Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2002. Том 43, № 3

УДК 519.21

ИНТЕГРО–ЛОКАЛЬНЫЕ И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ О БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЯХ СУММ СЛУЧАЙНЫХ ВЕКТОРОВ. РЕГУЛЯРНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

А. А. Боровков

Аннотация: Пусть $\xi(1), \xi(2), \dots$ — независимые d-мерные векторы, $d \geq 1$, распределенные как ξ, $S(n) = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi(i)$, $\Delta(x)$ — куб со стороной длины Δ и вершиной в точке $x = (x_1, \dots, x_d)$: $\Delta(x) = [y \in \mathbb{R}^d : x_i \leq y_i < x_i + \Delta]$.

В случае $\mathbf{E}\xi = 0$, $\mathbf{E}|\xi|^2 < \infty$ изучена асимптотика $\mathbf{P}(S(n) \in \Delta(x))$ при $t = |x| \gg \sqrt{n \ln n}$, $\Delta \in [\Delta_1, \Delta_2]$, $t^{-\gamma} \leq \Delta_1 < \Delta_2 = o(t)$, $\gamma > -1$, и при выполнении условий регулярности на $\mathbf{P}(\xi \in \Delta(x))$ при $x \to \infty$.

Аналогичные результаты получены в случае $\mathbf{E}|\xi|^2 = \infty$. В качестве следствия установлены интегральные теоремы о вероятностях больших уклонений, т. е. теоремы об асимптотике $\mathbf{P}(S(n) \in tG)$ при $t \to \infty$ и любых отделенных от 0 множествах G с достаточно гладкой границей. Рассмотрен также альтернативный подход к получению интегральных теорем. Библиогр. 6.

§ 1. Введение

Пусть $\xi(1), \xi(2), \dots$ — независимые d-мерные векторы, $d \geq 1$, распределенные как ξ, $S(n) = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi(i)$, $\Delta(x)$ — куб со стороной длины Δ и вершиной в точке $x = (x_1, \dots, x_d)$:

$$\Delta(x) = [y \in \mathbb{R}^d : x_i \leq y_i < x_i + \Delta],$$

(x, y) — стандартное скалярное произведение.

В первой части работы изучается асимптотика

$$\mathbf{P}(S(n) \in \Delta(x)) \tag{1.1}$$

при $t = |x| \gg N(n)$, где $|x|$ — евклидова норма x, $\Delta \in [\Delta_1, \Delta_2]$, $t^{-\gamma} \leq \Delta_1 < \Delta_2 = o(t)$, $\gamma > -1$, последовательность $N(n)$ определяет область больших уклонений (см. ниже), $N(n) = \sqrt{n \ln n}$ в случае $\mathbf{E}\xi = 0$, $\mathbf{E}|\xi|^2 < \infty$.

Если выполнено условие Крамера

$$\mathbf{E}e^{(\lambda, \xi)} < C < \infty \tag{1.2}$$

в окрестности некоторой точки $\lambda \neq 0$, то асимптотика $\mathbf{P}(S(n) \in \Delta(x))$ при $(\lambda, x) \to \infty$ изучена достаточно полно в [1]. В одномерном случае такие теоремы при $\Delta \geq c$ для «достаточно больших уклонений» можно получать из интегральных теорем; при $\Delta \to 0$ — из интегральных теорем с асимптотическими разложениями.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 00–15–96178 и 02–01–00902) и INTAS (грант 00265).

© 2002 Боровков А. А.

Если условие (1.2) не выполнено, то асимптотику (1.1) можно получать из интегральных теорем только при наличии в них асимптотических разложений. В случае $d = 1$, $\Delta = \mathrm{const}$, $\mathbf{E}|\xi|^b < \infty$, $b \geq 2$, такой путь использован в [2] (см. теорему 9); асимптотика $\mathbf{P}(S(n) \in \Delta(x))$ там найдена при $x \gg \max(N(n), n^{\frac{1}{b-1}})$ и выполнении некоторых условий гладкости на $\mathbf{P}(\xi > t)$ при $t \to \infty$.

Интегро-локальные теоремы об асимптотике вероятностей (1.1) представляют значительный самостоятельный интерес; они оказываются весьма полезными при оценках интегралов вида $\mathbf{E}(f(S_n); S_n \in xG)$ для широкого класса функций f, где $x \to \infty$, G — некоторое отделенное от нуля «телесное» множество (некоторые дополнительные комментарии по поводу интегро-локальных теорем в многомерном случае см. в начале § 4).

В § 2 настоящей работы изучается асимптотика (1.1) в одномерном случае $d = 1$ при условии $\mathbf{E}\xi = 0$, $\mathbf{E}|\xi|^2 < \infty$ и регулярном поведении $\mathbf{P}(\xi \in \Delta(t))$ при $t \to \infty$.

В § 3 аналогичные результаты установлены при $\mathbf{E}|\xi|^2 = \infty$.

В многомерном случае $d > 1$ асимптотика (1.1) изучается в § 4 при регулярном поведении $\mathbf{P}(\xi \in \Delta(x))$, когда x неограниченно возрастает в заданном конусе. Рассмотрены как случай $\mathbf{E}\xi = 0$, $\mathbf{E}|\xi|^2 < \infty$, так и случай $\mathbf{E}|\xi|^2 = \infty$. Рассмотрен также более общий подход к задаче, когда условия регулярности накладываются на $\mathbf{P}(S(j) \in \Delta(x), \overline{B}^{(j)})$ при фиксированных j и событиях $\overline{B}^{(j)}$, означающих, что все скачки $\xi(1), \dots, \xi(j)$ были большими (точнее см. в (4.14)).

Интегральные теоремы о больших уклонениях, т. е. теоремы об асимптотике $\mathbf{P}(S(n) \in tG)$ при $t \to \infty$, установлены в § 5 в качестве следствия интегро-локальных теорем § 4. Рассмотрен также альтернативный подход к получению интегральных теорем, не связанный с интегро-локальными теоремами.

Разумеется, асимптотика (1.1) может быть найдена, если ξ имеет плотность и мы имеем асимптотическое представление для плотности $S(n)$ (ср. с теоремой 8 в [2]).

§ 2. Интегро-локальные теоремы для сумм одномерных случайных величин с конечной дисперсией

Введем в рассмотрение следующее условие регулярности $\mathbf{P}(\xi \in \Delta(t))$ при $\Delta(t) = [t, t + \Delta)$, $t \to \infty$.

(D) *Существуют функции $\Delta_1 = \Delta_{1,t} \geq t^{-\gamma}$ при некотором $\gamma > -1$ и $\Delta_2 = \Delta_{2,t} = o(t)$ такие, что для любого $\Delta \in [\Delta_1, \Delta_2]$ и $t \to \infty$*

$$\mathbf{P}(\xi \in \Delta(t)) = \Delta v(t)(1 + o(1)), \tag{2.1}$$

где

$$v(t) = \alpha t^{-\alpha-1} L(t), \tag{2.2}$$

$\alpha > 0$, $L(t)$ — медленно меняющаяся функция (м.м.ф.) *при $t \to \infty$, остаточный член $o(1)$ в (2.1) равномерен в следующем смысле: существует функция $\varepsilon_u \downarrow 0$ при $u \uparrow \infty$ такая, что $o(1)$ в (2.1) можно заменить на $\varepsilon(t, \Delta) \leq \varepsilon_u$ для всех $t \geq u \to \infty$ и $\Delta \in [\Delta_1, \Delta_2]$.*

В решетчатом случае с шагом решетки, равным 1, предполагается, что $\Delta_1 \geq 1$ и значения t и $t + \Delta$ в (2.1) берутся из соответствующей решетки.

Нетрудно видеть, что условие (D) выполнено при любом $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 = o(t)$, если

$$V(t) = \mathbf{P}(\xi > t) \sim t^{-\alpha} L(t) \tag{2.3}$$

удовлетворяет условию $[D_1]$ в [2], которое можно называть условием дифференцируемости $V(t)$ на бесконечности (в решетчатом случае сказанное остается справедливым при $\Delta_1 \geq 1$).

Наоборот, (2.2) всегда влечет за собой (2.3).

Теорема 2.1. *Пусть* $\mathbf{E}\xi = 0$, $\mathbf{E}\xi^2 < \infty$, $\alpha > 2$ *и выполнено условие* (D). *Тогда при* $x \gg \sqrt{n \ln n}$

$$\mathbf{P}(S(n) \in \Delta(x)) = n\Delta v(x)(1 + o(1)), \tag{2.4}$$

где остаточный член $o(1)$ *равномерен в следующем смысле: для любой последовательности* $b(n) \to \infty$ *найдется последовательность* $R(n) \to 0$ *такая, что* $o(1)$ *в* (2.4) *можно заменить на* R, $|R| \leq R(n)$ *при всех* $x > b(n)\sqrt{n \ln n}$ *и всех* $\Delta \in [\Delta_1, \Delta_2]$.

Как уже отмечалось, при $\Delta = \mathrm{const}$, $x \gg n^{\frac{1}{b-1}}$ и выполнении условия $[D_1]$ в [2] утверждение (2.4) вытекает из теоремы 9 в [2].

Доказательство теоремы следует схеме доказательства основных утверждений [2]. Для $y < x$ обозначим

$$A = \{S(n) \in \Delta(x)\}, \quad B_j = \{\xi(j) \leq y\}, \quad B = \bigcap_{j=1}^{n} B_j.$$

Тогда

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(AB) + \mathbf{P}(A\overline{B}), \tag{2.5}$$

где

$$\sum_{j=1}^{n} \mathbf{P}(A\overline{B}_j) \geq \mathbf{P}(A\overline{B}) \geq \sum_{j=1}^{n} \mathbf{P}(A\overline{B}_j) - \sum_{i \neq j} \mathbf{P}(A\overline{B}_i\overline{B}_j). \tag{2.6}$$

Доказательство разобьем на три этапа: оценка $\mathbf{P}(AB)$, оценка $\mathbf{P}(A\overline{B}_i\overline{B}_j)$, $i \neq j$, и оценка $\mathbf{P}(A\overline{B}_j)$.

1. Оценка $\mathbf{P}(AB)$. Воспользуемся грубым неравенством

$$\mathbf{P}(AB) \leq \mathbf{P}(S(n) > x, B) \tag{2.7}$$

и результатами [3], в силу которых при $x = ry$, фиксированном $r > 2$, любом $\delta > 0$ и $\frac{y}{\sqrt{n \ln n}} \to \infty$

$$\mathbf{P}(S(n) > x, B) \leq (nV(y))^{r-\delta}, \tag{2.8}$$

где $V(y) = y^{-\alpha}L(y)$ (см. следствие 4.1 в [3]). Выберем теперь r так, чтобы выполнялось

$$(nV(x))^{r-\delta} \ll n\Delta v(x) \tag{2.9}$$

при $x \gg \sqrt{n}$, $\Delta \geq x^{-\gamma}$. Для этого достаточно выбрать $r' = r - 1 - \delta$ таким образом, чтобы выполнялось

$$r' < \frac{1}{2}(r'\alpha - 1 - \gamma),$$

что при $\alpha > 2$ равносильно неравенству

$$r' > \frac{1+\gamma}{\alpha - 2}.$$

При таких r' в силу (2.7)–(2.9) будет выполняться

$$\mathbf{P}(AB) = o(n\Delta v(x)). \tag{2.10}$$

2. Оценка $\mathbf{P}(A\overline{B}_i\overline{B}_j)$. Достаточно оценить $\mathbf{P}(A\overline{B}_{n-1}\overline{B}_n)$. Обозначим

$$\rho = \frac{1}{r} < \frac{1}{2}, \quad G_k = \{v : v < x(1-k\rho) + \Delta\}, \quad k = 1, 2.$$

Тогда

$$\mathbf{P}(A\overline{B}_{n-1}\overline{B}_n) = \int\limits_{G_2} \mathbf{P}(S(n-2) \in dz) \\ \times \int\limits_{v \in G_1} \mathbf{P}(z + \xi \in dv, \xi > \rho x)\mathbf{P}(v + \xi \in \Delta(x), \xi > \rho x). \quad (2.11)$$

Так как в области G_1 выполняется $x - v > \rho x - \Delta$, то последний множитель в правой части (2.11) согласно условию (D) имеет вид $\Delta v(x - v) \le c\Delta v(x)$, так что $\int\limits_{G_1}$ в (2.11) не превосходит

$$c\Delta v(x)\mathbf{P}(z + \xi \in G_1; \xi > \rho x) \le c\Delta v(x)V(\rho x).$$

Такую же оценку допускает, очевидно, и интеграл по области G_2 в (2.11). Отсюда следует, что

$$\sum_{i \ne j} \mathbf{P}(A\overline{B}_i\overline{B}_j) \le c_1 \Delta n^2 v(x)V(x) = o(\Delta n v(x)). \quad (2.12)$$

Здесь и в дальнейшем буквой c с индексами или без мы будем обозначать различные постоянные, не обязательно одни и те же, если они используются в разных формулах.

3. Оценка $\mathbf{P}(A\overline{B}_j)$. В силу (2.6), (2.10), (2.12) эти слагаемые будут определять главную часть асимптотики $\mathbf{P}(A\overline{B})$ и $\mathbf{P}(A)$. Ввиду условия (D) имеем

$$\mathbf{P}(A\overline{B}_n) = \int\limits_{-\infty}^{x(1-\rho)+\Delta} \mathbf{P}(S(n-1) \in dz)\mathbf{P}(\xi \in \Delta(x-z), \xi > \rho x)$$

$$\le \int\limits_{-\infty}^{x(1-\rho)+\Delta} \mathbf{P}(S(n-1) \in dz)\mathbf{P}(\xi \in \Delta(x-z)) \sim \Delta \int\limits_{-\infty}^{x(1-\rho)+\Delta} \mathbf{P}(S(n-1) \in dz)v(x-z)$$

$$= \Delta\mathbf{E}[v(x - S(n-1)); S(n-1) \le x(1-\rho) + \Delta] \sim \Delta v(x). \quad (2.13)$$

Последнее соотношение при $x \gg \sqrt{n}$ справедливо, так как в силу неравенства Чебышева $\mathbf{E}[v(x - S(n-1)); |S(n-1)| < M(n)] \sim v(x)$ при $M \to \infty$, $M\sqrt{n} = o(x)$ и, кроме того, имеют место очевидные оценки

$$\mathbf{E}[v(x - S(n-1)); S(n-1) \in (M\sqrt{n}, x(1-\rho) + \Delta)] = o(v(x))$$

и

$$\mathbf{E}[v(x - S(n-1)); S(n-1) \in (-\infty, -M\sqrt{n})] = o(v(x))$$

при $M \to \infty$.

Аналогичным образом в силу (2.13) находим

$$\mathbf{P}(A\overline{B}_n) \ge \int\limits_{-\infty}^{x(1-\rho)} \mathbf{P}(S(n-1) \in dz)\mathbf{P}(\xi \in \Delta(x-z)) \sim \Delta v(x). \quad (2.14)$$

Из (2.13), (2.14) получаем $\mathbf{P}(A\overline{B}_n) = \Delta v(x)(1+o(1))$. Вместе с (2.6), (2.10), (2.12) это дает $\mathbf{P}(A) = \Delta n v(x)(1+o(1))$. Требуемая равномерность оценки $o(1)$ очевидным образом вытекает из приведенных выше рассуждений. Теорема доказана.

Замечание 2.1. Для оценки $\mathbf{P}(AB)$ (см. п. 1 доказательства теоремы 2.1) вместо грубого неравенства (2.7) можно использовать более точные подходы, которые дают более сильные результаты. Заметим, что $\mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(B)\mathbf{P}(A/B)$, где $\mathbf{P}(A/B) = \mathbf{P}(S'(n) \in \Delta(x))$, $S'(n) = \sum\limits_{j=1}^{n} \xi'_j$, ξ'_j суть «срезанные» на уровне y случайные величины с распределением

$$\mathbf{P}(\xi' < t) = \frac{\mathbf{P}(\xi < t)}{\mathbf{P}(\xi < y)}, \quad t \le y,$$

так что

$$\varphi(\lambda) \equiv \mathbf{E}e^{\lambda\xi'} = \frac{R(\lambda, y)}{\mathbf{P}(\xi < y)}, \quad R(\lambda, y) = \mathbf{E}(e^{\lambda\xi}; \xi < y).$$

Так как ξ' ограничена, то при $\lambda > 0$ и $\varphi(\lambda) < \infty$ мы можем сделать преобразование Крамера над распределением ξ' и ввести в рассмотрение случайные величины ξ''_j с распределением

$$\mathbf{P}(\xi'' \in dt) = \frac{e^{\lambda t}\mathbf{P}(\xi' \in dt)}{\varphi(\lambda)}. \tag{2.15}$$

Тогда (см., например, [4])

$$\mathbf{P}(S'(n) \in dt) = e^{-\lambda t}\varphi^n(\lambda)\mathbf{P}(S''(n) \in dt),$$

где $S''(n) = \sum\limits_{j=1}^{n} \xi''_j$. Поскольку $\mathbf{P}(B) = (\mathbf{P}(\xi < y))^n$, то

$$\begin{gathered}\mathbf{P}(S'(n) \in \Delta(x)) \le e^{-\lambda x}\varphi^n(\lambda)\mathbf{P}(S''(n) \in \Delta(x)),\\ \mathbf{P}(AB) \le e^{-\lambda x}R(\lambda, y)^n\mathbf{P}(S''(n) \in \Delta(x)).\end{gathered} \tag{2.16}$$

Но произведение $e^{-\lambda x}R(\lambda, y)^n$ в (2.16) это как раз то количество, с помощью которого оценивают обычно $\mathbf{P}(S'(n) > x)$ и которое является главным объектом оценок в [3]. В частности, установлено (см. [3, § 4]), что при $\lambda = \frac{1}{y}\ln\frac{r}{nV(y)}$, $x \to 0$ и любом $\delta > 0$

$$e^{-\lambda x}R(\lambda, y)^n \le [nV(x)]^{-r+\delta},$$

так что

$$\mathbf{P}(AB) \le [nV(x)]^{-r+\delta}\mathbf{P}(S''(n) \in \Delta(x)). \tag{2.17}$$

Это неравенство является более точным по сравнению с (2.7), (2.8), так как в правой части (2.17) стоит множитель $\mathbf{P}(S''(n) \in \Delta(x))$, который в силу известных оценок для функции концентрации не превосходит $\frac{c(\Delta+1)}{\sqrt{n}}$ при всех n и Δ; и $\frac{c}{\sqrt{n}}Q(\Delta)$ при всех n и $\Delta \le 1$, где $Q(\Delta) = \sup\limits_t \mathbf{P}(\xi'' \in \Delta(t)) \le 1$ — функция концентрации ξ'' (см., например, лемму 9 и теорему 11 гл. 3 в [5]). Это означает, что при любых $\delta > 0$, $\Delta > 0$ и $x \to \infty$

$$\mathbf{P}(AB) \le [nV(x)]^{-r-\delta}\frac{1+\Delta}{\sqrt{n}}. \tag{2.18}$$

Нетрудно видеть, что если ξ имеет ограниченную плотность $v(x)$ и $v(x) = O(V(x))$ при $x \to \infty$, то преобразование Крамера (2.15) при выбранном выше значении λ дает распределение ξ'', которое также имеет ограниченную плотность и, стало быть, $Q(\Delta) \le c\Delta$. В этом случае мы будем иметь также

$$\mathbf{P}(AB) \le [nV(x)]^{-r+\delta} \frac{\Delta}{\sqrt{n}} \tag{2.19}$$

при любом $\Delta \le 1$. Неравенство (2.18) дает возможность получить оценку (2.10) при меньших значениях r, неравенство (2.19) — оценку (2.10) при любых $\Delta \le 1$ (необязательно $\Delta \ge \Delta_1$).

§ 3. Интегро-локальные теоремы в одномерном случае при бесконечном втором моменте

В этом разделе мы опять будем предполагать выполненным условие (D), но при $\alpha < 2$. В этом случае

$$V(t) \equiv \mathbf{P}(\xi > t) \sim t^{-\alpha} L(t), \quad \mathbf{E}|\xi|^2 = \infty.$$

Здесь нам понадобится также «левый хвост» распределения ξ, относительно которого будет предполагаться, что он либо обладает свойством

$$\mathbf{P}(\xi < -t) = o(V(t)) \quad \text{при} \quad t \to \infty, \tag{3.1}$$

либо мажорируется регулярной функцией $W(t)$:

$$\mathbf{P}(\xi < -t) \le W(t) = t^{-\alpha_W} L_W(t), \tag{3.2}$$

где $\alpha_W \le \alpha$, $L_W(t)$ — м.м.ф.

Положим

$$\alpha^* = \begin{cases} \alpha & \text{в случае (3.1)}, \\ \alpha_W & \text{в случае (3.2)}. \end{cases}$$

Ниже мы рассмотрим две альтернативные возможности:

1) $\alpha < 1$, $x > n^{1/\theta}$; (3.3)

2) $\alpha \in (1, 2)$, существует $\mathbf{E}\xi = 0$, $x > n^{1/\theta}$, (3.4)

где $\theta < \alpha^*$ — любое фиксированное число.

Теорема 3.1. *Пусть выполнено условие* (D). *Тогда в названных выше двух случаях* (3.3) *и* (3.4) *при выполнении одного из условий* (3.1) *или* (3.2) *справедливо* (2.4). *При этом остается справедливым утверждение относительно равномерной малости остаточного члена в* (2.4) *при всех* $x \ge x^* \to \infty$, $x > n^{1/\theta}$ *и всех* $\Delta \in [\Delta_1, \Delta_2]$.

Доказательство. Схема доказательства остается здесь той же, что и в теореме 2.1. Воспользуемся опять представлениями (2.5), (2.6) и произведем следующие оценки.

1. Оценка $\mathbf{P}(AB)$. В силу (2.7) и теорем 2.1 и 3.1 в [3] при $x > n^{1/\theta}$, $x \to \infty$, справедливо

$$\mathbf{P}(AB) < c[nV(y)]^r, \quad r = \frac{x}{y}.$$

Выберем r так, чтобы выполнялось

$$(nV(x))^r \ll n\Delta v(x) \tag{3.5}$$

при $x > n^{1/\theta}$, $\Delta \geq x^{-\gamma}$ и любом $\theta < \min(\alpha, \alpha_W) = \alpha^*$ (для таких x имеем $nV(x) \to 0$, $nW(x) \to 0$). Нетрудно видеть, что требуемое неравенство (3.5) будет выполнено, если

$$r - 1 > \frac{1+\gamma}{\alpha - \theta}.$$

Стало быть, для таких r

$$\mathbf{P}(AB) = o(n\Delta v(x)). \tag{3.6}$$

2. Оценка $\mathbf{P}(A\overline{B}_i\overline{B}_j)$ происходит точно так же, как в теореме 2.1, и дает (2.12).

3. Оценка $\mathbf{P}(A\overline{B}_j)$ также происходит аналогично теореме 2.1. Как и в (2.13), получаем

$$\mathbf{P}(A\overline{B}_n) \leq \Delta \mathbf{E}[v(x - S(n-1)); S(n-1) < x(1-\rho) + \Delta](1 + o(1)).$$

Положим

$$N(n) = \begin{cases} V^{(-1)}(\frac{1}{n}) & \text{в случае (3.1)}, \\ W^{(-1)}(\frac{1}{n}) & \text{в случае (3.2)}, \end{cases}$$

где $V^{(-1)}$, $W^{(-1)}$ — функции, обратные соответственно к V и W. Тогда в силу следствий 2.1, 3.1 в [3] будет выполняться $\mathbf{P}(|S(n-1)| > MN(n)) \to 0$ при $M \to \infty$. Поэтому

$$\mathbf{E}[v(x - S(n-1)); |S(n-1)| < MN(n)] \sim v(x)$$

при $M \to \infty$, $MN(n) = o(n^{1/\theta})$, $x > n^{1/\theta}$, $\theta < \alpha^*$ (в этом случае $x \gg MN(n)$). Кроме того, при $M \to \infty$ справедливы очевидные оценки

$$\mathbf{E}[v(x - S(n-1)); S(n-1) \in (-\infty, -MN(n))] = o(v(x)),$$
$$\mathbf{E}[v(x - S(n-1)); S(n-1) \in (MN(n), x(1-\rho) + \Delta)] = o(v(x)).$$

Сказанное означает, что

$$\mathbf{P}(AB_n) \leq \Delta v(x)(1 + o(1)).$$

Совершенно аналогично с помощью неравенства

$$\mathbf{P}(AB_n) \geq \Delta \mathbf{E}[v(x - S(n-1)); S(n-1) \leq x(1-\rho)](1 + o(1))$$

получаем

$$\mathbf{P}(AB_n) \geq \Delta v(x)(1 + o(1)).$$

Вместе с предыдущим это доказывает (2.4). Утверждение о равномерности $o(1)$ в (2.4), как и в теореме 2.1, вытекает из приведенных выше оценок.

Теорема доказана.

Здесь, как и в § 2, справедливо замечание 2.1.

§ 4. Многомерный случай

При невыполнении условия Крамера (1.2) «собирательные» предельные теоремы об асимптотике (1.1) в многомерном случае отсутствуют: если в крамеровском случае асимптотика (1.1) определялась свойствами аналитической функции $\mathbf{E}e^{(\lambda,\xi)}$ (см., например, [1, 4, 5]), то при невыполнении (1.2) эта асимптотика начинает существенно зависеть от «конфигурации» распределения ξ. Следующие примеры иллюстрируют это обстоятельство.

1. Пусть $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_d)$, где ξ_i независимы и имеют хвосты распределений

$$V_i(t) = \mathbf{P}(\xi_i > t) = t^{-\alpha_i} L_i(t),$$

где L_i — м.м.ф. такие, что V_i удовлетворяют условию (D). Тогда, очевидно, при $\mathbf{E}|\xi|^2 < \infty$, $\min x_i \gg \sqrt{n \ln n}$ в силу теоремы 2.1

$$\mathbf{P}(S(n) \in \Delta(x)) = \Delta^d n^d \prod_{i=1}^{d} v_i(x_i)(1 + o(1)). \tag{4.1}$$

2. Аналогичный, в известном смысле, характер асимптотики (1.1) будет иметь место в случае, когда $\xi = (0, \dots, 0, \xi_i, 0, \dots, 0)$ с вероятностью p_i, $\sum\limits_{i=1}^{d} p_i = 1$, ξ_i вновь удовлетворяют (D). В этом случае в силу закона больших чисел или центральной предельной теоремы для полиномиальной схемы

$$\mathbf{P}(S(n) \in \Delta(x)) \sim \Delta^d \sum_{\sum n_i = n} p_1^{n_1} \dots p_d^{n_d} \frac{n_1! \dots n_d!}{n!} \prod_{i=1}^{d} n_i v_i(x_i) \sim \Delta^d n^d \prod_{i=1}^{d} p_i v_i(x_i). \tag{4.2}$$

В этих двух примерах асимптотика вероятности $\mathbf{P}(\xi \in \Delta(x))$ при $|x| \to \infty$ носит «звездчатый» характер: вдоль осей координат значения $\mathbf{P}(\xi \in \Delta(x))$, скажем, при равных $\alpha_i = \alpha$, значительно больше, чем, например, на «биссектрисе» $x = (t, \dots, t)$.

3. Если же $\mathbf{P}(\xi \in \Delta(x)) \sim \Delta^d v(x)$, где $v(x)$ имеет вид

$$v(x) = v_0(t) g(\mathrm{e}(x)), \tag{4.3}$$

$t = |x|$, $\mathrm{e}(x) = \frac{x}{t}$, g — непрерывная положительная функция на единичной сфере, то, как мы увидим ниже, в широких предположениях на функцию v_0 асимптотика (1.1) будет иметь вид

$$\mathbf{P}(S(n) \in \Delta(x)) \sim \Delta^d n v(x) \tag{4.4}$$

и, стало быть, будет носить существенно иной характер, чем в (4.1), (4.2).

4. Комбинируя примеры 1 и 3, т. е. рассматривая ξ с независимыми подвекторами, удовлетворяющими условиям (4.3), можно получить для $\mathbf{P}(S(n) \in \Delta(x))$ асимптотику вида

$$\Delta^d n^k \prod_{i=1}^{k} v_i(x)$$

при любом k, $1 \le k \le d$, где k будет определяться, грубо говоря, минимальным числом больших «регулярных» скачков, которые надо сделать, чтобы из 0 попасть в $\Delta(x)$.

Можно привести и другие примеры, иллюстрирующие тот факт, что даже для регулярных по направлениям хвостов распределения ξ асимптотика вероятностей больших уклонений в многомерном случае существенно зависит от «конфигурации» этого распределения. При этом в ряде случаев вызывает затруднения даже сама постановка общей задачи о больших уклонениях (одна из возможных общих постановок проиллюстрирована в теореме 4.3). По-видимому, этим объясняется отсутствие работ по большим уклонениям в многомерном «некрамеровском» случае (нам такие работы неизвестны). В то же время можно назвать большое количество работ о вероятностях больших уклонений в одномерном регулярном случае, где названная выше проблема, связанная с конфигурацией, отсутствует, а сама задача о больших уклонениях изучена весьма полно, включая асимптотические разложения и теоремы о больших уклонениях в пространстве траекторий (см. [2, 6]; там же см. более полную библиографию).

В настоящей работе мы остановимся на «наиболее регулярных» типах распределений ξ, например, вида (4.3) и установим справедливость асимптотики (4.4). Отметим при этом, что в многомерном случае язык интегро-локальных теорем является наиболее естественным и удобным, так как

1) описание асимптотики вероятности попадания в «малый» удаленный куб намного проще, чем аналогичное описание для произвольного удаленного множества;

2) проблема больших уклонений при этом решается, по существу, полностью, так как названные «локальные» вероятности для малых кубов позволяют без труда получать и «интегральные» вероятности попадания в произвольное множество;

3) при этом никаких дополнительных условий на распределение ξ по сравнению с интегральными теоремами по существу не накладывается; по сути, мы получаем локальные предельные теоремы без предположения о существовании плотности.

Ниже нам понадобится более точная, чем в (4.3), формулировка основных условий.

Мы будем изучать асимптотику $\mathbf{P}(\xi \in \Delta(x))$ в некотором секторе (конусе), т. е. для таких x, $t = |x| \to \infty$, для которых $\mathrm{e}(x) = \frac{x}{t} \in \Omega$. Множество Ω, характеризующее конус, будем считать открытым на единичной сфере. Условие (D) здесь будет состоять в следующем.

Обозначим через $\Pi(\mathrm{e})$ полупространство $\Pi(\mathrm{e}) = \{v \in \mathbb{R}^d : (v, \mathrm{e}) \geq 0\}$ и положим

$$\Pi(\Omega) = \bigcup_{\mathrm{e}\in\Omega} \Pi(\mathrm{e}).$$

Ясно, что если Ω содержит в себе полусферу, то $\Pi(\Omega)$ совпадает со всем пространством $\mathbb{R}^d$.

(D_Ω). *Существуют сектор Ω, $\Delta_1 \geq t^{-\gamma}$ при некотором $\gamma > -1$, $\Delta_2 = o(t)$ такие, что для любых $\Delta \in [\Delta_1, \Delta_2]$, $\mathrm{e}(x) \in \Omega$ и $t \to \infty$ выполняется*

$$\mathbf{P}(\xi \in \Delta(x)) = \Delta^d v(x)(1 + o(1)), \tag{4.5}$$

где

$$v(x) = v_0(t)g(\mathrm{e}(x)), \quad t = |x|, \quad \mathrm{e}(x) = \frac{x}{t}, \quad v_0(t) = t^{-\alpha-d}L(t),$$

$L(t)$ — м.м.ф. *при $t \to \infty$, $g(\mathrm{e})$ — непрерывная функция на Ω, удовлетворяющая на этом множестве неравенствам $0<g_1<g(\mathrm{e})<g_2<\infty$.*

Кроме того, предположим, что при всех $z \in \Pi(\Omega)$, $|z| \geq t$, выполняется

$$\mathbf{P}(\xi \in \Delta(z)) \leq c\Delta^d v_0(t). \tag{4.6}$$

Остаточный член $o(1)$ в (4.5) предполагается равномерным в следующем смысле: существует функция $\varepsilon_u \downarrow 0$ при $u \uparrow \infty$ такая, что $o(1)$ в (4.5) можно заменить на $\varepsilon(x, \Delta) \leq \varepsilon_u$ для всех $t \geq u \to \infty$, $\mathrm{e}(x) \in \Omega$, $\Delta \in [\Delta_1, \Delta_2]$.

Ясно, что при выполнении (D_Ω)

$$\mathbf{P}(|\xi| \in \Delta(t), \mathrm{e}(\xi) \in \Omega) \sim t^{d-1} v_0(t) \Delta c(\Omega), \tag{4.7}$$

так что левая часть в (4.7) имеет вид асимптотики (2.1).

Обозначим через $\partial\Omega$ границу множества Ω, $U^\varepsilon(\partial\Omega)$ — ε-окрестность $\partial\Omega$ и $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus U^\varepsilon(\partial\Omega)$ — «ε-внутренность» Ω.

Теорема 4.1. *Пусть* $\mathbf{E}\xi = 0$, $\mathbf{E}|\xi|^2 < \infty$, $\alpha > 2$ *и выполнено условие* (D_Ω). *Тогда для* $t = |x| \gg \sqrt{n \ln n}$ *и* $\mathrm{e}(x) \in \Omega_\varepsilon$ *при некотором* $\varepsilon > 0$

$$\mathbf{P}(S(n) \in \Delta(x)) = \Delta^d n v(x)(1 + o(1)), \tag{4.8}$$

где остаточный член $o(1)$ *равномерен в следующем смысле: для любой последовательности* $b(n) \to \infty$ *найдется последовательность* $R(n) \to 0$ *такая, что* $o(1)$ *в* (4.8) *можно заменить на* R, $|R| \le R(n)$ *при всех* $t > b(n)\sqrt{n \ln n}$, $\mathrm{e}(x) \in \Omega_\varepsilon$ *и* $\Delta \in [\Delta_1, \Delta_2]$.

Доказательство. Мы будем следовать схеме доказательства теоремы 2.1. Обозначим аналогично предыдущему

$$A = \{S(n) \in \Delta(x)\}, \quad B_j = \{(\xi(j), \mathrm{e}(x)) \le \rho t\}, \quad B = \bigcap_{j=1}^{n} B_j$$

и воспользуемся вновь соотношениями (2.5), (2.6).

1. Оценка $\mathbf{P}(AB)$. Нетрудно видеть, что при выполнении (D_Ω), $\mathrm{e}(x) \in \Omega$ и $t \to \infty$

$$\mathbf{P}((\xi, \mathrm{e}(x)) > t) \le V_0(t) \sim c t^d v_0(t) = c t^{-\alpha} L(t). \tag{4.9}$$

Поэтому аналогично предыдущему из следствия 4.1 в [3] получаем при любом $\delta > 0$ и $t \to \infty$

$$\mathbf{P}(AB) \le (nV_0(t))^{r-\delta}, \quad r = \frac{1}{\rho},$$

где $r - \delta$ выберем так, чтобы

$$[nV_0(t)]^{r-\delta} \ll n\Delta^d v_0(t).$$

Для $t \gg \sqrt{n}$, $\alpha > 2$ это соотношение будет выполнено, если $r' = r - \delta - 1$ удовлетворяет неравенству

$$r' > \frac{(1+\gamma)d}{\alpha - 2}.$$

Стало быть, при таких r'

$$\mathbf{P}(AB) = o(n\Delta^d v(x)). \tag{4.10}$$

2. Оценка $\mathbf{P}(A\overline{B}_{n-1}\overline{B}_n)$. Обозначим

$$G_k = \{v \in \mathbb{R}^d : (v, \mathrm{e}(x)) < t(1 - k\rho) + \Delta\sqrt{d}\}, \quad k = 1, 2.$$

Тогда $A\overline{B}_{n-1}\overline{B}_n \subset \{S(n-2) \in G_2\}$ и

$$\mathbf{P}(A\overline{B}_{n-1}\overline{B}_n) = \int\limits_{z \in G_2} \mathbf{P}(S(n-2) \in dz) \int\limits_{v \in G_1} \mathbf{P}(z + \xi \in dv, (\xi, \mathrm{e}(x)) > \rho t)$$
$$\times \mathbf{P}(v + \xi \in \Delta(x), \quad (\xi, \mathrm{e}(x)) > \rho t). \tag{4.11}$$

Так как для $v \in G_1$ выполняется $x - v \in \Pi(\Omega)$, $|x - v| > \rho t - \Delta\sqrt{d}$, то в силу (4.6) последний множитель в (4.11) не превосходит $c\Delta^d v_0(t)$. Поэтому (см. также (4.9)) интеграл по области G_1 в (4.11) не превосходит

$$c\Delta^d v_0(t)\mathbf{P}((\xi, \mathrm{e}(x)) > \rho t) \le c_1\Delta^d v_0(t)V_0(t).$$

Такую же оценку допускает, очевидно, и интеграл по области G_2 в (4.11). Отсюда следует, что

$$\sum_{i\ne j}\mathbf{P}(A\overline{B}_i\overline{B}_j) \le c_1\Delta^d n^2 v_0(t)V_0(t) = o(n\Delta^d v(x)). \tag{4.12}$$

3. Оценка $\mathbf{P}(A\overline{B}_n)$. Так как по определению G_1 выполняется $A\overline{B}_n \subset \{S(n-1) \in G_1\}$, то в силу условия (D_Ω)

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(A\overline{B}_n) = \int\limits_{G_1}&\mathbf{P}(S(n-1)\in dz)\mathbf{P}(\xi\in\Delta(x-z), (\xi, \mathrm{e}(x)) > \rho t)\\ &\le \mathbf{E}[\mathbf{P}(\xi\in\Delta(x-S(n-1))\setminus S(n-1)); S(n-1)\in G_1]\\ \le \Delta^d\mathbf{E}[v(x-S(n-1)); &|S(n-1)| < \varepsilon t] + c\Delta^d v_0(t)\mathbf{P}(S(n-1)\in G_1\setminus U^{\varepsilon t}(\{0\})).\end{aligned}$$

Здесь $\mathrm{e}(x-z)\in\Omega$ при $|z| < \varepsilon t$, $\mathbf{P}(|S(n-1)| \ge \varepsilon t) \to 0$ при $t \gg \sqrt{n}$. Поэтому

$$\mathbf{P}(A\overline{B}_n) \le \Delta^d v(x)(1 + o(1)).$$

Если обозначить $G_0 = \{v\in\mathbb{R}^d : (v, \mathrm{e}(x)) < t(1-\rho) - \Delta\sqrt{d}\}$, то аналогичным образом находим

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(A\overline{B}_n) \ge \int\limits_{G_0}&\mathbf{P}(S(n-1)\in dz)\mathbf{P}(\xi\in\Delta(x-z))\\ &\ge \Delta^d\mathbf{E}[v(x-S(n-1)); |S(n-1)| < \varepsilon t] = \Delta^d v(x)(1+o(1)).\end{aligned}$$

Это означает, что

$$\mathbf{P}(A\overline{B}_n) = \Delta^d v(x)(1 + o(1)).$$

Вместе с (4.10), (4.12) это дает

$$\mathbf{P}(A) = n\Delta^d v(x)(1 + o(1)).$$

Требуемая равномерность оценок, как и прежде, вытекает из приведенных выше рассуждений. Теорема доказана.

Отметим, что если оценки при интегрировании в доказательстве теоремы сделать более точными, то условие (4.6) можно ослабить до

$$\mathbf{P}(\xi\in\Delta(z)) < c\Delta^d v_0(t)\frac{|z|^2}{n}$$

при $z\in\Pi(\Omega)$, $|z|\ge t$, $t \gg \sqrt{n}$ (ср. с условием (4.15) ниже).

Рассмотрим теперь случай, когда выполнено условие (D_Ω) настоящего раздела при $\alpha < 2$. При таких α условие (D_Ω) следует дополнить таким образом:

для любого e, $|\mathrm{e}| = 1$, *выполняется*

$$\mathbf{P}((\xi, \mathrm{e}) > t) \le W(t), \tag{4.13}$$

где $W(t)$ *является регулярной функцией вида* (3.2) *с показателем* $\alpha_W \le \alpha$.

Теорема 4.2. *Пусть выполнено условие* (D_Ω), *модифицированное описанным выше способом. Тогда в каждом из следующих двух случаев:*

1) $\alpha < 1$, $t = |x| > n^{1/\theta}$, $\theta < \alpha$,

2) $\alpha \in (1,2)$, *существует* $\mathbf{E}\xi = 0$, $\alpha_W > 1$, $t > n^{1/\theta}$, $\theta < \alpha_W$,

справедливо соотношение (4.8) *для всех* x *таких, что* $\mathrm{e}(x) \in \Omega_\varepsilon$, $t = |x| \to \infty$, $\Delta \in [\Delta_1, \Delta_2]$.

Здесь сохраняются утверждения теорем 3.1, 4.1 *о равномерности* $o(1)$ *по* $t \ge t^* \to \infty$, $t > n^{1/\theta}$, $\mathrm{e}(x) \in \Omega_\varepsilon$, $\Delta \in [\Delta_1, \Delta_2]$.

Доказательство теоремы 4.2 происходит совершенно аналогично доказательству теорем 3.1, 4.1, и мы предоставляем его читателю. На третьем этапе оценок (см. доказательство теорем 3.1, 4.1) надо воспользоваться соотношением

$$\mathbf{P}(|S(n-1)| > MN(n)) \to 0$$

при $M \to \infty$, где $N(n) = W^{(-1)}\left(\frac{1}{n}\right)$, которое вытекает из следствий 2.1, 3.1 в [3].

Вернемся к случаю $\mathbf{E}|\xi|^2 < \infty$ и рассмотрим теперь несколько более общую ситуацию, покрывающую примеры 1–4. Для простоты можно ограничиться случаем, когда конус, фигурирующий в теореме 4.1, совпадает с положительным ортантом, т. е. $\Omega = \{\mathrm{e} = (\mathrm{e}_1, \dots, \mathrm{e}_d) : \mathrm{e}_i \ge 0, |\mathrm{e}| = 1\}$. Обозначим, как и прежде,

$$t = |x|, \quad \overline{B}_j = \{(\xi(j), \mathrm{e}(x)) > \rho t\}, \quad \overline{B}^{(k)} = \bigcap_{j=1}^{k} \overline{B}_j.$$

Мы будем предполагать, что *при каждом фиксированном* j *и значениях* Δ, *описанных в условии* (D_Ω),

$$\mathbf{P}(S(j) \in \Delta(x), \overline{B}^{(j)}) = \Delta^d v_{(j)}(t) g_{(j)}(\mathrm{e}(x))(1 + o(1)) \tag{4.14}$$

при $t = |x| \to \infty$, $\mathrm{e}(x) \in \Omega_\varepsilon$, $\varepsilon > 0$, *где* $v_{(j)}$ — *регулярные функции (вида* $v_{(j)}(t) = t^{-\alpha_{(j)} - d} L_{(j)}(t)$, $\alpha_{(j)} > 2$, $L_{(j)}$ — м.м.ф.), $g_{(j)}$ — *строго положительные непрерывные функции на* Ω_ε, *остаточный член* $o(1)$ *равномерен в том же смысле, что и в условии* (D_Ω). *Кроме того, при* $z \in \Pi(\Omega)$, $|z| \ge t$, $t \gg \sqrt{n}$

$$\mathbf{P}(S(j) \in \Delta(z), \overline{B}^{(j)}) \le c \Delta^d v_{(j)}(t) \frac{|z|^2}{n}. \tag{4.15}$$

Нам понадобится условие

(D^*_Ω). *Пусть существует* k, *обладающее следующими свойствами:*

a) *при всех* $j \le k$ *выполнены соотношения* (4.14), (4.15);

b) $v_{(j)}(t) = o(v_{(k)}(t) n^{k-j})$ *при* $t \to \infty$ *и* $j < k$;

c) $\mathbf{P}(S(n) \in \Delta(x); \widetilde{B}^{(k+1)}) = o(\Delta^d v_{(k)}(t) n^k)$, *где*

$$\widetilde{B}^{(k+1)} = \bigcup_{i_1, \dots, i_{k+1} = 1}^{n} \overline{B}_{i_1} \dots \overline{B}_{i_{k+1}}$$

означает, что произошло $k+1$ *или более событий вида* $\overline{B}_i$.

Каждое из следующих двух условий является достаточным для выполнения (c):

1) $n\mathbf{P}(\overline{B}_1) = o(\Delta^d v_{(k)}(t))$, (4.16)

2) *при* $j = k+1$ *выполнено* (4.15) *и* $n v_{(k+1)}(t) \le c v_{(k)}(t)$. (4.17)

Достаточность этих условий будет доказана в конце доказательства теоремы 4.3.

В примере 1 для независимых координат ξ_i при $\mathrm{e}(x) \in \Omega$, $j \le k = d$ и достаточно малом ρ имеем

$$\mathbf{P}(S(j) \in \Delta(x), \overline{B}^{(j)}) \sim \mathbf{P}(S(j) \in \Delta(x)) \sim (j\Delta)^d \prod_{i-1}^{d} v_i(x_i). \tag{4.18}$$

Эти соотношения объясняются тем, что основной вклад в рассматриваемые вероятности вносят вероятности событий вида

$$\{\xi_1(i_1) \in \Delta(x_1), \xi_2(i_2) \in \Delta(x_2), \dots, \xi_d(i_j) \in \Delta(x_d)\}$$

и событий, отличающихся от названных перестановками индексов $i_1, \dots, i_j$: все из них различны.

При $j \le d$ и дополнительных условиях вида $\mathbf{P}(\xi_i \in \Delta(z_i)) \le c\Delta v_i(|z_i|)$ для $z_i < 0$ выполняется также

$$\mathbf{P}(S(j) \in \Delta(z), \overline{B}^{(j)}) \le c(j,k)\Delta^d \prod_{i=1}^{d} v_i(|z_i|) \tag{4.19}$$

для всех $z \in \Pi(\Omega)$.

Далее, пусть для определенности $v_1(t) = \min\limits_{i \le d} v_i(t)$. Тогда для $\mathrm{e}(x) \in \Omega_\varepsilon$, $\varepsilon > 0$,

$$\mathbf{P}(\overline{B}_1)^j \le (c_1 v_1(t))^j,$$

и соотношение (4.16) будет выполнено, если

$$n v_1(t) = o\left(\Delta^d \prod_{i=1}^{d} \frac{v_i(t)}{v_1(t)}\right).$$

Ясно, что это соотношение всегда выполнено, скажем, в случае $\Delta \ge 1$, $v_i(t) \le c v_1(t)$, так как $n v_1(t) \to 0$ при $t \gg \sqrt{n}$. Выполнение соотношений (a) и (b) в (D^*_Ω) при $n \to \infty$ вытекает из (4.16), (4.19).

Нетрудно убедиться также, что в примере 3 условие (D^*_Ω) выполнено при $k = 1$.

Теорема 4.3. *Пусть $\mathbf{E}\xi = 0$, $\mathbf{E}|\xi|^2 < \infty$ и выполнены условия (D^*_Ω). Тогда для $t = |x| \gg \sqrt{n \ln n}$ и $\mathrm{e}(x) \in \Omega_\varepsilon$ при некотором $\varepsilon > 0$ справедливо*

$$\mathbf{P}(S(n) \in \Delta(x)) = \Delta^d n^k v_{(k)}(t) g_{(k)}(\mathrm{e}(x))(1 + o(1)),$$

где остаточный член $o(1)$ равномерен в том же смысле, что и в теореме 4.1.

Доказательство. Схема рассуждений здесь несколько изменится. Мы вновь воспользуемся равенством (2.5), но для вероятности $\mathbf{P}(A\overline{B})$ будем использовать представление

$$\mathbf{P}(A\overline{B}) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}\big(AB_i^{(1)}\big) + \sum_{i,j=1}^{n} \mathbf{P}\big(AB_{ij}^{(2)}\big) + \dots + \sum_{i_1, i_2, \dots, i_k = 1}^{n} \mathbf{P}\big(AB_{i_1,\dots,i_k}^{(k)}\big) + \mathbf{P}(A\widetilde{B}^{(k+1)}), \tag{4.20}$$

где $B^{(j)}_{i_1,\dots,i_j}$ — событие, состоящее в том, что за время n произошло ровно j событий $\overline{B}_{i_1},\dots,\overline{B}_{i_j}$; $\widetilde{B}^{(k+1)}$ означает, что произошло $k+1$ или более событий этого вида.

Оценка $\mathbf{P}(AB)$. Из (4.14) путем «интегрирования по кубикам $\Delta(x)$» находим $\mathbf{P}(\overline{B}_j)\sim cv_{(1)}(t)t^d=ct^{-(\alpha_{(1)})}L_{(1)}(t)\equiv v_0(t)$. Поэтому, используя опять следствие 4.1 в [3], получим при любом $\delta>0$ и достаточно большом t

$$\mathbf{P}(AB)\le (nv_0(t))^{r-\delta},\quad r=\frac{1}{\rho}.$$

Выберем теперь $r-\delta$ так, чтобы $(nv_0(t))^{r-\delta}=o(\Delta^d n^k v_{(k)}(t))$. Для этого при $t\gg n^{1/2}$ достаточно взять $r-\delta>\frac{\gamma+\alpha_{(k)}-2k}{\alpha_{(1)}-2}$ (ср. с оцениванием $\mathbf{P}(AB)$ в теореме 4.1). Таким образом,

$$\mathbf{P}(AB)=o(\Delta^d n^k v_{(k)}(t)).\tag{4.21}$$

Оценка $\mathbf{P}(AB^{(j)}_{i_1,\dots,i_j})$, $j\le k$. Имеем

$$\mathbf{P}(AB^{(j)}_{i_1,\dots,i_j})=\int\limits_{G_1}\mathbf{P}\Bigg(S(n-j)\in dz,\bigcap_{i=1}^{n-j}B_i\Bigg)\mathbf{P}\big(S(j)\in\Delta(x-z),\overline{B}^{(j)}\big),\tag{4.22}$$

где, как и прежде, $G_1=\{v\in\mathbb{R}^d:(v,\mathrm{e}(x))<t(1-\rho)+\Delta\sqrt{d}\}$. Ясно, что $x-z\in\Pi(\Omega)$ при $z\in G_1$ и, кроме того, $|x-z|>\rho t-\Delta\sqrt{d}\sim\rho t$. Поэтому ко второму сомножителю под интегралом в (4.22) мы можем применить условие (4.15). Кроме того, этот сомножитель асимптотически эквивалентен правой части (4.14) при $|z|<\varepsilon t$ и $\varepsilon\to 0$.

В первом сомножителе

$$\mathbf{P}\Bigg(\bigcap_{i=1}^{n-j}B_i\Bigg)=(1-\mathbf{P}(\overline{B}_1))^{n-j}\ge(1-c_1v_1(t))^n\to 1,$$

$$\mathbf{P}(|S(n-j)|<\varepsilon t)\to 1,\quad \mathbf{P}\Bigg(|S(n-j)|<\varepsilon t,\bigcap_{i=1}^{n-j}B_i\Bigg)\to 1$$

при $\varepsilon t\gg\sqrt{n}$.

Представим теперь интеграл в (4.22) в виде суммы интегралов $\int\limits_{U^{\varepsilon t}}+\int\limits_{G_1\overline{U}^{\varepsilon t}}$. Тогда первый интеграл в силу (D^*_Ω) и сказанного выше будет асимптотически эквивалентен

$$\Delta^d v_{(j)}(t)g_{(j)}(\mathrm{e}(x)).$$

Второй интеграл в силу (4.15) не превосходит

$$c\Delta^d v_{(j)}(t)\mathbf{E}\bigg[\frac{|S(n-j)|^2}{n};S(n-j)\in G_1\cap\overline{U}^{\varepsilon t}\bigg]=o(\Delta^d v_{(j)}(t)).$$

Таким образом,

$$\mathbf{P}\big(AB^{(j)}_{i_1,\dots,i_j}\big)=\Delta^d v_{(j)}(t)g_{(j)}(\mathrm{e}(x))(1+o(1)).\tag{4.23}$$

Асимптотика $\mathbf{P}(A)$. Мы можем вернуться теперь к (2.5), (4.20). Собирая оценки (4.21), (4.23), в силу (D^*_Ω) получим

$$\mathbf{P}(A)=o(\Delta^d n^k v_{(k)}(t))+\Delta^d\sum_{j=1}^{s-1}v_{(j)}(t)g_{(j)}(\mathrm{e}(x))n^j(1+o(1))$$
$$=\Delta^d n^k v_{(k)}(t)g_{(k)}(\mathrm{e}(x))(1+o(1)).$$

Теорема доказана.

Установим теперь достаточность условий (4.16), (4.17) для выполнения (с), (D^*_Ω).

Пусть выполнено (4.16). Тогда при $A=\{S(n)\in\Delta(x)\}$

$$\mathbf{P}(A\widetilde{B}^{(k+1)})\le\sum_{i_1,\dots,i_{k+1}=1}^{n}\mathbf{P}(A\overline{B}_{i_1}\dots\overline{B}_{i_{k+1}})=n^{k+1}\mathbf{P}(A\overline{B}^{(k+1)})$$
$$\le n^{k+1}\mathbf{P}(\overline{B}^{(k+1)})=n^{k+1}\mathbf{P}(\overline{B}_1)^{k+1}=o(\Delta^d v_{(k)}(t)n^k).$$

Пусть теперь выполнено (4.17). Тогда

$$\mathbf{P}(A\widetilde{B}^{(k+1)})\le\sum_{i_1,\dots,i_{k+1}=1}^{n}\mathbf{P}(A\overline{B}_{i_1}\dots\overline{B}_{i_{k+1}})\le n^{k+1}\mathbf{P}(A\overline{B}^{(k+1)}),\tag{4.24}$$

где аналогично (4.22)

$$\mathbf{P}(A\overline{B}^{(k+1)})=\int_{G_1}\mathbf{P}(S(n-k-j)\in dz)\mathbf{P}(S(k+1)\in\Delta(x-z),\overline{B}^{(k+1)}).$$

Так как $x-z\in\Pi(\Omega)$ при $z\in G_1$ и $|x-z|>\rho t(1+o(1))$, в силу (4.15) второй множитель под интегралом в правой части не превосходит $c\Delta v_{(k+1)}(t)\frac{|z|^2}{n}$, а сам интеграл имеет асимптотику $o(\Delta^d v_{(k+1)}(t))$. Поэтому ввиду (4.24)

$$\mathbf{P}(A\widetilde{B}^{(k+1)})=o(n^{k+1}\Delta^d v_{(k+1)}(t))=o(n^k\Delta^d v_{(k)}(t)).$$

Достаточность условий (4.16), (4.17) доказана.

§ 5. Интегральные теоремы

Интегро-локальные теоремы, полученные в предыдущих разделах, дают возможность без труда получать асимптотику попадания сумм случайных векторов $S(n)$ в произвольное удаленное множество, например, асимптотику вероятностей вида $\mathbf{P}(S(n)\in tG)\to 0$, где G — фиксированное отделенное от 0 множество. Пусть для определенности $\mathbf{E}\xi=0$, $\mathbf{E}|\xi|^2<\infty$ и G — «телесное» множество в $\mathbb{R}^d$ (т. е. содержащее в себе некоторое открытое множество), которое вместе с вектором ξ обладает следующими свойствами.

1. Справедливо неравенство

$$\inf\{|v|:v\in G\}>0,\tag{5.1}$$

т. е. множество G отделено от нуля.

2. *Выполнено условие* (D_Ω) § 4 *при каких-нибудь $\gamma>-1$, $\varepsilon>0$ и*

$$\Omega_{(G)}\equiv\{\mathrm{e}(v):v\in G\}\subset\Omega_\varepsilon,\tag{5.2}$$

где Ω_ε определено перед теоремой 4.1.

Функция $g(\mathrm{e})$ здесь не обязательно всюду положительна на $\Omega_{(G)}$; в этом случае (4.5) должно быть записано в виде $\mathbf{P}(\xi\in\Delta(x))=\Delta^d v(x)+o(\Delta^d v_0(t))$, $t=|x|$, и должно предполагаться, что $\int_{\Omega_{(G)}}g(\mathrm{e})d\mathrm{e}>0$.

3. *Для любого $M>0$ лебегова мера μ пересечения окрестностей $U^\varepsilon(\partial G)$ и шара $U^M(\{0\})$ сходится к 0 при $\varepsilon\to 0$:*

$$\mu(U^\varepsilon(\partial G)\cap U^M(\{0\}))\to 0,\tag{5.3}$$

где $U^\varepsilon(G)$ есть ε-окрестность множества G.

Ясно, что свойство (5.3) будет иметь место для всех множеств G с достаточно гладкой границей.

Теорема 5.1. *При выполнении* (D_Ω) *с* $\alpha > 2$ *и названных выше условий* (5.1)–(5.3) *при* $t \to \infty$, $t \gg \sqrt{n \ln n}$ *выполняется*

$$\mathbf{P}(S(n) \in tG) = nt^{-\alpha}L(t) \int\limits_G |u|^{-\alpha-d} g(\mathrm{e}(u))du(1+o(1)), \tag{5.4}$$

где функции $L(\cdot)$, $g(\cdot)$ *определены в условии* (D_Ω).

Ясно, что природа вероятностей больших уклонений сумм $S(n)$ здесь остается прежней: правую часть в (5.4) можно записать в виде

$$n\mathbf{P}(\xi \in tG)(1+o(1)), \tag{5.5}$$

так что основной вклад в вероятность события $\{S(n) \in tG\}$ дают n событий $\{\xi(j) \in tG\}$, $j = 1, \ldots, n$.

Аналогичное утверждение читатель без труда может установить и в случае $\mathbf{E}|\xi|^2 = \infty$ с помощью теоремы 4.2.

Как уже отмечалось, теорема 5.1 обнаруживает следующее полезное свойство интегролокальных теорем: они позволяют при вычислении асимптотики $\mathbf{P}(S(n) \in tG)$ поступать так, как будто существует плотность $S(n)$ и нам известно ее асимптотическое представление, хотя никаких предположений о существовании плотностей условия (D_Ω) не содержат.

Доказательство теоремы 5.1. Пусть Z^d_Δ — решетка в $\mathbb{R}^d$ с шагом $\Delta = o(t)$. Обозначим через U^b шар радиуса b, через $G_{(t,M)}$ — множество точек $z \in Z^d_\Delta$, для которых $\Delta(z) \subset tG \cap U^{tM}$ и $G^{(t,M)}$ — минимальное множество точек $z \in Z^d_\Delta$, для которого $tG \cap U^{tM} \subset \bigcup\limits_{z \in G^{(t,M)}} \Delta(z)$. Тогда, очевидно,

$$\sum_{z \in G_{(t,M)}} \mathbf{P}(S(n) \in \Delta(z)) \le \mathbf{P}(S(n) \in tG \cap U^{tM}) \le \sum_{z \in G^{(t,M)}} \mathbf{P}(S(n) \in \Delta(z)). \tag{5.6}$$

Ясно, что в силу условий (5.1)–(5.3) и теоремы 4.1 каждая из сумм в (5.6) асимптотически эквивалентна

$$n \sum_{z \in tG \cap Z^d_\Delta \cap U^{tM}} \Delta^d |z|^{-\alpha-d} L(|z|) g(\mathrm{e}(z)) \sim n \int\limits_{u \in tG \cap U^{tM}} |u|^{-\alpha-d} L(|u|) g(\mathrm{e}(u))\, du$$
$$\sim nt^{-\alpha}L(t) \int\limits_{v \in G \cap U^M} |v|^{-\alpha-d} g(\mathrm{e}(v))\, dv.$$

Остается заметить, что для $\overline{U}^{tM} = \mathbb{R}^d \setminus U^{tM}$

$$\mathbf{P}(S(n) \in tG \cap \overline{U}^{tM}) = o(nt^{-\alpha}L(t))$$

при $M \to \infty$, в чем можно убедиться с помощью соотношений вида (4.8) либо с помощью оценок вероятностей попадания $S(n)$ в полупространство вида $\Pi(\mathrm{e}, tM) = \{v \in \mathbb{R}^d : (v, \mathrm{e}) \ge tM\}$, $\mathrm{e} \in \Omega$. Теорема доказана.

Соотношения (5.4), (5.5) указывают на возможность несколько иного подхода к доказательству интегральных теорем о вероятностях больших уклонений в $\mathbb{R}^d$, $d > 1$. Вместо условия (D_Ω) можно постулировать те свойства множества G и вектора ξ, которые оказываются существенными для справедливости асимптотики (5.5). Именно, вместо весьма ограничительного условия (D_Ω) мы будем предполагать выполненным следующее условие (G), для простоты ограничившись вначале рассмотрением случая, когда $\mathbf{E}\xi = 0$, $\mathbf{E}|\xi|^2 < \infty$, а множество G

отделимо от начала координат гиперплоскостью: существуют $b > 0$ и вектор e, $|\mathrm{e}| = 1$, такие, что

$$G \subset \Pi(\mathrm{e}, b) = \{v \in \mathbb{R}^d : (v, \mathrm{e}) \geq b\}. \tag{5.7}$$

(Замечание относительно перехода к общему случаю, когда G отделено от нуля шаром U^b при некотором $b > 0$ или когда $\mathbf{E}|\xi|^2 = \infty$, см. ниже.) Итак, условие (G) будет иметь вид

(G) 1. Справедливо соотношение

$$1.\ \mathbf{P}(tG) \equiv \mathbf{P}(\xi \in tG) \sim V(t)F(G), \tag{5.8}$$

где $V(t) = t^{-\alpha}L(t)$ $(\alpha > 2$ *при* $\mathbf{E}|\xi|^2 < \infty)$, $L(\cdot)$ — *м.м.ф. при* $t \to \infty$, $F(G)$ — *функционал, определенный на подходящем классе множеств. Этот функционал, множество* G *и вектор* ξ *таковы, что*

$$\mathbf{P}(z + tG) \sim \mathbf{P}(tG) \quad \text{при } |z| = o(t), \quad t \to \infty. \tag{5.9}$$

Свойство (5.9) не что иное, как свойство непрерывности функционала F: $F(v + G) \sim F(G)$ при $|v| \to 0$. Роль функционала F в условиях теоремы 5.1 играет интеграл в правой части (5.4).

2. *Выполнено* (5.7), *и для соответствующего* e

$$\mathbf{P}((\xi, \mathrm{e}) > t) \leq cV(t) \tag{5.10}$$

при некотором $c < \infty$.

Теорема 5.2. *Пусть выполнены условия* (G). *Тогда при* $t \to \infty$, $t \gg \sqrt{n \ln n}$

$$\mathbf{P}(S(n) \in tG) \sim nV(t)F(G) \sim n\mathbf{P}(\xi \in tG). \tag{5.11}$$

Доказательство. В схеме рассуждений здесь мы придерживаемся прежних подходов. Обозначим

$$A = \{S(n) \in tG\}, \quad B_j = \{(\xi(j), \mathrm{e}) \leq \rho t\}, \quad B = \bigcap_{j=1}^{n} B_j \quad \text{при } \rho < b$$

и воспользуемся опять представлениями (2.5), (2.6).

1. Оценка $\mathbf{P}(AB)$. Так как $A \subset A_{\mathrm{e}} = \{(S(n), \mathrm{e}) > bt\}$, то $\mathbf{P}(AB) \leq \mathbf{P}(A_{\mathrm{e}}B)$, где в соответствии с оценками в [3] при любом $\delta > 0$ и $t \to \infty$

$$\mathbf{P}(A_{\mathrm{e}}B) \leq c[nV(t)]^{r-\delta}, \quad r = \frac{b}{\rho} > 1.$$

Поэтому

$$\mathbf{P}(AB) = o(nV(t)). \tag{5.12}$$

2. Оценка $\mathbf{P}(A\overline{B}_{n-1}\overline{B}_n) < \mathbf{P}(\overline{B}_{n-1}\overline{B}_n) < c(V(\rho t))^2$ здесь очевидна, так что

$$\sum_{i \neq j} \mathbf{P}(A\overline{B}_i\overline{B}_j) \leq c(nV(t))^2 = o(nV(t)). \tag{5.13}$$

3. Оценка $\mathbf{P}(A\overline{B}_n)$. Имеем

$$\mathbf{P}(A\overline{B}_n) = \int \mathbf{P}(S(n-1) \in dz)\mathbf{P}(z + \xi \in tG, (\xi, \mathrm{e}) > \rho t) = \int_{|z| \leq M\sqrt{n}} + \int_{|z| > M\sqrt{n}}. \tag{5.14}$$

Здесь в первом интеграле в правой части при $\rho < b$ в силу (5.9)

$$\mathbf{P}(z + \xi \in tG, (\xi, \mathrm{e}) > \rho t) = \mathbf{P}(z + \xi \in tG) \sim \mathbf{P}(\xi \in tG),$$

так что при $M \to \infty$

$$\int\limits_{|z|\le M\sqrt{n}} \sim \mathbf{P}(\xi \in tG).$$

Во втором интеграле в правой части (5.14)

$$\mathbf{P}(z+\xi \in tG, (\xi, \mathrm{e}) > \rho t) \le \mathbf{P}((\xi, \mathrm{e}) > \rho t) \le cV(t),$$

так что при $M \to \infty$

$$\int\limits_{|z|> M\sqrt{n}} = o(V(t)).$$

Сказанное означает, что $\mathbf{P}(A\overline{B}_n) \sim \mathbf{P}(\xi \in tG)$. Вместе с (5.12), (5.13) это доказывает (5.11). Теорема доказана.

Переход к случаю, когда G отделено от нуля шаром радиуса $b > 0$, можно осуществить, например, с помощью разбиения множества G на конечное число частей $G_1, \dots, G_K$ (скажем, по принадлежности к одному из $K = 2^d$ координатных ортантов) так, чтобы каждая из частей принадлежала подпространству $\Pi(\mathrm{e}_k, b_k)$ при подходящих e_k и $b_k > 0$, $k = 1, \dots, K$. После этого к каждой из частей $G_1, \dots, G_K$ следует применить приведенные выше рассмотрения. При этом, разумеется, вместо (5.10) надо предполагать, что при всех $k = 1, \dots, K$ и некоторых $c_k < \infty$ $\mathbf{P}((\xi, \mathrm{e}_k) > t) < c_k V(t)$.

Переход к случаю $\mathbf{E}|\xi|^2 = \infty$ происходит аналогично тому, как это делалось в теореме 3.1.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Боровков А. А., Могульский А. А.* Интегро-локальные предельные теоремы для сумм случайных векторов, включающие большие уклонения. I, II // Теория вероятностей и ее применения. 1998. Т. 43, № 1. С. 3–17; 2000. Т. 45, № 1. С. 5–29.
2. *Боровков А. А., Боровков К. А.* О вероятностях больших уклонений случайных блужданий. I: Распределения с правильно меняющимися хвостами // Теория вероятностей и ее применения. 2001. Т. 46, № 2. С. 209–232.
3. *Боровков А. А.* Оценки для распределения сумм и максимумов сумм случайных величин при невыполнении условия Крамера // Сиб. мат. журн. 2000. Т. 41, № 5. С. 997–1038.
4. *Боровков А. А.* Теория вероятностей. М.; Новосибирск: Эдиториал УРСС; Изд-во ИМ СО РАН, 1999.
5. *Петров В. В.* Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. М.: Наука, 1987.
6. *Пинелис И. Ф.* Задача больших уклонений в пространстве траекторий // Теория вероятностей и ее применения. 1981. Т. 26, № 1. С. 69–84.

Статья поступила 6 февраля 2002 г.

Боровков Александр Алексеевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск 630090
borovkov@math.nsc.ru