Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2001. Том 42, № 5

УДК 518:517.948

РЕШЕНИЕ МНОГОМЕРНОГО РАЗНОСТНОГО БИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ МЕТОДОМ МОНТЕ–КАРЛО

Г. А. Михайлов, В. Л. Лукинов

Аннотация: Построены и обоснованы новые весовые методы Монте-Карло для оценки решения задачи Дирихле для многомерного разностного бигармонического уравнения на основе моделирования «блуждания по решетке». Векторные варианты построенных алгоритмов непосредственно распространяются на разностные метагармонические уравнения с сохранением вида условий несмещенности оценок и ограниченности их дисперсий. В связи с этим построен простой алгоритм для оценки первого собственного числа многомерного разностного оператора Лапласа. Кроме того, построены специальные алгоритмы «блуждания по решетке», позволяющие при определенных условиях оценивать решения задачи Дирихле для бигармонического уравнения со слабой нелинейностью и для задач со смешанными краевыми условиями, включающими условие Неймана. Библиогр. 6.

В работе построены и обоснованы новые весовые методы Монте-Карло для оценки решения задачи Дирихле для многомерного разностного бигармонического уравнения на основе моделирования «блуждания по решетке». Векторные варианты построенных алгоритмов непосредственно распространяются на разностные метагармонические уравнения с сохранением вида условий несмещенности оценок и ограниченности их дисперсий. В связи с этим построен простой алгоритм для оценки первого собственного числа многомерного разностного оператора Лапласа. Кроме того, построены специальные алгоритмы «блуждания по решетке», позволяющие при определенных условиях оценивать решения задачи Дирихле для бигармонического уравнения со слабой нелинейностью и для задач со смешанными краевыми условиями, включающими условие Неймана. Отметим, что весовые алгоритмы метода Монте-Карло сравнительно эффективны для оценки решения многомерной задачи в небольшом числе точек, для оценки параметрических производных и для решения задач со случайными в допустимых пределах параметрами. Они идеально распараллеливаются путем простого распределения моделируемых траекторий по вычислительным процессорам.

1. Оценка решения в одной точке

Рассмотрим краевую задачу Дирихле для бигармонического уравнения:

$$(\Delta + c)(\Delta + b)u = -g, \quad \Delta u + bu|_\Gamma = \phi, \quad u|_\Gamma = \psi, \tag{1.1}$$

Работа выполнена при поддержке ФЦП «Интеграция» (№ 257) и гранта «Ведущие научные школы» (№ 00–15–96173).

и эквивалентную ей систему уравнений:

$$\Delta u + bu = v, \quad u|_\Gamma = \psi, \quad \Delta v + cv = -g, \quad v|_\Gamma = \phi \tag{1.2}$$

в области $D \in \mathbb{R}^n$ с границей Γ, причем

$$M = \max[\mathrm{Re}(b), \mathrm{Re}(c)] < c^*,$$

где $-c^*$ — первое собственное значение оператора Лапласа для области D, $r = (x_1, \dots, x_n) \in D$. Предполагаются выполненными условия регулярности функций b, c, g, ϕ, ψ и границы Γ, обеспечивающие существование и единственность решения данной задачи и эквивалентной ей системы уравнений, в том числе и после замены всех параметрических функций их модулями.

В области D строится равномерная сетка с шагом h и в качестве оценки решения исходной задачи в узлах сетки $r = (i_1 h, \dots, i_n h)$ рассматривается решение разностной задачи:

$$\Delta_h u^h + b^h u^h = v^h \text{ в } D_h, \quad u^h|_{\Gamma_h} = \psi^h, \tag{1.3a}$$

$$\Delta_h v^h + c^h v^h = -g^h \text{в } D_h, \quad v^h|_{\Gamma_h} = \phi^h, \tag{1.3b}$$

где Δ_h — стандартный разностный оператор Лапласа; D_h — сеточная область (множество внутренних узлов); Γ_h — сеточная граница; u^h, v^h — сеточные функции, определенные на $D_h \cup \Gamma_h$; g^h, b^h, c^h, M^h, ϕ^h, ψ^h — значения функций $g(r)$, $b(r)$, $c(r)$, $M(r)$, $\phi(r)$, $\psi(r)$ в узлах сетки. Для простоты изложения здесь рассматривается вариант, когда все граничные узлы сетки лежат на исходной границе Γ, т. е. область D_h является объединением «координатных» параллелепипедов.

Свойства разностной аппроксимации оператора Лапласа позволяют предположить, что при достаточно малых h все собственные значения оператора Δ_h для области D_h отрицательны. Обозначим через $-c_h^*$ то из них, которое имеет наименьшую абсолютную величину. Тогда для $M^h < c_h^*$ задача (1.3a) и (1.3b) имеет единственное решение.

Системы (1.3a), (1.3b) можно представить в виде

$$u^h_{i_1,i_2,\dots,i_n} = \frac{u^h_{i_1-1,i_2,\dots,i_n} + \dots + u^h_{i_1,i_2,\dots,i_n+1}}{2n\left(1 - \frac{b^h_{i_1,i_2,\dots,i_n} h^2}{2n}\right)} - \frac{v^h_{i_1,i_2,\dots,i_n} h^2}{2n - b^h_{i_1,i_2,\dots,i_n} h^2},$$

$$v^h_{i_1,i_2,\dots,i_n} = \frac{v^h_{i_1-1,i_2,\dots,i_n} + \dots + v^h_{i_1,i_2,\dots,i_n+1}}{2n\left(1 - \frac{c^h_{i_1,i_2,\dots,i_n} h^2}{2n}\right)} + \frac{g^h_{i_1,i_2,\dots,i_n} h^2}{2n - c^h_{i_1,i_2,\dots,i_n} h^2}.$$

Более удобной для целей работы является следующая форма записи:

$$v_i^h = q_i \sum_{j=1}^{L} p_{ij} v_j^h + f_i^h \text{ или } v^h = qKv^h + f^h, \tag{1.4}$$

$$u_i^h = s_i \sum_{j=1}^{L} p_{ij} u_j^h + \tilde{f}_i^h \text{ или } \ u^h = sKu^h + \tilde{f}^h, \tag{1.5}$$

где $i, j = (1, \dots, L)$ — номера узлов сетки, причем $p_{ij} = 1/(2n)$, если i — номер внутреннего узла, а j — соседнего с ним; $p_{ij} = 0$ для граничных узлов. Для граничных узлов полагаем $q_i = s_i = 0$; для остальных узлов —

$$q_i = \left[1 - c_i^h h^2/(2n)\right]^{-1} \quad \text{и} \quad s_i = \left[1 - b_i^h h^2/(2n)\right]^{-1}.$$

Свободные элементы f^h и $\tilde{f}^h$ определяются соотношениями

$$f_i^h = \begin{cases} \frac{h^2}{2n} q_i g_i^h, & r_i \in D_h, \\ \phi_i^h, & r_i \in \Gamma_h, \end{cases} \quad \tilde{f}_i^h = \begin{cases} -\frac{h^2}{2n} s_i v_i^h, & r_i \in D_h, \\ \psi_i^h, & r_i \in \Gamma_h. \end{cases}$$

Теорема 1.1. *Если* $M^h < c_h^*$, *то* $u_{i_0}^h = \mathbf{E}\xi_{i_0}$, *где*

$$\xi_{i_0} = \frac{-h^2}{2n}\sum_{j=0}^{N} f_{i_j}^h \sum_{l=0}^{j}\left(\prod_{k=0}^{l} s_{i_k}\right)\left(\prod_{k=l}^{j-1} q_{i_k}\right) + \left(\prod_{k=0}^{N-1} s_{i_k}\right)\psi_{i_N}^h, \quad \prod_{k=j}^{j-1} = \begin{cases} 1, & j < N, \\ 0, & j = N. \end{cases} \tag{1.6}$$

Здесь $i_0, \dots, i_n$ — *номера узлов случайной цепи Маркова с начальным распределением* δ_{i_0} *и вероятностями перехода* p_{ij}, N — *случайный номер первого попадания на границу сеточной области.*

Доказательство. Для спектрального радиуса оператора K выполняется неравенство [3]

$$\rho(K) < \ 1 - \frac{c_h^* h^2}{2n}.$$

Поэтому при условии $M^h < c_h^*$ справедливо соотношение

$$\rho(|s|K) \le \max\left(|1 - \frac{b^h h^2}{2n}|^{-1}\right)\left(1 - \frac{c_h^* h^2}{2n}\right) \le \left(1 - \frac{M^h h^2}{2n}\right)^{-1}\left(1 - \frac{c_h^* h^2}{2n}\right) < 1.$$

Вследствие этого для системы (1.5) верно равенство [1, 3]

$$u_{i_j}^h = \mathbf{E}\left[-\frac{h^2}{2n}\sum_{j=0}^{N-1}\left(\prod_{k=0}^{j} s_{i_k}\right)v_{i_j}^h + \left(\prod_{k=0}^{N-1} s_{i_k}\right)\psi_{i_N}^h\right] = \mathbf{E}\mu. \tag{1.7}$$

Аналогично

$$v_{i_j}^h = \mathbf{E}\zeta_{i_j}^{(1)} = \mathbf{E}\sum_{k=j}^{N}\left(\prod_{l=j}^{k-1} q_{i_l}\right) f_{i_k}^h.$$

В соотношении (1.7) значения $v_{i_j}^h$ неизвестны, но можно использовать их случайные оценки на этой же траектории, т. е. справедливо равенство

$$u_{i_0} = \mathbf{E}\left[-\frac{h^2}{2n}\sum_{j=0}^{N-1}\left(\prod_{k=0}^{j} s_{i_k}\right)\sum_{k=j}^{N}\left(\prod_{l=j}^{k-1} q_{i_l}\right) f_{i_k}^h + \left(\prod_{k=0}^{N-1} s_{i_k}\right)\psi_{i_N}^h\right] = \mathbf{E}\xi_{i_0}^{(1)},$$

так как в условиях задачи допустимо следующее повторное осреднение:

$$\mathbf{E}\xi_{i_0}^{(1)} = \mathbf{E}\left[-\frac{h^2}{2n}\sum_{j=0}^{N-1}\left(\prod_{k=0}^{j} s_{i_k}\right)\mathbf{E}\left[\sum_{N}^{k=j}\prod_{l=j}^{k-1} q_{i_l} f_{i_k}^h | i_0, \dots, i_{j-1}\right]\right.$$
$$\left. + \left(\prod_{k=0}^{N-1} s_{i_k}\right)\psi_{i_N}^h\right] = \mathbf{E}\mu.$$

Изменив порядок суммирования в выражении для $\xi_{i_0}^{(1)}$, получаем (1.6).

Отметим, что если сумму из (1.6) записать в виде $\sum\limits_{j=0}^{N} f_{i_j}^h A_j$, то справедливо рекуррентное соотношение

$$A_{j+1} = A_j q_{i_j} + s_{i_{j+1}}\prod_{k=0}^{j} s_{i_k}.$$

2. Обоснование равномерной ограниченности дисперсии

Система (1.4), (1.5) может быть представлена в векторном виде:

$$\begin{bmatrix} v^h \\ u^h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} qK & 0 \\ \frac{-h^2}{2n} sqK & sK \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} v^h \\ u^h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f^h \\ f^h_{(1)} \end{bmatrix} \quad \text{или } \mathbf{u} = \mathbf{K}u + F, \tag{2.1}$$

где $f^h_{(1)} = -\frac{h^2}{2n} s f^h$ для внутренних точек и $f^h_{(1)} = \psi^h$ для граничных узлов.

Для построения векторной оценки решения системы уравнений (2.1) определяется обрывающаяся цепь Маркова $i_0, \dots, i_N$ с переходной вероятностью p_{i_{k-1}, i_k}, как указано в формулировке теоремы 1.1. Вводятся также случайные веса: $Q_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,

$$Q_j = Q_{j-1} \begin{bmatrix} q_{i_{j-1}} & 0 \\ -\frac{h^2}{2n} s_{i_{j-1}} q_{i_{j-1}} & s_{i_{j-1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \prod\limits_{k=0}^{j-2} q_{i_k} & 0 \\ -\frac{h^2}{2n} \sum\limits_{l=0}^{j-2} (\prod\limits_{j=0}^{l} s_{i_k})(\prod\limits_{k=l}^{j-2} q_{i_k}) & \prod\limits_{k=0}^{j-2} s_{i_k} \end{bmatrix}$$

$$\times \begin{bmatrix} q_{i_{j-1}} & 0 \\ -\frac{h^2}{2n} s_{i_{j-1}} q_{i_{j-1}} & s_{i_{j-1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \prod\limits_{k=0}^{j-1} q_{i_k} & 0 \\ -\frac{h^2}{2n} \sum\limits_{l=0}^{j-1} (\prod\limits_{k=0}^{l} s_{i_k})(\prod\limits_{k=l}^{j-1} q_{i_k}) & \prod\limits_{k=0}^{j-1} s_{i_k} \end{bmatrix}. \tag{2.2}$$

Поскольку справедливы соотношения $\rho(|q|K) < 1$, $\rho(|s|K) < 1$ (см. доказательство теоремы 1.1) и выполняется неравенство $\rho(\mathbf{K}_1) \leq \max(\rho(|q|K), \rho(|s|K))$ (см. [1]), то в условиях теоремы 1.1 верно неравенство $\rho(\mathbf{K}_1) < 1$ и тем самым

$$\mathbf{u}_{i_0} = \mathbf{E}\xi_{i_0} = \mathbf{E} \begin{pmatrix} \xi_{(1)i_0} \\ \xi_{(2)i_0} \end{pmatrix}, \quad \xi_{i_0} = \sum_{j=0}^{N} Q_j \mathbf{F}_{i_j}. \tag{2.3}$$

Соответственно [1] символом $\mathbf{K}_1$ здесь обозначен оператор, получаемый из оператора $\mathbf{K}$ путем замены множителей q, s их модулями. Следствием соотношений (2.2) и (2.3) является тождество $\xi_{(2)i_0} = \xi_{i_0}$.

Стандартная векторная оценка [1] для системы (2.1) имеет следующее рекуррентное представление:

$$\zeta_{i_0} = q_{i_0}\zeta_{i_1} + f^h_{i_0}, \quad \xi^{(2)}_{i_0} = -\frac{h^2}{2n} s_{i_0} q_{i_0} \zeta_{i_1} + s_{i_0}\xi_{i_1} - \frac{h^2}{2n} s_{i_0} f^h_{i_0}, \tag{2.4}$$

причем $\zeta_i \equiv \zeta^{(1)}_i$. Подстановка явного выражения величины ζ_{i_1} во второе равенство из (2.4), очевидно, дает рекурсию для величины $\xi^{(1)}_{i_0}$, что подтверждает равенство $\xi^{(2)}_{i_0} = \xi^{(1)}_{i_0} = \xi_{i_0}$.

Теорема 2.1. *При условии $M^h < c^*_h/2$ случайная величина $\mathbf{E}|\xi_i|^2$ конечна.*

Доказательство. Для ковариационной матрицы $\Psi = \mathbf{E}[\xi\xi']$ справедливо матрично-алгебраическое уравнение

$$\Psi = [\mathbf{F}\Psi' + \Psi F' - \mathbf{F}F'] + \mathbf{K}\Psi K' \quad \text{или} \quad \Psi = \mu + \mathbf{K}_p\Psi$$

при условии, что $\rho(\mathbf{K}_{p,1}) < 1$, где $\mathbf{K}_{p,1}$ — оператор, получаемый из оператора $\mathbf{K}_p$ заменой множителей q, s их модулями (см., например, [1]). Путем перестановки элементов матрицы Ψ получается матрично-алгебраическое уравнение треугольного вида

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E}\xi_{(1)}^2 \\ \mathbf{E}[\xi_{(1)}\xi_{(2)}] \\ \mathbf{E}[\xi_{(2)}\xi_{(1)}] \\ \mathbf{E}\xi_{(2)}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q^2K & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{h^2}{2n}sq^2K & qsK & 0 & 0 \\ -\frac{h^2}{2n}sq^2K & 0 & sqK & 0 \\ \frac{h^4}{4n^2}s^2q^2K & -\frac{h^2}{2n}qsK & -\frac{h^2}{2n}sqK & s^2K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{E}\xi_{(1)}^2 \\ \mathbf{E}[\xi_{(1)}\xi_{(2)}] \\ \mathbf{E}[\xi_{(2)}\xi_{(1)}] \\ \mathbf{E}\xi_{(2)}^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{E}\xi_{(1)}f^h - (f^h)^2 \\ (\mathbf{E}\xi_{(2)} - \frac{h^2}{2n}s\mathbf{E}\xi_{(1)})f^h - \frac{h^2}{2n}s\mathbf{E}\xi_{(1)}^2 \\ (\mathbf{E}\xi_{(2)} - \frac{h^2}{2n}s\mathbf{E}\xi_{(1)})f^h - \frac{h^2}{2n}s\mathbf{E}\xi_{(1)}^2 \\ 2\frac{h^4}{4n^2}s\mathbf{E}\xi_{(2)}f^h + \frac{h^2}{2n}sf^h \end{bmatrix},$$

где K — линейный оператор из уравнения (1.4). Поскольку $\rho(K) < 1 - \frac{c_h^* h^2}{2n}$ [3], в условиях теоремы справедливы неравенства

$$\rho(|q|^2K) \le \max(|q|^2)\left(1 - \frac{c_h^*h^2}{2n}\right) \le \left|1 - \frac{M^h h^2}{2n}\right|^{-2}\left(1 - \frac{c_h^*h^2}{2n}\right) \le \left|1 - \frac{2M^h h^2}{2n}\right|^{-1}\left(1 - \frac{c_h^*h^2}{2n}\right) < 1. \quad (2.5)$$

Путем замены в предыдущих неравенствах величины q на s получается неравенство $\rho(|s|^2K) < 1$. Наконец, при условии $M^h < c_h^*/2$ неравенство $\rho(|s||q|K) < 1$ получается из соотношения, аналогичного (2.5). Поэтому с учетом неравенства (см. [1])

$$\rho(\mathbf{K}_{p,1}) < \max[\rho(|q|^2K), \rho(|s|^2K), \rho(|q||s|K)]$$

выполняется соотношение $\rho(\mathbf{K}_{p,1}) < 1$. Теорема доказана.

Теорема 2.2. *При условии $M^h < c_h^*/2$ величина $\mathbf{E}|\xi_i|^2$ равномерно по h ограничена.*

Доказательство. Пусть (ζ_i, ξ_i) — векторная оценка для системы (2.1). Для величины ζ_i^2 выполняется рекуррентное соотношение

$$\zeta_{i_0}^2 = \left[q_{i_0}\zeta_{i_1} + f_{i_0}^h\right]^2 = q_{i_0}^2\zeta_{i_1}^2 + 2q_{i_0}\zeta_{i_1}f_{i_0}^h + \left(f_{i_0}^h\right)^2 = q_{i_0}^2\zeta_{i_1}^2 + 2f_{i_0}^h\zeta_{i_0} - \left(f_{i_0}^h\right)^2,$$

из которого следует, что при выполнении условий теоремы справедливо равенство $\mathbf{E}\zeta_i^2 = (\chi, \delta_i)$, где χ — ряд Неймана для системы уравнений

$$\chi_i = f_i(2\mathbf{E}\xi_i - f_i) + \sum_{j=1}^{L}\frac{q_i^2}{p_{ij}}\chi_j, \quad i = 1, 2, \dots, L.$$

Неравенство (2.5) обеспечивает сходимость этого ряда. В частности, отсюда следует, что величина $\mathbf{E}|\zeta_i|^2$ ограничена решением системы разностных уравнений вида (1.3b) для $c' = 2M$ с заменой f на $|f|$, которое равномерно сходится к решению соответствующей краевой задачи (см. [3]). Следовательно, при $M^h < c_h^*/2$ квадрат первой компоненты оценки (2.4) равномерно по h ограничен: $\mathbf{E}|\zeta|^2 \le \mathrm{const} + O(h^2)$. Для произведения $\zeta_{i_0}\xi_{i_0}$ выполняется рекуррентное равенство

$$\zeta_{i_0}\xi_{i_0} = \left[q_{i_0}\zeta_{i_1} + f^h_{i_0}\right]\left[s_{i_o}\xi_{i_1} - \frac{h^2}{2n}s_{i_0}q_{i_0}\zeta_{i_1} - \frac{h^2}{2n}s_{i_0}f^h_{i_0}\right]$$
$$= q_{i_0}s_{i_0}\zeta_{i_1}\xi_{i_1} - \frac{h^2}{2n}s_{i_0}q^2_{i_o}\zeta^2_{i_1} - \frac{h^2}{2n}s_{i_0}q_{i_0}f^h_{i_0}\zeta_{i_1} + f^h_{i_0}\xi_{i_0},$$

поэтому справедливо соотношение $\mathbf{E}\zeta_i\xi_i = (\chi, \delta_i)$, где χ — ряд Неймана для системы уравнений

$$\chi_i = f_i\left[\mathbf{E}\xi_i + \frac{h^2}{2n}s_i\mathbf{E}\zeta_i\right] - \frac{h^2}{2n}s_i\mathbf{E}\zeta_i^2 + \sum_{j=1}^{L}\frac{q_is_i}{p_{ij}}\chi_j, \quad i = 1, 2, \ldots, L.$$

Из равномерной ограниченности величины $\mathbf{E}|\zeta|^2$ и неравенства (2.5) с заменой q^2 на sq аналогично вышеизложенному следует равномерная ограниченность по h величины $\mathbf{E}|\zeta_i\xi_i|$. Используя подобный анализ для квадрата модуля второй компоненты ξ^2, нетрудно получить утверждение теоремы.

3. Глобальная оценка решения дифференциальной задачи

Для глобальной оценки решения задачи (1.1) в области D можно оценить значения решения системы (1.3a), (1.3b) в узлах сетки и построить линейное восполнение $\tilde{u}(r)$. Для оценки решения в разных точках можно использовать одни и те же траектории, полагая, что траектория началась в состоянии i, если она попала в него впервые на каком-то шаге блуждания. Если начальное состояние выбирается равновероятно по границе, то среднее число посещений различных узлов является постоянной $O(h^2)$; величиной такого же порядка ограничено снизу число первых посещений (см. [1, 2]).

Поэтому для глобальной оценки решения системы уравнений (1.3a) и (1.3b) реализуется следующий алгоритм. Начальное состояние цепи Маркова выбирается равномерно по границе, затем с вероятностью единица траектория попадает в ближайший внутренний узел, после чего с одинаковой вероятностью она может перейти в любой из соседних узлов, и т. д. Цепь обрывается, когда траектория вновь окажется на границе. Оценка решения имеет вид

$$u_i = \mathbf{E}_i\frac{-h^2}{2n}\sum_{j=m_i}^{N} f^h_{i_j}\sum_{l=m_i}^{j}\left(\prod_{k=m_i}^{l} s_{i_k}\right)\left(\prod_{k=l}^{j-1} q_{i_k}\right) + \left(\prod_{k=m_i}^{N-1} s_{i_k}\right)\psi^h_{i_N},$$
$$\prod_{k=j}^{j-1} = \begin{cases} 1, & j < N, \\ 0, & j = N, \end{cases}$$

где среднее берется по траекториям, прошедшим через i-й узел, m_i — момент первого в него попадания.

При этом трудоемкость метода определяется величиной $S = Nt\mathbf{E}l$, где t — время моделирования одного перехода, N — число моделируемых траекторий, необходимых для достижения заданной погрешности, $\mathbf{E}l$ — средняя длина траекторий (асимптотически линейно по n растущая функция). Трудоемкости tl для траектории длины l можно достичь, используя рекурсию (2.4), т. е. проводя суммирование по убыванию номеров состояний. Отметим, что прямая реализация выражения (1.6) существенно эффективнее для оценки решения в одной точке.

Известно, что если $u(r) \in C^4(D)$, то верно неравенство $|u(r_i) - \mathbb{E}\xi_i| \leq Ch^2$, и, следовательно, $|u(r) - \mathbb{E}[\tilde{u}(r)]| \leq Ch^2$, где $\tilde{u}(r)$ — линейное восполнение оценки разностного решения по N траекториям. Отсюда в случае вещественных функций u и $\tilde{u}$ получается [1, 2] следующая оценка погрешности в метрике пространства $L_2(D)$:

$$\mathbb{E}\|u(r) - \tilde{u}(r)\|^2_{L_2} \leq \int\limits_D D\tilde{u}(r)\,dr + \int\limits_D [u(r) - \mathbf{E}\tilde{u}(r)]^2 \leq d/N_1 + C_1h^4,$$

где коэффициент d является верхней границей дисперсии оценки; он равномерно по h ограничен. Величина N_1 — это нижняя граница среднего числа траекторий, проходящих через один узел; ясно, что $N_1 = N \min\limits_i \mathbb{E}\nu_i^{(1)}$, где $\mathbb{E}\nu_i^{(1)}$ — среднее число посещений i-го узла или, что то же самое, вероятность того, что траектория хотя бы один раз пройдет через данный узел. Как указано выше, если начальное состояние цепи Маркова выбирается равновероятно из множества точек границы, то верны следующие асимптотические равенства: $N_1 \asymp Nh^{n-1}$ и $\mathbb{E}l \asymp h^{-1}$.

Задача минимизации трудоемкости в смысле необходимого числа операций для достижения требуемой оценки погрешности δ имеет вид

$$S = Nt\mathbb{E}l \to \min_{N,h}, \quad \frac{d}{Nh^{n-1}} + C_1h^4 = \delta^2.$$

В результате решения этой задачи получаются следующие оценки:

$$h^* \asymp \delta^{1/2}, \quad N^* \asymp \delta^{-(n+3)/2}, \quad S^* \asymp \delta^{-n/2-2}.$$

Заметим, что трудоемкость оценки решения в одной точке есть величина порядка $\delta^{-(n+3)/2}$.

4. Специальный алгоритм, позволяющий решать задачи со слабой нелинейностью и краевыми условиями Неймана

1. Рассмотрим краевую задачу

$$\Delta\Delta u + c\Delta u + bu = -g, \quad u|_\Gamma = \psi, \quad \Delta u|_\Gamma = \phi,$$

которой поставим в соответствие следующую, уже не треугольную, систему алгебраических уравнений:

$$v^h = qKv^h + \frac{h^2}{2n - c^h h^2} b^h u^h + f^h, \quad u^h = -\frac{h^2}{2n} v^h + Ku^h + f_2^h, \tag{4.1}$$

где $f_{2,i}^h = \phi_i^h$ при $r_i \in \Gamma_h$ и $f_{2,i}^h = 0$ при $r_i \notin \Gamma_h$.

Систему (4.1) при условиях

$$|b^h|h^2/(2n) < 1, \quad h^2/(2n) < 1$$

перепишем в следующем, удобном для рандомизации, виде:

$$\begin{gathered} v^h = \frac{1 - h^2|b^h|/(2n)}{1 - h^2|b^h|/(2n)} qKv^h + \operatorname{sign}(b^h)\frac{h^2|b^h|}{2n}\frac{u^h}{1 - c^h h^2/(2n)} + f^h, \\ u^h = (-1)\frac{h^2}{2n} v^h + \frac{1 - h^2/(2n)}{1 - h^2/(2n)} Ku^h + f_2^h. \end{gathered} \tag{4.2}$$

Из соотношений (4.2) получается следующее рекуррентное представление рандомизированной векторной оценки метода Монте-Карло:

$$\zeta_{i_0}^{(r)} = \begin{cases} \frac{q_{i_0}\zeta_{i_1}^{(r)}}{1-h^2|b_{i_0}^h|/(2n)} + f_{i_0}^h, & P_r = 1 - h^2|b_{i_0}^h|/(2n), \\ \operatorname{sign}(b_{i_0}^h) q_{i_0}\xi_{i_0}^{(r)} + f_{i_0}^h, & P_r = h^2|b_{i_0}^h|/(2n), \end{cases}$$

$$\xi_{i_0}^{(r)} = \begin{cases} -\zeta_{i_0}^{(r)} + f_{2,i_0}^h, & P_r = h^2/(2n), \\ \frac{\xi_{i_1}^{(r)}}{1-h^2/(2n)} + f_{2,i_0}^h, & P_r = 1 - h^2/(2n), \end{cases}$$

где символом P_r обозначены вероятности указанных значений оценок. Нетрудно заметить, что величина $\xi_i^{(r)}$ является скалярной весовой оценкой метода Монте-Карло для значений u_i^h, т. е. ее можно представить в виде (см. [1, 3])

$$\xi_{i_0}^{(r)} = \sum_{k=0}^{N} Q_k f_{i_k}^h.$$

Теорема 4.1. *Если $c \le 0$, $|b^h|h^2/(2n) < 1$, $h^2/(2n) < 1$, $c_h^* > 2$, $r(h) < c_h^*/2$, где $r(h) = (c^h + |b^h|)(1 - \frac{c^h|b^h|}{c^h+|b^h|}\frac{h^2}{2n})$, то $\mathbf{E}\xi_i^{(r)} = u_i^h$ и $\mathbf{D}\xi_i^{(r)} \le C_1 < \infty$ равномерно по h.*

Доказательство. Вследствие равенства

$$q_i/[1 - h^2|b^h|/(2n)] = [1 - h^2 r(h)/(2n)]^{-1}$$

случайная величина $\xi_i^{(r)}$ мажорируется оценкой η_i для некоторого уравнения Гельмгольца, причем

$$\mathbf{E}\eta_i < C_2 < +\infty \quad \text{и} \quad \mathbf{D}\eta_i < C_3 < +\infty$$

равномерно по h [3]. Таким образом, соответствующий системе (4.1) ряд Неймана, значение которого совпадает с $\mathbf{E}\xi^{(r)}$ [1, 3], сходится. Далее, см. [4, лемма 2 и теорема 1], нетрудно показать, что ограниченное решение u^h, v^h системы (9) единственно и $\mathbf{E}\xi^{(r)} \equiv u^h$, что и доказывает теорему.

Простые расчеты показывают, что в случае $c_h^* \le 2$ при выполнении неравенства $c + 2|b|/c^* < (c^*/2)^2$, условия теоремы 4 можно обеспечить с помощью изменения масштаба в пространстве независимых переменных $\mathbb{R}^n$, которое изменяет значение c^* соответствующим квадратичным множителем.

2. Если в рекуррентном выражении величины $\zeta^{(r)}$ заменить $\xi_{i_0}^{(r)}$ произведением вида $\prod_{k=1}^{m} \xi_{i_0,k}^{(r)}$ (см. [4]), где $\xi_{i_0,k}^{(r)}$ $(k = 1, \dots m)$ — условно-независимые реализации величины ξ_{i_0}, то формально получается случайная оценка решения аналогичной задачи для слабо нелинейного уравнения

$$\Delta\Delta u + c\Delta u + bu^m = -g.$$

Необходимое здесь ветвление осуществляется при вычислении $\xi_{i_0}^{(r)}$ с вероятностью $h^2|b_{i_0}^h|/2n$. Условия несмещенности, а также конечности дисперсии и трудоемкости такой оценки можно установить с помощью методики, использованной в [4] для случая нелинейного уравнения Гельмгольца. Для этого следует предполагать существование и единственность решения мажорирующей задачи

$$\Delta_h\Delta_h u^h + |c^h|\Delta_h u^h + |b^h|(u^h)^m = -|g^h|, \quad u^h|_{\Gamma_h} = |\psi^h|, \quad \Delta_h u^h|_{\Gamma_h} = |\phi^h|$$

в некотором шаре $\|u^h\| \le \rho$ при достаточно равномерно малых $|\psi^h|$, $|\phi^h|$ и $|g^h|$. Это предположение можно обосновать так же, как для нелинейного уравнения Гельмгольца на основе представления вида (1.4) с помощью принципа неподвижной точки в условиях теоремы 4.1. По аналогии с [4] нетрудно показать, что среднее число «ветвей» траектории здесь конечно, если $\mu = \max[m|b|, 1] < c_h^*$ и $\mu h^2/(2n) < 1$.

3. Заметим, что построенный в настоящем разделе алгоритм можно в принципе распространить на случай смешанных краевых условий, включающих условия Неймана. Рассмотрим, например, задачу

$$\Delta_h^2 u^h = 0, \quad u^h|_{\Gamma_h} = \psi^h, \quad \left.\frac{\partial u^h}{\partial n}\right|_{\Gamma_h} = 0,$$

где $\frac{\partial u}{\partial n}$ — производная вдоль внутренней нормали к границе. В отличие от задачи Дирихле здесь имеется затруднение, связанное с тем, что на исходной границе Γ_h нельзя оценить значение функции Δu. Однако вследствие условия Неймана можно сместить границу на один шаг h внутрь области, полагая затем с локальной погрешностью $O(h^2)$ на новой границе $u^h|_{\Gamma'} = \phi^h$ и

$$\Delta_h u^h_{i_1,i_2,\ldots,i_n}|_{\Gamma'} = \frac{u^h_{i_1-1,i_2,\ldots,i_n} + \cdots + u^h_{i_1,i_2,\ldots,i_n+1}}{h^2} - \frac{2n u^h_{i_1,i_2,\ldots,i_n}}{h^2}. \tag{4.3}$$

Последнее соотношение дает следующую модификацию схемы блуждания, сформулированной в п. 1 настоящего раздела. При попадании траектории на Γ' для вычисления функции $v^h = \Delta_h u^h$ к оценке дополнительно суммируются известные слагаемые из правой части соотношения (4.3), связанные с Γ_h и Γ'; после этого осуществляется переход в один из внутренних узлов, соответственно остальным слагаемым, с домножением веса на величину $h^2 m_i/(2n)$, где m_i — число неизвестных слагаемых, т. е. вариантов перехода. Математическое ожидание получаемой таким образом случайной оценки в условиях теоремы 3.1, т. е. для достаточно малой области, конечно, так как переход к вычислению функции v^h осуществляется с вероятностью $h^2/(2n)$. Поэтому осреднение рекурсивного представления новой оценки дает систему разностных уравнений с учетом использованного сдвига границы.

Нетрудно понять, что дисперсия оценки здесь имеет порядок величины h^{-2}, что увеличивает трудоемкость алгоритма в лучшем случае множителем $O(\delta^{-1})$. Следовательно, необходимо дальнейшее изучение и модификация такой оценки.

5. Оценка решения метагармонического уравнения и первого собственного числа разностного уравнения оператора Лапласа

1. Достаточно ясным способом рассмотренная в разд. 2 векторная оценка распространяется на следующую задачу Дирихле для бигармонического уравнения:

$$\begin{gathered}(\Delta + c^{(1)})(\Delta + c^{(2)})\ldots(\Delta + c^{(m)})u = -g,\\ \left.\left[\prod_{l=k}^{m}(\Delta + c^{(k)})\right]u\right|_{\Gamma} = \phi^{(k-1)}, \quad k = 2,\ldots,m, \quad u|_{\Gamma} = \psi\end{gathered} \tag{5.1}$$

с комплексными коэффициентами $c^{(k)}$. При этом k-я строка блочной матрицы системы типа (2.1), а тем самым и матрицы весовых множителей (см. разд. 2) строится рекуррентно путем умножения элементов предыдущей $(k-1)$-й строки на величину

$$-\frac{h^2}{2n - c_i^{(k)h}} = -\frac{h^2}{2n} q_i^{(k)}$$

с добавлением блока $q^{(k)}K$ на диагонали. Следовательно, элементы нижней треугольной матрицы весовых множителей выражаются формулой

$$Q_{kl}^{(i)} = -\left(\frac{h^2}{2n}\right)^{k-l} \prod_{r=l}^{k} q_i^{(r)}, \quad l \leq k;\ k = 1, \ldots, m.$$

Свободные элементы системы здесь суть

$$f_i^{(k)h} = \begin{cases} (-\frac{h^2}{2n})^k g_i^h \prod\limits_{t=1}^{k} q_i^{(t)}, & r_i \in D_h \\ \phi_i^{(k)h}, & r_i \in \Gamma_h. \end{cases}$$

Используя блочно-треугольный вид системы так же, как в разд. 2, получаем, что если

$$M^h = \max[\mathrm{Re}(c^{(1)h}), \ldots, \mathrm{Re}(c^{(m)h})] < c_h^*,$$

то

$$u_{i_0}^h = \mathbf{E}\xi_{i_0},$$

где ξ_{i_0} — последняя компонента векторной оценки

$$\xi_{i_0} = \sum_{k=0}^{N} \left[\prod_{l=0}^{k} Q^{(i_l)}\right] \mathbf{F}_{i_k}.$$

Если же $M^h < c_h^*/2$, то $\mathbf{E}|\xi_{i_0}|^2 < +\infty$ и, более того, величина $\mathbf{E}|\xi_{i_0}|^2$ ограничена равномерно по i_0 и по h. Отметим, что в случае постоянных коэффициентов $c^{(k)}$ строго по аналогии с вышеизложенным можно построить оценку на «блуждании по сферам» [1, 3] для решения задачи (5.1) непосредственно без использования разностного приближения. Обоснование такой оценки осуществимо на основе результатов работы [6] и треугольного вида соответствующих базовых операторов $\mathbf{K}$ и $\mathbf{K}_p$ согласно изложенному в разд. 2. Трудоемкость оценки на «блуждании по сферам» ограничена величиной порядка $c^{(n)}|\ln\delta|\delta^{-2}$, причем $c^{(n)}$ — асимптотически линейно по n растущая функция.

2. Нетрудно видеть, что при $c = \mathrm{const}$ m-кратные производные по этому параметру от решения задачи

$$\Delta_h u^h + cu^h = 0, \quad u^h|_{\Gamma_h} = 1 \tag{5.2}$$

удовлетворяют соотношениям

$$\Delta_h u_{(m)}^h + cu_{(m)}^h = -mu_{(m-1)}^h, \quad u_{(m)}^h|_{\Gamma_h} = 0,$$

т. е. фактически реализуют итерации резольвенты. Следовательно,

$$mu_{(m-1)}^h / u_m^h \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} c_h^* - c.$$

Прямое дифференцирование весовой оценки $\xi = [1 - ch^2/2n]^{-N}$ решения задачи (5.2) дает соотношение

$$u_{(m)}^h = \mathbf{E}\frac{N(N+1)\ldots(N+m-1)[h^2/(2n)]^m}{[1 - ch^2/(2n)]^{n+m}} = \mathbf{E}\xi^{(m)}.$$

Согласно изложенному в п. 1 настоящего раздела величина $\mathbf{D}\xi^{(m)}$ ограничена равномерно по h при $c < c_h^*/2$.

Ясно, что рассмотренный здесь алгоритм автоматически распространяется на оценку первого собственного числа для более общего оператора $\Delta u + c(r)$, соответствующего уравнению Шредингера.

Отметим, что метод Монте-Карло дает возможность одновременно оценивать производные по параметрам задачи и вероятностные моменты решения в задачах со случайными (в допустимых пределах) параметрами [1]. Он допускает также идеальное распараллеливание вычислений путем простого распределения независимых испытаний по вычислительным процессорам.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Mikhailov G. A.* Parametric estimates by the Monte Carlo method. Utrecht: VSP, 1999.

2. *Михайлов Г. А., Чешкова А. Ф.* Решение разностной задачи Дирихле для многомерного уравнения Гельмгольца методом Монте-Карло // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1996. Т. 38, № 1. С. 99–106.

3. *Ермаков С. М., Михайлов Г. А.* Статистическое моделирование. М.: Наука, 1982.

4. *Михайлов Г. А.* Новые методы Монте-Карло для решения уравнения Гельмгольца // Докл. РАН. 1992. Т. 326, № 6. С. 43–47.

5. *Михайлов Г. А.* Решение задачи Дирихле для нелинейных эллиптических уравнений методом Монте-Карло // Сиб. мат. журн. 1994. Т. 35, № 5. С. 1085–1093.

6. *Михайлов Г. А., Меньшиков Б. В.* Решение краевых задач с комплексными параметрами методом Монте-Карло // Сиб. мат. журн. 1996. Т. 37, № 4. С. 881–888.

Статья поступила 30 марта 2001 г.

Михайлов Геннадий Алексеевич
Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН,
просп. Акад. М. А. Лаврентьева, 6, Новосибирск 630090
gam@sscc.ru

Лукинов Виталий Леонидович
Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН,
просп. Акад. М. А. Лаврентьева, 6, Новосибирск 630090
mathem@mail.ru