Рассматривается задача аналитического продолжения в точку z_0 с конечного множества U функции f из $H(D)$, принадлежащей ограниченному множеству корректности V. При этом предполагается, что значения $\{f(z_j)\}_1^N$ функции f известны с некоторой ошибкой, причем связанный с ее приближенными значениями

$$f_j = f(z_j) + \zeta_j, \quad j = 1, \dots, N, \tag{1}$$

вектор ошибок $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_N)$ удовлетворяет условию: для каждой функции $f \in V$ он может быть любым элементом множества $S_\delta = \{\zeta \in \mathbb{C}^N : |\zeta| \leq \delta\}$, где $|\zeta|^2 = \sum\limits_{j=1}^{N} |\zeta_j|^2$, $\delta > 0$ — фиксированное число. В связи с тем, что для любой точки $z \in D$ выражение

$$\Phi_z(f) := f(z), \quad f \in H(D), \tag{2}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 00–15–96140).

— линейный функционал, для решения задачи аналитического продолжения с множества U в точку z_0 можно применить известные методы оптимального восстановления линейных функционалов. При этом для вычисления погрешности восстановления достаточно использовать линейные алгоритмы (см., например, [2, с. 360; 3; 4, с. 40; 5, с. 13]).

Для решения упомянутой задачи выбран подход к оценке погрешности линейного функционала по неточным данным, подобный разработанному в статье [6, с. 56] алгоритму, названному в ней *методом наименьших квадратов.* В случае $V = \{f \in H(D) : \|f\| \le r\}$, где $r > 0$, $H(D)$ — гильбертово пространство с воспроизводящим ядром (ГПВЯ), т. е. такое, в котором функционал Φ_z (см. (2)) является непрерывным линейным функционалом при любом $z \in D$, найдены конструктивные формулы для вычисления *оптимальной погрешности, оптимального линейного алгоритма* экстраполяции в точку z_0 функций множества V, чьи приближенные значения заданы на множестве U, и *экстремальной функции.* Структура этих формул оказалась значительно более простой, чем при традиционном подходе к оценке линейных функционалов по неточным данным (см. [3; 4, с. 40]). Кроме того, исследуется асимптотика оптимальной погрешности, когда ошибки при получении исходных данных стремятся к 0. Изложение в работе опирается на детерминированную модель ошибок.

Данная статья непосредственно примыкает к работам [7–9], где в аналогичной ситуации исследовался случай *точных данных*, а также к работам [10–12], где при решении близких вопросов рассматривалась вероятностная модель ошибок. Некоторые специальные вопросы аналитического продолжения с конечного множества изучались в [13, 14].

Авторы искренне признательны академику М. М. Лаврентьеву, а также профессорам С. В. Кислякову и В. И. Васюнину за ценные замечания, связанные с результатами этой работы.

§ 1. Два способа определения оптимальной погрешности аналитического продолжения по неточным данным

Дадим описание двух подходов к определению оптимальной погрешности аналитического продолжения по неточным данным с конечного множества $U = \{z_1, \dots, z_N\} \subset D$ в точку $z_0 \in D \setminus U$ функций пространства $H(D)$, где D — область в пространстве $\mathbb{C}^n$.

1. Два подхода к оптимальному восстановлению линейных функционалов. Пусть H — комплексное линейное пространство; $V \subset H$; $x_0 = x_0(\varphi)$, $\varphi \in H$ — линейный функционал, который требуется оценить на множестве V исходя из заданных приближенных значений

$$\tilde{x_j}(\varphi) = x_j(\varphi) + \zeta_j, \quad j = 1, \dots, N, \ \varphi \in V, \ |\zeta| \le \delta,$$

линейных функционалов $\{x_j\}_1^N$, причем вектор ошибок $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_N)$ удовлетворяет указанному во введении условию. Здесь $\delta > 0$ — фиксированное число.

Если для простоты изложения ограничиться линейными алгоритмами приближения, то при традиционном подходе (см., например, [1, с. 360]) *погрешность оптимального восстановления* функционала x_0 можно определить с помощью величины

$$a_N(x_0; \delta) = \inf\{a_N(x_0; \alpha; \delta) : \alpha \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}\}, \tag{3}$$

где

$$a_N(z_0;\alpha;\delta) = \sup\left\{\left|x_0(\varphi) - \sum_{j=1}^{N} \alpha_j[x_j(\varphi)+\zeta_j]\right| : \varphi \in V,\ |\zeta| \le \delta\right\}. \tag{4}$$

Для дальнейших исследований более удобным оказывается другое определение этой погрешности. Идея подхода к ее определению близка к *методу наименьших квадратов*, предложенному в [6] (см. также [10–12]). Ассоциируем с линейными функционалами $x_j, j = 1,\dots,N$, соответственно отображения

$$X_j : H \to \mathbb{C}^2, \quad X_j(\varphi) = (x_j(\varphi), \zeta_j), \quad \varphi \in H,$$

где $\zeta_j = \zeta_j(\varphi) \in \mathbb{C}$ — ошибка в вычислении функционала $x_j(\varphi)$, причем (см. (1)) вектор ошибок $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_N)$ подчиняется описанному во введении условию. Поскольку требуется оценить на множестве V *точные* значения функционала x_0, то ему сопоставим функционал $X_0(\varphi) = (x_0(\varphi), 0), \varphi \in H$. *Погрешность оптимального восстановления* функционала x_0 определим теперь так:

$$\omega_N(x_0;\delta) = \inf\{Q_N(x_0;\alpha;\delta) : \alpha \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}\}, \tag{5}$$

где

$$Q_N^2(x_0;\alpha;\delta) = \sup\left\{\left|X_0(\varphi) - \sum_{j=1}^{N} \alpha_j X_j(\varphi)\right|_2^2 : \varphi \in V,\ |\zeta| \le \delta\right\}, \tag{6}$$

а $|\cdot|_2$ — евклидова норма в $\mathbb{C}^2$, т. е.

$$\left|X_0(\varphi) - \sum_{j=1}^{N} \alpha_j X_j(\varphi)\right|_2^2 = \left|x_0(\varphi) - \sum_{j=1}^{N} \alpha_j x_j(\varphi)\right|^2 + \left|\sum_{j=1}^{N} \alpha_j \zeta_j\right|^2.$$

Покажем, что величины $a_N(x_0;\delta)$, $\omega_N(x_0;\delta)$ тесно связаны между собой и имеют одинаковый порядок точности измерения погрешности восстановления функционала x_0.

Теорема 1. *Функционалы $a_N(x_0;\alpha;\delta)$ и $Q_N(x_0;\alpha;\delta)$, определяемые соответственно формулами* (4), (6), *удовлетворяют соотношению*

$$a_N(x_0;\alpha;\delta) = \sqrt{Q_N^2(x_0;\alpha;\delta) - \delta^2|\alpha|^2} + \delta|\alpha| \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}^n. \tag{7}$$

◀ Для любого комплексного числа B, не зависящего от ζ, справедливы следующие формулы, вытекающие из неравенства Коши — Буняковского:

$$|B| + \delta|\alpha| = \max_{|\zeta|\le\delta}\left|B - \sum_{j=1}^{N} \alpha_j\zeta_j\right|, \quad |B|^2 + \delta^2|\alpha|^2 = |B|^2 + \max_{|\zeta|\le\delta}\left|\sum_{j=1}^{N} \alpha_j\zeta_j\right|^2,$$

причем в обоих случаях максимум достигается в точке ζ с координатами

$$\zeta_j = -\delta\overline{\alpha_j}\exp\{i\arg B\}/|\alpha|, \quad j = 1,\dots,N.$$

Отсюда и из (4), (6), учитывая, что для любой вещественной функции $F(x,y)$ от двух аргументов $x \in X$, $y \in Y$ выполняется соотношение

$$\sup\{F(x,y) : x \in X,\ y \in Y\} = \sup_{x\in X}\sup_{y\in Y} F(x,y),$$

заключаем

$$a_N(x_0;\alpha;\delta)=\sup_{\varphi\in V}|B|+\delta|\alpha|;\quad Q_N^2(x_0;\alpha;\delta)=\sup_{\varphi\in V}|B|^2+\delta^2|\alpha|^2, \tag{8}$$

где

$$B=B(\varphi):=\left|x_0(\varphi)-\sum_{j=1}^{N}\alpha_j x_j(\varphi)\right|.$$

Теперь из соотношения (8) непосредственно убеждаемся в справедливости формулы (7). ►

2. Два функционала, измеряющие погрешность аналитического продолжения. Опираясь на формулу (1) и изложенные в п. 1 понятия погрешности оптимального восстановления линейного функционала (см. (3)–(6)), можно определить (в обозначениях введения) двумя способами *оптимальную погрешность* экстраполяции в точку z_0 аналитических функций пространства $H(D)$, заданных на множестве V. Во-первых, с помощью функционала (см. (3)–(4))

$$A_N(z_0;\delta)=\inf\{A_N(z_0;\alpha;\delta):\alpha\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}\}, \tag{9}$$

где

$$A_N(z_0;\alpha;\delta)=\sup\left\{\left|f(z_0)-\sum_{j=1}^{N}\alpha_j[f(z_j)+\zeta_j]\right|:f\in V,|\zeta|\le\delta\right\}. \tag{10}$$

Для получения в дальнейшем конструктивных результатов оказывается удобным рассмотреть *оптимальную погрешность* в другом определении, используя формулы (5), (6):

$$\Omega_N(z_0;\delta)=\inf\{E_N(z_0;\alpha;\delta):\alpha\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}\}, \tag{11}$$

где

$$E_N^2(z_0;\alpha;\delta)=\sup\left\{\left|f(z_0)-\sum_{j=1}^{N}\alpha_j f(z_j)\right|^2+\left|\sum_{j=1}^{N}\alpha_j\zeta_j\right|^2:f\in V,\ |\zeta|\le\delta\right\}. \tag{12}$$

Если при некоторых $\alpha=\tilde\alpha$, $\alpha=\alpha*$ выполняются соответственно условия

$$A_N(z_0;\delta)=A_N(z_0;\tilde\alpha;\delta),\quad \Omega_N(z_0;\delta)=E_N(z_0;\alpha^*;\delta),$$

то отображения (см. (1))

$$\widetilde{w}:=\widetilde{w}(f)=\sum_{j=1}^{N}\tilde\alpha_j f(z_j),\quad w^*:=w^*(f)=\sum_{j=1}^{N}\alpha_j^* f(z_j),\quad f\in V,$$

называются *оптимальными линейными алгоритмами.*

При любом фиксированном элементе $f\in V$ прогнозируемое значение $w_0=f(z_0)$ находится в круге радиуса $A_N(z_0;\delta)$ с центром в точке $\widetilde{w}$. Однако при получении конструктивных формул для определения погрешности $A_N(z_0;\delta)$ и алгоритма $\widetilde{w}$ возникают трудности, которые сравнительно легко преодолеваются при решении подобной задачи для погрешности $\Omega_N(z_0;\delta)$.

Из теоремы 1 вытекает справедливость следующей формулы, выражающей зависимость величин $A_N(z_0;\delta)$, $\Omega_N(z_0;\delta)$ между собой.

Теорема 1′. *Функционалы* $A_N(z_0;\alpha;\delta)$ *и* $E_N(z_0;\alpha;\delta)$, *определяемые соответственно формулами* (10), (12), *удовлетворяют соотношению*

$$A_N(z_0;\alpha;\delta) = \sqrt{E_N^2(z_0;\alpha;\delta) - \delta^2|\alpha|^2} + \delta|\alpha| \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}^n. \tag{13}$$

Следствие (ср. [6, лемма 3]). *Верно неравенство*

$$\Omega_N(z_0;\delta) \le A_N(z_0;\delta) \le \sqrt{2}\Omega_N(z_0;\delta),$$

где $A_N(z_0;\delta), \Omega_N(z_0;\delta)$ — *определяемые формулами* (9), (11) *оптимальные погрешности аналитического продолжения в точку* z_0 *функций множества* V.

Пусть α^* — точка минимума функционала $E_N(z_0;\alpha;\delta)$ по переменной $\alpha \in \mathbb{C}^n$; $w_1 = \sum\limits_{j=1}^{N} \alpha_j^* f(z_j)$ (см. (1)) — приближенное значение оптимального линейного алгоритма w^* для определения погрешности $\Omega_N(z_0;\delta)$. Из формулы Коши — Буняковского следует, что величина w_1 задана с ошибкой, не превосходящей числа $\delta|\alpha^*|$. Тогда из формул (10), (13) имеем: для любой функции $f \in V$ прогнозируемое значение $w_0 = f(z_0)$ находится в круге радиуса

$$R = R(f) \le A_N(z_0;\alpha^*;\delta) = \sqrt{\Omega_N^2(z_0;\delta) - \delta^2|\alpha^*|^2} + \delta|\alpha^*|$$

с центром в точке w_1. В этом состоит геометрический смысл погрешности $\Omega_N(z_0;\delta)$.

3. Оптимальная погрешность аналитического продолжения в ГПВЯ. При изложении результатов п. 2 не использовалась топологическая структура пространства $H(D)$. Исследуем теперь свойства оптимальной погрешности аналитического продолжения при дополнительных условиях

$$V = \{f \in H(D) : \|f\| \le r\},\ r > 0,$$

$H(D)$ — ГПВЯ. В этом случае по известной теореме при любом $z \in D$ функционал $\Phi_z(f)$ (см. (2)) допускает представление

$$\Phi_z(f) := f(z) = (K_z, f), \quad f \in H(D),$$

где $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение, $K_z \in H(D)$,

$$K(z,w) := K_z(w), \quad z, w \in D, \tag{14}$$

— воспроизводящее ядро, обладающее свойством (см. [15, с. 343])

$$K(z,w) = \overline{K(w,z)}, \quad z, w \in D.$$

Тогда (см. (14))

$$f(z_j) = (q_j, f),\ f \in H(D), \quad j = 0,1,\dots,N;\ q_j = K(z_j,\cdot). \tag{15}$$

Поэтому верно соотношение

$$T(f,\alpha) := f(z_0) - \sum_{j=1}^{N} \alpha_j f(z_j) = (G_\alpha, f), \quad G_\alpha = q_0 - \sum_{j=1}^{N} \alpha_j q_j.$$

Применяя теперь известное неравенство для элементов гильбертова пространства $|(u,v)| \le \|u\| \cdot \|v\|$, переходящее в равенство лишь при $v = \lambda u$, $\lambda \in \mathbb{C}$, если $u \ne 0$ (см. [16, с. 13]), находим

$$B_\alpha := \sup_{f \in V} |T(f,\alpha)| = r\|G_\alpha\|.$$

При этом *экстремальная функция* f_α, т. е. функция, обладающая свойством $B_\alpha = |T(f_\alpha,\alpha)|$, имеет вид $f_\alpha = re^{i\theta}G_\alpha/\|G_\alpha\|$, где $\theta \in \mathbb{R}$ — любое фиксированное число. Отсюда и из формул (10), (12) после элементарных преобразований убеждаемся в том, что справедлива

Теорема 2. *Пусть* $V = \{f \in H(D) : \|f\| \le r\}$, *где* $r > 0, H(D)$ — ГПВЯ. *Тогда функционалы* $A_N(z_0;\alpha;\delta)$, $E_N(z_0;\alpha;\delta)$ *допускают представление*

$$A_N(z_0;\alpha;\delta) = |B_\alpha| + \delta|\alpha|, \quad E_N^2(z_0;\alpha;\delta) = |B_\alpha|^2 + \delta^2|\alpha|^2, \tag{16}$$

где

$$B_\alpha := \sup_{f\in V} |T(f,\alpha)| = r\|G_\alpha\|, \quad T(f,\alpha) := (G_\alpha, f), \quad G_\alpha = q_0 - \sum_{j=1}^{N} \alpha_j q_j, \tag{17}$$

а $\{q_j : j = 0,1,\dots,N\}$ — *элементы* $H(D)$, *определяемые формулой* (15). *При этом существует функция* $f_\alpha \in V$ *такая, что* $B_\alpha = |T(f_\alpha,\alpha)|$ *и* (см. (17))

$$f_\alpha = re^{i\theta} G_\alpha/\|G_\alpha\|, \quad \theta \in \mathbb{R}. \tag{18}$$

§ 2. Вычисление оптимальной погрешности аналитического продолжения по неточным данным в ГПВЯ

Опираясь на описанный в § 1 второй подход к оценке погрешности аналитического продолжения с конечного множества по неточным данным, исследуем вопросы оптимального восстановления аналитических функций в ГПВЯ.

1. Конструктивные формулы параметров экстраполяции с конечного множества в ГПВЯ. Пусть $H(D)$ — ГПВЯ. Используя второй подход к оценке погрешности аналитического продолжения, найдем формулы для определения оптимальной погрешности, оптимального линейного алгоритма, экстремальной функции.

Пусть $V = \{f \in H(D) : \|f\| \le r\}$. Рассмотрим вопрос об оценке аналитического продолжения по неточным данным функций из множества $U = \{z_1,\dots,z_N\} \subset D$ в точку $z_0 \in D \setminus U$, полагая, что вектор ошибок $\zeta = (\zeta_1,\zeta_2,\dots,\zeta_N)$ удовлетворяет условию: для каждого элемента $\varphi \in V$ он может быть любым элементом множества $S_\delta = \{\zeta \in \mathbb{C}^N : |\zeta| \le \delta\}$, где $|\zeta|^2 = \sum\limits_{j=1}^{N} |\zeta_j|^2$. Здесь D — область в пространстве $\mathbb{C}^n$; r, $\delta > 0$ — фиксированные числа. Следующий результат является обобщением известных результатов, леммы 1 и теоремы 1 в [9], посвященных решению аналогичной задачи в случае точных данных (см. также [4, с. 37–38]).

Теорема 3. *Пусть в обозначениях равенства* (15) $q_m = K(z_m,\cdot)$, $m = 0,1,\dots,N$, *где* $K(z,\cdot)$, $z \in D$, — *воспроизводящее ядро;* $q_{jk} = (q_j,q_k) = K(z_j,z_k)$, $j,k = 0,1,\dots,N$; $\Gamma(q_1,\dots,q_N)$ — *определитель Грама матрицы* $\Gamma = \|q_{jk}\|$ *размера* $N\times N$; $R_\varepsilon = (\Gamma+\varepsilon E)^{-1}$; $\varepsilon = (\delta/r)^2$; E — *единичная матрица* $N\times N$; $R_\varepsilon{}'$ — *транспонированная матрица для матрицы* R_ε. *Тогда*

1) *существует значение*

$$\alpha = \alpha^* = R'_\varepsilon \overline{Q}_0, \quad Q_0 = \begin{pmatrix} q_{10} \\ \vdots \\ q_{N0} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^N, \tag{19}$$

где $\overline{Q}_0$ — *вектор, координаты которого комплексно сопряжены соответствующим координатам вектора* Q_0, *такое, что в обозначениях равенств* (11), (12)

$\Omega_N(z_0;\delta) = E_N(z_0;\alpha^*;\delta)$, *и существует оптимальный линейный алгоритм* w^*, *задаваемый формулой*

$$w^* = w^*(f) = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j^* f(z_j), \quad f \in V; \tag{20}$$

2) *для определяемой соотношениями* (11), (12) *оптимальной погрешности аналитического продолжения в точку* $z_0 \in D \setminus U$ *функций множества* V *по их неточным данным на* $U = \{z_1, \dots, z_N\} \subset D$, *удовлетворяющих упомянутым выше ограничениям, в обозначениях формулы* (19) *верно равенство*

$$[\Omega_N(z_0;\delta)]^2 = r^2\left(\|q_0\|^2 - \sum_{j=1}^{N} \alpha_j^* q_{j0}\right) = r^2(\|q_0\|^2 - \langle R_\varepsilon Q_0, Q_0\rangle), \tag{21}$$

где $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — *эрмитово скалярное произведение в* $\mathbb{C}^N$: $\langle w,\zeta\rangle = \sum\limits_{j=1}^{N} w_j\bar{\zeta}_j$, $w,\zeta \in \mathbb{C}^N$.

3) *найдется экстремальная функция* $f^* \in V$, *обладающая свойством* (см. (21)) $\Omega_N^2(z_0;\delta) = |f^*(z_0) - w^*(f^*)|^2 + \delta^2|\alpha^*|^2$ *и задаваемая соотношением*

$$f^* = re^{i\theta} G_\alpha^*/\|G_\alpha^*\|, \quad G_\alpha^* = q_0 - \sum_{j=1}^{N} \alpha_j^* q_j, \quad \theta \in \mathbb{R}. \tag{22}$$

◀ Рассмотрим функцию $\Phi(\alpha) = E_N^2(z_0;\alpha;\delta)$, $\alpha \in \mathbb{C}^N$. Из теоремы 2 вытекает, что эта функция допускает следующее представление (в обозначениях формул (16), (17) и теоремы 3):

$$\Phi(\alpha) = r^2\left[\|q_0\|^2 - \sum_{j=1}^{N} \alpha_j q_{j0} - \sum_{j=1}^{N} \bar{\alpha}_j q_{0j}\right] + Q(\alpha), \quad \alpha \in \mathbb{C}^N, \tag{23}$$

где

$$Q(\alpha) = r^2 \sum_{j,k=1}^{N} \alpha_j \bar{\alpha}_k q_{jk} + \delta^2|\alpha|^2 \tag{24}$$

— положительно определенная эрмитова форма [15, с. 344]. Поэтому система уравнений

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\bar{\alpha}_k} = r^2 \sum_{j=1}^{N} \alpha_j q_{jk} + \delta^2\alpha_k - r^2 q_{0k} = 0, \quad k = 1, \dots, N, \tag{25}$$

имеет единственное решение $\alpha = \alpha^*$, определяемое формулой (19), являющееся точкой минимума положительной функции $\Phi(\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{C}^N$. Следовательно, в обозначениях формулы (11) имеем $\Omega_N^2(z_0;\delta) = \Phi(\alpha^*)$. Но форма $Q(\alpha)$ (см. (23), (24)) допускает представление:

$$Q(\alpha) = \sum_{k=1}^{N} \bar{\alpha}_k \frac{\partial\Phi}{\partial\bar{\alpha}_k} + r^2 \sum_{k=1}^{N} q_{0k}\bar{\alpha}_k, \quad \alpha \in \mathbb{C}^n.$$

Отсюда, учитывая соотношения (25), (23), (19), убеждаемся в справедливости равенства

$$[\Omega_N(z_0;\delta)]^2 = r^2[\,\|q_0\|^2 - Q_0 R'_\varepsilon \overline{Q}_0].$$

Но R_ε — эрмитова матрица, которая является самосопряженным оператором в $\mathbb{C}^N$. Поэтому

$$Q_0 {R_\varepsilon}' \overline{Q_0} = \langle Q_0, R_\varepsilon Q_0 \rangle = \langle R_\varepsilon Q_0, Q_0 \rangle,$$

и формула (21) верна.

Наконец, последнее утверждение теоремы 3 — следствие теоремы 2. ►

Для иллюстрации результатов теоремы 3 рассмотрим следующий

Пример. Рассмотрим пространство Винера W_σ целых функций одной переменной экспоненциального типа $\leq \sigma$, принадлежащих классу L_2 на вещественной оси. В этом случае воспроизводящим ядром является функция

$$K(z,t) = \frac{\sin \sigma(\bar{z} - t)}{\pi(\bar{z} - t)}, \quad (z,t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$$

(см. [9, предложение 1]). Пусть $U = \{z_j = \pi j/\sigma,\ j = 1, \dots, N\}$. Тогда $K(z_j, z_j) = \sigma/\pi$, $j = 1, \dots, N$, а $K(z_j, z_k) = 0$ при $j \neq k$, $j, k = 1, \dots, N$. Поэтому в обозначениях теоремы 3 имеем

$$R_\varepsilon = {R_\varepsilon}' = \frac{\pi}{\sigma + \varepsilon\pi} E, \quad \varepsilon = (\delta/r)^2,$$

где E — единичная матрица размера $N \times N$. Пусть $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C} \setminus U$. Тогда

$$q_{j0} = K(z_j, z_0) = (-1)^j \frac{\sigma \sin(\sigma z_0)}{\pi(\sigma z_0 - \pi j)}, \quad j = 1, \dots, N,$$

а оптимальный линейный алгоритм определяется формулой (см. (20))

$$w^*(f) = \frac{\sigma r^2 \sin(\sigma \bar{z}_0)}{\sigma r^2 + \pi\delta^2} \sum_{j=1}^{N} (-1)^j \frac{f(\pi j/\sigma)}{\sigma \bar{z}_0 - \pi j}, \quad f \in V.$$

Она является своеобразным вариантом формулы Котельникова для равномерных отсчетов [17, с. 151], прогнозирующим значение функций из множества

$$V = \left\{ f \in W_\sigma : \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \, dx \leq r^2 \right\}$$

в точке z_0 по информации об их значениях на множестве U.

Учитывая, что

$$K(z_0, z_0) = \frac{\operatorname{sh}(2\sigma y_0)}{2\pi y_0},\ y_0 \neq 0; \quad K(z_0, z_0) = \sigma/\pi,\ y_0 = 0,$$

из формулы (21) находим величину оптимальной погрешности экстраполяции в точку z_0:

$$[\Omega_N(z_0, \delta)]^2 = r^2 \left[K(z_0, z_0) - \frac{\sigma^2 r^2}{\pi(\sigma r^2 + \pi\delta^2)} \sum_{j=1}^{N} \left| \frac{\sin(\sigma z_0)}{\sigma z_0 - \pi j} \right|^2 \right].$$

Наконец, экстремальная функция определяется из равенства (22), в обозначениях которой

$$G_\alpha^*(t) = \frac{\sin \sigma(\bar{z}_0 - t)}{\pi(\bar{z}_0 - t)} - \frac{\sigma^2 r^2}{\pi(\sigma r^2 + \pi\delta^2)} \sum_{j=1}^{N} \frac{\sin(\sigma \bar{z}_0) \sin(\sigma t)}{(\sigma \bar{z}_0 - \pi j)(\sigma t - \pi j)}, \quad t \in \mathbb{C}.$$

Замечание. В [10] получен близкий результат о величине оптимальной ошибки экстраполяции в классе Винера при наличии вероятностной модели ошибок (см. также [4, с. 40]).

2. Асимптотика оптимальной погрешности аналитического продолжения. Формула (21) не дает информации об асимптотике оптимальной погрешности, когда параметр δ, характеризующий допустимую величину ошибок при получении исходных данных, стремится к 0. Опираясь на свойства резольвенты матричного оператора, найдем асимптотическую оценку этой погрешности. При этом будем предполагать, что множество $U = \{z_j\}_1^N$ таково, что (см. (15))

$$\mathscr{M}_N = \{q_j = K(z_j, \cdot) : j = 1, \dots, N\} \tag{26}$$

— линейно независимая система функций пространства $H(D)$.

Заметим, что это условие выполняется не всегда даже в бесконечномерном пространстве. Например, для пространства Винера W_σ целых функций одной переменной экспоненциального типа $\le \sigma$, принадлежащих классу L_2 на вещественной оси, воспроизводящим ядром является функция

$$K(z,t) = \frac{\sin \sigma(\bar z - t)}{\pi(\bar z - t)}, \quad (z,t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$$

(см. пример в п. 1). Ассоциированная с этой функцией система $\mathscr{M}_N$ (см. (26)) является линейно независимой.

Действительно, по теореме Винера — Пэли (см., например, [17, с. 106]) оператор

$$[T\varphi](t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\sigma}^{\sigma} e^{it\tau} \varphi(\tau)\, d\tau, \quad \varphi \in L_2(-\sigma, \sigma)$$

(обратное преобразование Фурье) устанавливает линейный изоморфизм между пространствами $L_2(-\sigma,\sigma)$ и W_σ, причем $K(z,t) = T[e^{-i\tau\bar z}/\sqrt{2\pi}]$. Но, например, из теории линейных дифференциальных уравнений конечного порядка хорошо известно, что $\{e^{-i\tau\bar z_j} : j = 1, \dots, N\}$ — линейно независимая система функций. Поэтому этим же свойством обладает и система $\mathscr{M}_N$.

Рассмотрим теперь в W_σ линейное подпространство $W_\sigma(a,b) = \{f \in W_\sigma : f(a) = f(b)\}$, где a, b — произвольно фиксированные точки плоскости $\mathbb{C}$. В этом случае $\mathscr{M}_N$ — линейно зависимая система, если $\{a,b\} \subset U$.

Именно при выполнении условия (26) теорема 3 является обобщением известных результатов экстраполяции с конечного множества *по точным данным* в гильбертовом пространстве H голоморфных функций с воспроизводящим ядром (см., например, [4, с. 37, 38]). Действительно, в этом случае теорема 3 справедлива и при $\varepsilon = \delta = 0$. Например, после элементарных преобразований для оптимальной (неустранимой) погрешности $\omega_N(z_0)$ аналитического продолжения из соотношения (21) получаем следующую формулу (ср. [9, лемма 1, равенство (5)]):

$$[\omega_N(z_0)]^2 := [\Omega_N(z_0; 0)]^2 = r^2 \Gamma_0/\Gamma_1, \tag{27}$$

где $\Gamma_j = \Gamma(q_j, q_{j+1}, \dots, q_N)$ — определитель Грама, ассоциированный с системой функций $\mathscr{M}_{N+1-j} = \{q_j, q_{j+1}, \dots, q_N\}$, $j = 0, 1$ (см. (15), (26)). При этом $\Gamma_1 \ne 0$ благодаря упомянутому свойству системы $\mathscr{M}_N$ (см. [18, с. 226]). С точки зрения геометрии гильбертова пространства H при $r = 1$ величина $\omega_N(z_0)$ является высотой $(N+1)$-мерного параллелепипеда Π, построенного на векторах системы $\mathscr{M}_{N+1}$ с общей вершиной в точке $0 \in H$ и имеющего объем Γ_0, опущенной из вершины q_0 на основание Π, образованного с помощью векторов подсистемы $\mathscr{M}_N$ и имеющего площадь Γ_1 (см. [18, с. 228, 229]). Заметим, что в [1] была получена оценка погрешности экстраполяции аналитической функции с заданного множества, зависящая от его геометрической характеристики (n-*меры*).

Следующий результат характеризует главный член асимптотического разложения при $\delta \to 0$ оптимальной погрешности $\Omega_N(z_0;\delta)$ аналитического продолжения по неточным данным с заданного конечного множества $U \subset D$ в точку $z_0 \in D \setminus U$ в ГПВЯ $H(D)$ и дает оценку этой погрешности.

Теорема 4. *Пусть в обозначениях соотношений* (26), (27) $\mathscr{M}_N$ — *линейно независимая система функций пространства* $H(D)$, *а* $[\omega_N(z_0)]^2 := [\Omega_N(z_0;0)]^2$ — *оптимальная погрешность аналитического продолжения по точным данным. Введем обозначения:* $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ — *совокупность всех собственных различных значений матрицы* Γ (см. теорему 3); $E_j : \mathbb{C}^N \to H_j$ — *ортогональный проектор на собственное подпространство* H_j, *соответствующее собственному значению* λ_j *при* $j = 1,\dots,k$. *В обозначениях формулы* (19) *пусть* $M = \sum\limits_{j=1}^{k} (|E_jQ_0|/\lambda_j)^2$. *Тогда при* $\delta \to 0$ *справедлива следующая асимптотическая формула:*

$$[\Omega_N(z_0;\delta)]^2 = [\omega_N(z_0)]^2 + M\delta^2 + o(\delta^3).$$

Кроме того, верна оценка

$$[\omega_N(z_0)]^2 \le [\Omega_N(z_0;\delta)]^2 \le [\omega_N(z_0)]^2 + M\delta^2 \quad \forall \delta > 0.$$

◀ Как отмечалось при доказательстве теоремы 3, в ее обозначениях матрица Γ — самосопряженный оператор в $\mathbb{C}^N$. Учитывая, что $\det\Gamma \ne 0$, заключаем: в обозначениях формулы (19) квадратичная эрмитова форма $\langle \Gamma Q_0, Q_0\rangle$ положительно определена [15, с. 344]. Поэтому $\lambda_j > 0$, $j = 1,\dots,k$. По известной спектральной теореме (см. [19, с. 209; 20, с. 480, 481]) резольвента $R_\varepsilon = (\Gamma + \varepsilon E)^{-1}$ оператора Γ допускает разложение

$$R_\varepsilon = \sum_{j=1}^{k} \frac{E_j}{\varepsilon + \lambda_j}, \quad \varepsilon = (\delta/r)^2 > 0. \tag{28}$$

Поскольку (см. [19, с. 196]) E_j — самосопряженный оператор, обладающий свойством $E_j = E_j^2$, из (28) находим

$$\langle R_\varepsilon Q_0, Q_0\rangle = \sum_{j=1}^{k} \frac{\langle E_jQ_0, Q_0\rangle}{\varepsilon + \lambda_j} = \sum_{j=1}^{k} \frac{|E_jQ_0|^2}{\varepsilon + \lambda_j}, \quad \varepsilon \ge 0.$$

Учитывая, что в рассматриваемом случае (см. (26)) формула (21) справедлива и при $\varepsilon = 0$, теперь получаем

$$0 \le [\Omega_N(z_0;\delta)]^2 - [\omega_N(z_0)]^2 = r^2\varepsilon \sum_{j=1}^{k} \frac{|E_jQ_0|^2}{\lambda_j(\varepsilon + \lambda_j)}.$$

Отсюда и вытекают утверждения теоремы. ▶

Замечание. Для примера из § 2, п. 1 асимптотическое поведение оптимальной погрешности $\Omega_N(z_0,\delta)$ может быть исследовано непосредственно с помощью найденной для нее формулы

$$0 \le [\Omega_N(z_0;\delta)]^2 - [\omega_N(z_0)]^2 = \frac{\sigma r^2\delta^2 M_1}{\sigma r^2 + \pi\delta^2} \le M_1\delta^2, \quad M_1 = \sum_{j=1}^{N} \left|\frac{\sin(\sigma z_0)}{\sigma z_0 - \pi j}\right|^2.$$

Эта оценка находится в полном согласии с неравенством в формулировке теоремы 4, поскольку в этом случае Γ — диагональная матрица, $\lambda_j = \sigma/\pi$, $E_j = E$, $j = 1,\dots,N$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лаврентьев М. М.* О некоторых некорректных задачах математической физики. Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1962.
2. *Марчук А. Г., Осипенко К. Ю.* Наилучшее приближение функций, заданных с погрешностью в конечном числе точек // Мат. заметки. 1975. Т. 17, № 3. С. 359–368.
3. *Melkman A. A., Micchelli C. A.* Optimal estimation of linear operators in Hilbert spaces from inaccurate data // Siam. J. Numer. Anal. 1979. V. 16, N 1. P. 87–105.
4. *Micchelli C. A., Rivlin T. J.* Lectures on optimal recovery // Lecture Notes in Math. 1985. V. 1129. P. 21–93.
5. *Арестов В. В.* Наилучшее восстановление операторов и родственные задачи // Тр. МИАН. 1989. Т. 17. С. 3–20.
6. *Miller K.* Least squares methods for ill-posed problems with a prescribed bound // SIAM J. Math. Anal. 1970. V. 1, N 1. P. 52–74.
7. *Маергойз Л. С.* Погрешность оптимального восстановления линейных функционалов в гильбертовых пространствах целых функций // Материалы Международной конференции и чебышевских чтений, посвященных 175-летию со дня рождения П. Л. Чебышева. М.: Изд-во мех.-мат. фак-та, 1996. С. 236–239.
8. *Маергойз Л. С.* Экстремальные свойства целых функций класса Винера и их приложения // Докл. РАН. 1997. Т. 356, № 2. С. 161–165.
9. *Маергойз Л. С.* Оптимальная оценка экстраполяции с конечного множества в классе Винера // Сиб. мат. журн. 2000. Т. 41, № 6. С. 1363–1375.
10. *Федотов А. М.* Численный алгоритм экстраполяции функций класса Винера // Докл. АН СССР. 1990. Т. 314, № 2. С. 306–309.
11. *Fedotov A. M.* Analytic continuation of functions from discrete sets // J.Inv. Ill-Posed Probl. 1994. V. 2, N 3. P. 235–252.
12. *Fedotov A. M., Settarov J. A.* Optimal algorithms in Hilbert spase for the continuation of entire functions // Scientific Siberian / Numerical and Data Analysis. Ser. A. Tassin, France, 1994. P. 70–75. (AMSE Transaction, 1994. V. 11).
13. *Аниконов Ю. Е., Узаков М. М.* Оценки устойчивости в многомерных задачах аналитического продолжения // Неклассические уравнения математической физики. Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 1985. С. 3–7.
14. *Осипенко К. Ю., Стесин М. И.* О некоторых задачах оптимального восстановления аналитических и гармонических функций по неточным данным // Сиб. мат. журн. 1993. Т. 34, № 3. С. 144–160.
15. *Hille E.* Introduction to general theory of reproducing kernels // Rocky Mountain J. Math. 1972. V. 2, N 3. P. 321–368.
16. *Ахиезер Н. И., Глазман И. М.* Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1966.
17. *Хургин Я. И., Яковлев В. П.* Финитные функции в физике и технике. М.: Наука, 1971.
18. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1966.
19. *Халмош П.* Конечномерные векторные пространства. М.: Физматгиз, 1963.
20. *Булдырев В. С., Павлов Б. С.* Линейная алгебра. Функции многих переменных. Л.: Изд-во ЛГУ, 1985.

Статья поступила 5 января 2001 г.

Маергойз Лев Сергеевич
Красноярская гос. архитектурно-строительная академия,
просп. Свободный, 82, Красноярск 660041
root@maergoiz.krsk.infotel.ru

Федотов Александр Михайлович
Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск 630090