Сибирский математический журнал
Июль—август, 2002. Том 43, № 4

УДК 517.9:519.6

О СИЛЬНОМ РЕШЕНИИ МЕТОДА СФЕРИЧЕСКИХ ГАРМОНИК ДЛЯ НЕСТАЦИОНАРНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА

А. Ш. Акыш

Аннотация: Доказывается существование сильного обобщенного решения из соболевского пространства W_2^1 нестационарной задачи для системы уравнений метода сферических гармоник (МСГ), соответствующей задаче переноса излучения.

Ключевые слова: метод сферических гармоник, сильное обобщенное решение, задача переноса излучения

Введение. Как известно, монография Г. И. Марчука [1] сыграла основополагающую роль в становлении и систематизации методов расчета ядерных реакторов, а работа В. С. Владимирова [2] заложила основу для теоретических исследований свойств решений краевых задач для стационарного уравнения переноса. В последующем на стыке этих двух направлений в математическую теорию переноса излучения внесен существенный вклад в трудах С. К. Годунова, У. М. Султангазина [3, 4], В. В. Смелова [5–7] и др. (см., например, [8]).

Вместо сравнительного анализа современных численных методов для решения задач теории переноса автор счел целесообразным привести краткую цитату из монографии А. Вейнберга и Е. Вигнера [9, с. 255], написанной в конце 50-х годов: « ... В настоящее время, когда проделана большая работа по проектированию реакторов с помощью мощных цифровых вычислительных машин, все рассуждения о преимуществах одного метода аппроксимации перед другим сводятся к тому, насколько данный метод удобен для счетных машин. Но, так как вычислительные машины становятся все мощнее, вопрос о выборе методов приближения является все менее ясным: если счетная машина будет достаточно мощной, то в конце концов годится любой метод, который обеспечивает сходимость. Это — практическая точка зрения. Однако удобство использования метода при машинных расчетах едва ли заменяет математическое изящество или физическую наглядность. В этом отношении метод сферических гармоник является, возможно, наиболее привлекательным ... »

Для нечетных $\mathbf{P}_{2r+1}$-приближений В. С. Владимиров [2] сформулировал «наилучшие» граничные условия на основе вариационного принципа и показал, что стационарное уравнение переноса излучения и система уравнений метода сферических гармоник (МСГ) $\mathbf{P}_{2r+1}$-приближений может быть записана в симметрической и положительно-определенной форме, если индикатриса рассеяния и функция источников являются четными функциями по угловым переменным.

В произвольном $\mathbf{P}_N$-приближении граничные условия на границе раздела сред получены в [10].

Исследования С. К. Годунова и У. М. Султангазина [3, 4] показали, что система нестационарных уравнений МСГ относится к классу симметрических гиперболических систем по Фридрихсу, а граничные условия Владимирова для систем в случае $\mathbf{P}_{2r+1}$-приближений являются диссипативными. На основе энергетических оценок показаны существование и единственность обобщенного решения симметрических систем МСГ и сходимость решений смешанной задачи МСГ к решению нестационарной задачи для уравнения переноса излучения.

В случае произвольных индикатрисы рассеяния и функции источников симметризация системы уравнений МСГ в $\mathbf{P}_{2r+1}$-приближении и взаимосвязь между условиями Владимирова и Румянцева были установлены в работах [5, 6].

Долгое время не было ясно, к какому типу дифференциальных уравнений математической физики относится система, приведенная к симметрической и положительно-определенной форме. В связи с этим В. С. Владимиров [2] сформулировал вопрос: *будут ли обратные операторы симметризованной и положительно-определенной системы вполне непрерывны из L_2 в L_2?* Были указаны следствия, которые будут вытекать при положительном ответе на этот вопрос.

Приведение к такой форме четного $\mathbf{P}_{2r}$-приближения оставалось дискуссионным вопросом из-за неудачных выборов граничных условий на внешней границе. Нам в [11, 12] удалось, обобщая результаты работ [2, 5], дать ответы на вышеперечисленные вопросы. Там же был установлен ряд новых свойств системы уравнений МСГ. На основе этих свойств сформулированы граничные условия на внешней границе и на границе раздела двух сред для любого $\mathbf{P}_N$-приближения по единому алгоритму. Оказалось, что симметрическая и положительно-определенная система уравнений МСГ с произвольными входными данными и при любом $\mathbf{P}_N$-приближении принадлежит к типу сильно эллиптических систем в смысле определения из работы [13], и из этого утверждения следует полная непрерывность ее обратного оператора.

В 80-е гг. В. В. Смеловым [7] разработан метод итерации по подобластям для решения задачи теории переноса излучения. Он дает возможность ослабить эффект многомерности уравнения путем крупноблочного распараллеливания вычислений по более простым областям, когда для продолжения итерации требуется запоминать лишь информацию о решении на границах раздела областей. Когда задача переноса решается с использованием МСГ, в разных подобластях области G применяется МСГ в $\mathbf{P}_N$-приближении соответственно с разными номерами [14]. Нами предложенный способ позволяет и в этом случае выписать граничные условия (см. [8, гл. 3]) на границах раздела областей.

Здесь показывается существование сильного обобщенного решения нестационарной задачи для системы уравнений МСГ.

Постановка задачи. Рассмотрим смешанную задачу Коши для нестационарного уравнения переноса излучения в области $Q = [0, T] \times \Omega \times G$ [1]:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^{3} \omega_\alpha \frac{\partial U}{\partial x_\alpha} + \sigma U = \frac{\sigma_s}{4\pi} \int\limits_{\Omega} g(\omega, \omega') U(t, \omega, x)\, d\omega' + f(t, \omega, x), \tag{1}$$

$$U(0, \omega, x) = \varphi(\omega, x), \tag{2}$$

$$U(t, \omega, x)|_\Gamma = 0 \quad \text{при} \quad (\mathbf{n}, \omega) < 0, \tag{3}$$

где $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ — единичный вектор внешней нормали в точке x границы Γ.

Соответствующая задача к (1)–(3) МСГ в области $Q = [0, T] \times G$ записывается в виде [4]

$$\mathbf{B}\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^{3} \mathbf{A}_\alpha \frac{\partial \vec{U}}{\partial x_\alpha} + \sigma \mathbf{B}\vec{U} = \sigma_s \mathbf{B}\mathbf{D}\vec{U} + \mathbf{B}\vec{f} \tag{4}$$

с начально-граничными условиями

$$\vec{U}(t, x)|_{t=0} = \vec{\varphi}(x), \tag{5}$$

$$\mathbf{M}\vec{U}(t, z)|_{z\in\Gamma} = 0, \tag{6}$$

где

$$\vec{U}(t, x) = \left\{U^m_{c,k}(t, x),\ k = \overline{0, N};\ m = \overline{0, k};\ U^m_{s,k}, k = \overline{1, N},\ m = \overline{1, k}\right\};$$

$$\vec{f}(t, x) = \left\{f^m_{c,k}(t, x),\ k = \overline{0, N};\ m = \overline{0, k};\ f^m_{s,k}, k = \overline{1, N},\ m = \overline{1, k}\right\}$$

— соответственно неизвестный вектор и известный вектор источников; $\mathbf{B}$ — положительно-определенная, $\mathbf{D}$, $\mathbf{A}_\alpha$ ($\alpha = 1, 2, 3$) — симметрические матрицы с $(N + 1)^2 \times (N + 1)^2$-элементами;

$$\vec{\varphi}(t, x) = \left\{\varphi^m_{c,k}(t, x),\ k = \overline{0, N};\ m = \overline{0, k};\ \varphi^m_{s,k}, k = \overline{1, N},\ m = \overline{1, k}\right\}$$

— известная начальная вектор-функция; $\mathbf{M}$ — прямоугольная матрица с $N \times (N + 1)^2$ элементами.

Граничная матрица $\mathbf{M}$ определяется на поверхности произвольной выпуклой области G из граничных условий при $N = 2r + 1$ [2]:

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{(\omega,\mathbf{n})<0} C^q_{2\ell}(\omega)(\omega, \mathbf{n})U_N(t, \omega, z)\, d\omega = 0, \quad \ell = \overline{0, r};\ q = \overline{0, 2\ell},\\
&\int\limits_{(\omega,\mathbf{n})<0} S^q_{2\ell}(\omega)(\omega, \mathbf{n})U_N(t, \omega, z)\, d\omega = 0, \quad \ell = \overline{1, r};\ q = \overline{1, 2\ell};
\end{aligned} \tag{7}$$

при $N = 2r$ [12]:

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{(\omega,\mathbf{n})<0} C^q_{2\ell+1}(\omega)(\omega, \mathbf{n})U_N(t, \omega, z)\, d\omega = 0, \quad \ell = 0, \dots, r-1,\ q = 0, \dots, 2\ell+1,\\
&\int\limits_{(\omega,\mathbf{n})<0} S^q_{2\ell+1}(\omega)(\omega, \mathbf{n})U_N(t, \omega, z)\, d\omega = 0, \quad \ell = 0, \dots, r-1,\ q = 1, \dots, 2\ell+1,
\end{aligned} \tag{8}$$

где $C^m_k(\omega) = P^m_k(\mu)\cos(m\psi)$, $S^m_k(\omega) = P^m_k(\mu)\sin(m\psi)$, $m = \overline{1, k}$, — сферические функции.

Приведение к системе второго порядка. Систему уравнений (4) запишем в равносильной форме [12] относительно линейной комбинации сферических функций $U_N(t, \omega, x)$, коэффициенты которых являются компонентами вектора решений $\vec{U}$ системы (4):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U_N}{\partial t} + \frac{1}{4\pi}\sum_{\ell=0}^{N}(2\ell+1)\int\limits_{\Omega} P_\ell(\mu_0)\sum_{\alpha=1}^{3}\omega'_\alpha \frac{\partial U_N(t, \omega', x)}{\partial x_\alpha}\, d\omega' + \sigma U_N&\\
= \frac{\sigma_s}{4\pi}\int\limits_{\Omega} g_N(\mu_0)U_N(t, \omega', x)\, d\omega' + f_N(t, \omega, x),&
\end{aligned} \tag{9}$$

где

$$U_N(t,\omega,x) = \sum_{k=0}^{N}\sum_{m=0}^{k}\beta_k^m\big(C_k^m(\omega)U_{c,k}^m(t,x) + S_k^m(\omega)U_{s,k}^m(t,x)\big),$$

$$f_N(t,\omega,x) = \sum_{k=0}^{N}\sum_{m=0}^{k}\beta_k^m\big(C_k^m(\omega)f_{c,k}^m(t,x) + S_k^m(\omega)f_{s,k}^m(t,x)\big),$$

$$g_N(\mu_0) = \sum_{k=0}^{N}\frac{2k+1}{2}g_kP_k(\mu_0); \quad \beta_k^m = \frac{1}{2\pi}\frac{2k+1}{1+\delta_m^0}\frac{(k-m)!}{(k+m)!}, \quad \mu_0 = \sum_{\alpha=1}^{3}\omega_\alpha\omega'_\alpha.$$

Пусть исходные данные уравнения переноса излучения (1) таковы: функция $g(\mu_0)$ четна по μ_0; свободный член $f(t,\omega,x)$ является четной функцией по ω; коэффициенты σ, σ_s постоянны. Линейную комбинацию сферических функций $U_N(t,\omega,x)$ представим в виде суммы

$$U_N(t,\omega,x) = U^{(1)}(t,\omega,x) + U^{(2)}(t,\omega,x), \quad N = 2r+1, \tag{10}$$

$$U^{(1)} = \sum_{k=0}^{r}\sum_{m=0}^{2k+1}\beta_{2k+1}^m\big[C_{2k+1}^m(\omega)U_{c,2k+1}^m(t,x) + S_{2k+1}^m(\omega)U_{s,2k+1}^m(t,x)\big];$$

$$U^{(2)} = \sum_{k=0}^{r}\sum_{m=0}^{2k}\beta_{2k}^m\big[C_{2k}^m(\omega)U_{c,2k}^m(t,x) + S_{2k}^m(\omega)U_{s,2k}^m(t,x)\big]. \tag{11}$$

Используя представление (10) и общеизвестные свойства сферических функций, уравнения (9) разобьем на систему из двух уравнений:

$$\frac{\partial U^{(2)}}{\partial t} + \frac{1}{4\pi}\sum_{\ell=0}^{r}(4\ell+1)\int\limits_{\Omega}P_{2\ell}(\mu_0)\sum_{\alpha=1}^{3}\omega'_\alpha\frac{\partial U^{(1)}(t,\omega',x)}{\partial x_\alpha}\,d\omega' + \sigma U^{(2)}$$
$$= \frac{\sigma_s}{4\pi}\int\limits_{\Omega}g^{(2)}(\mu_0)U^{(2)}(t,\omega',x)\,d\omega' + f^{(2)}(t,\omega,x), \tag{12}$$

$$\frac{\partial U^{(1)}}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^{3}\omega_\alpha\frac{\partial U^{(2)}(t,\omega,x)}{\partial x_\alpha} + \sigma U^{(1)} = 0, \tag{13}$$

где

$$g^{(2)}(\mu_0) = \sum_{k=0}^{r}\frac{4k+1}{2}g_{2k}P_{2k}(\mu_0),$$

$$f^{(2)}(t,\omega,x) = \sum_{k=0}^{r}\sum_{m=0}^{2k}\beta_{2k}^m\big(C_{2k}^m(\omega)f_{c,2k}^m(t,x) + S_{2k}^m(\omega)f_{s,2k}^m(t,x)\big).$$

Уравнение (12) предыдущей системы сначала продифференцируем по t, а затем полученное соотношение сложим с уравнением (12), домноженным предварительно на σ. Из найденного результата с помощью уравнения (13) исключим следующее выражение:

$$\frac{\partial U^{(1)}}{\partial t} + \sigma U^{(1)}.$$

Тогда получим интегродифференциальное уравнение второго порядка относительно $U^{(2)}(t,\omega,x)$:

$$\frac{\partial^2 U^{(2)}}{\partial t^2} - \frac{1}{4\pi}\sum_{\ell=0}^{r}(4\ell+1)\int\limits_{\Omega} P_{2\ell}(\mu_0)\sum_{\alpha=1}^{3}\sum_{\beta=1}^{3}\omega'_\alpha\omega'_\beta\frac{\partial^2 U^{(2)}(t,\omega',x)}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}\,d\omega'$$
$$+\sigma\left(2\frac{\partial U^{(2)}}{\partial t}+\sigma U^{(2)}\right) = \frac{\sigma_s}{4\pi}\int\limits_{\Omega} g^{(2)}(\mu_0)\left(\frac{\partial U^{(2)}}{\partial t}+\sigma U^{(2)}\right)d\omega' + F^{(2)}, \quad (14)$$

где $F^{(2)} = \frac{\partial f^{(2)}}{\partial t} + \sigma f^{(2)}$.

Начальные и граничные условия, соответствующие системе (14), запишутся в следующем виде:

$$U^{(2)}(0,\omega,x) = \varphi^{(2)}(\omega,x), \quad (15)$$

$$\left.\frac{\partial U^{(2)}}{\partial t}\right|_{t=0} = \Phi^{(2)}(\omega,x), \quad (16)$$

$$\frac{1}{4\pi}\sum_{\ell=0}^{r}(4\ell+1)\int\limits_{\Omega} P_{2\ell}(\mu_0)\left(|(\omega,n)|\left(\frac{\partial U^{(2)}}{\partial t}+\sigma U^{(2)}\right)+|(\omega,n)|^2\frac{\partial U^{(2)}}{\partial n}\right)d\omega'\Big|_{\Gamma} = 0, \quad (17)$$

где

$$\Phi^{(2)} = \frac{1}{4\pi}\sum_{\ell=0}^{r}(4\ell+1)\int\limits_{\Omega} P_{2\ell}(\mu_0)\sum_{\alpha=1}^{3}\omega'_\alpha\frac{\partial\varphi^{(1)}(\omega',x)}{\partial x_\alpha}\,d\omega'$$
$$-\sigma\varphi^{(2)} + \frac{\sigma_s}{4\pi}\int\limits_{\Omega} g^{(2)}(\mu_0)\varphi^{(2)}(\omega',x)\,d\omega' + f^{(2)}(0,\omega,x).$$

В теории волнового уравнения граничное условие типа (17) называется *импедансным* [15]. Поэтому граничные условия (17) назовем также импедансными граничными условиями, ожидая, что система (14) в общем случае будет относиться к классу гиперболических.

Уравнение (14) умножим на сферическую функцию, которая последовательно перебирается из системы

$$\left\{C^m_{2k}(\omega),\ k=\overline{0,r};\ m=\overline{0,2k},\ S^m_{2k}(\omega), k=\overline{1,r};\ m=\overline{1,2k}\right\},$$

затем в каждом случае интегрируем его по единичной сфере Ω. При этом, пользуясь известными рекуррентными формулами для присоединенных полиномов Лежандра:

$$(2k+1)\sqrt{1-\mu^2}P^m_k(\mu) = \begin{cases} P^{m+1}_{k+1}(\mu) - P^{m+1}_{k-1}(\mu), \\ (k+m)(k+m-1)P^{m-1}_{k-1}(\mu) \\ \qquad -(k-m+1)(k-m+2)P^{m-1}_{k+1}(\mu), \end{cases}$$

$0 \le m \le k-1$, и свойством ортогональности сферических функций, найдем систему для неизвестных коэффициентов (за которыми мы оставляем прежние обозначения) линейной комбинации сферических функций, определяющих $U^{(2)}$ из (11). Тогда получим векторно-матричную запись системы (14):

$$\mathbf{B}_0\frac{\partial^2\vec{U}}{\partial t^2} - \sum_{\alpha,\beta=1}^{3}\mathbf{A}_{\alpha,\beta}\frac{\partial^2\vec{U}}{\partial x_\alpha\partial x_\beta} + \mathbf{D}\left(\frac{\partial\vec{U}}{\partial t}+\sigma\vec{U}\right) = \mathbf{B}_0\vec{F} \quad (18)$$

с начальными условиями

$$\vec{U}|_{t=o} = \vec{\varphi}, \tag{19}$$

$$\left.\frac{\partial \vec{U}}{\partial t}\right|_{t=0} = \vec{\Phi} \tag{20}$$

и импедансным граничным условием

$$\mathbf{M}\left(\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \sigma \vec{U}\right) + \mathbf{H}\left.\frac{\partial \vec{U}}{\partial n}\right|_{\Gamma} = 0, \tag{21}$$

где $\mathbf{D} = \mathbf{B}_0(\sigma\mathbf{E} - \sigma_s\mathbf{G}_0)$, $\vec{F} = \frac{\partial \vec{f}}{\partial t} + \sigma\vec{f}$, $\mathbf{E}$ — единичная матрица, $\mathbf{B}_0, G_0$ положительно определены и все матрицы $\mathbf{B}_0$, $\mathbf{G}_0$, $\mathbf{A}_{\alpha\beta}$ симметричны, а также $\mathbf{A}_{\alpha\beta} = \mathbf{A}_{\beta\alpha}$ $(\alpha, \beta = \overline{1,3})$. Граничные матрицы $\mathbf{M}, \mathbf{H}$ положительно определены и симметричны.

Рассмотрим дифференциальный оператор, входящий в систему (18):

$$\mathscr{L}\vec{U} \equiv \sum_{\alpha,\beta=1}^{3} \mathbf{A}_{\alpha,\beta}\frac{\partial^2 \vec{U}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}.$$

Пусть $N = 2r + 1$ и задан произвольный вектор

$$\vec{\zeta}_{2r} = \left\{\zeta^m_{c,2k}, \begin{matrix} k = 0, \dots, r, \\ m = 0, \dots, 2k+1; \end{matrix} \zeta^m_{s,2k}, \begin{matrix} k = 1, \dots, r, \\ m = 1, \dots, 2k \end{matrix}\right\}.$$

Для того чтобы показать, что система уравнений (18) относится к классу сильно гиперболических систем, докажем, что оператор $\mathscr{L}$ является сильно эллиптическим. На основании определения *сильно эллиптических систем* из [13] для оператора $\mathscr{L}$ системы (18) с учетом свойств матриц $\mathbf{A}_{\alpha\beta}$ $(\alpha, \beta = 1, 2, 3)$ установим неравенство

$$\left(\sum_{\alpha,\beta=1}^{3} \mathbf{A}_{\alpha,\beta}\xi_\alpha\xi_\beta\vec{\zeta}_{2r}, \vec{\zeta}_{2r}\right) > 0 \tag{22}$$

для любых чисел ξ_α $(\alpha = 1, 2, 3)$.

Введем линейную комбинацию сферических функций:

$$Q_{2r} = \sum_{k=0}^{r}\sum_{m=0}^{2k} \beta^m_{2k}\left[C^m_{2k}(\omega)\zeta^m_{c,2k} + S^m_{2k}(\omega)\zeta^m_{s,2k}\right]$$

с произвольными коэффициентами

$$\zeta_{2r} = \left\{\zeta^m_{c,2k}, \begin{matrix} k = 0, \dots, r, \\ m = 0, \dots, 2k+1; \end{matrix} \zeta^m_{s,2k}, \begin{matrix} k = 1, \dots, r, \\ m = 1, \dots, 2k \end{matrix}\right\}.$$

Для нее имеет место следующая

Лемма 1 [12]. *Квадратичная форма*

$$\int\limits_{\Omega} (\omega, \xi)^2 Q^2_{2r}(\omega)\, d\omega$$

для любых чисел ξ_1, ξ_2, ξ_3 *с* $\sum\limits_{\alpha=1}^{3} \xi_\alpha \neq 0$ *и соответственно для любого ненулевого вектора* $\vec{\zeta}_{2r}$ *положительно определенная, т. е.*

$$\int\limits_{\Omega} (\omega, \xi)^2 Q^2_{2r}(\omega)\, d\omega \geq \chi_{2r}\sum_{k=0}^{r}\left\{\sum_{m=0}^{2k}\sum_{\alpha=1}^{3}\left(\xi_\alpha\zeta^m_{c,2k}\right)^2 + \sum_{m=0}^{2k}\sum_{\alpha=1}^{3}\left(\xi_\alpha\zeta^m_{s,2k}\right)^2\right\}, \tag{23}$$

где $(\omega,\xi) = \sum\limits_{\alpha=1}^{3} \xi_\alpha \omega_\alpha$, *причем* $\chi_{2r} > 0$ *равно квадрату наименьшего корня полинома Лежандра* [16] $P_{2r+2}(\chi) = 0$, *а при* $N \gg 1$ *имеет место оценка* $\chi_{2r} = O(1/N^4)$.

Отметим следующее неравенство:

$$\sum_{k=0}^{r}\left\{\sum_{m=0}^{2k}\sum_{\alpha=1}^{3}\left(\xi_\alpha \zeta_{c,2k}^{m}\right)^2 + \sum_{m=0}^{2k}\sum_{\alpha=1}^{3}\left(\xi_\alpha \zeta_{s,2k}^{m}\right)^2\right\} \geq \frac{4\pi}{4r+1}\int\limits_{\Omega}\sum_{\alpha=1}^{3}(\xi_\alpha Q_{2r}(\omega))^2\,d\omega$$

при $N = 2r+1$, вытекающее из свойства ортогональности сферических функций. С учетом последнего неравенства перепишем (23) в следующем виде:

$$\int\limits_{\Omega}(\omega,\xi)^2 Q_{2r}^2(\omega)\,d\omega \geq \frac{4\pi}{4r+1}\chi_{2r}\int\limits_{\Omega}\sum_{\alpha=1}^{3}(\xi_\alpha Q_{2r}(\omega))^2\,d\omega. \tag{24}$$

Тогда, принимая во внимание свойства матриц $\mathbf{A}_{\alpha\beta}$ $(\alpha,\beta = 1,2,3)$, нетрудно заметить, что неравенства (23) и (22) эквивалентны, т. е. система (18) является сильно гиперболической.

Интересно отметить первые два приближения:

P_1-приближение

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{1}{3}\sum_{\alpha=1}^{3}\frac{\partial^2 U}{\partial x_\alpha^2} + \left(\frac{\partial U}{\partial t} + \sigma U\right) = F, \quad U = U_{c,0}^{0},$$

P_2-приближение

$$\mathbf{B}_0\frac{\partial^2 \vec{U}}{\partial t^2} + \sum_{\alpha,\beta=1}^{3}\mathbf{A}_{\alpha,\beta}\frac{\partial^2 \vec{U}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \mathbf{D}\left(\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \sigma \vec{U}\right) = \mathbf{B}_0\vec{F},$$

где $\mathbf{A}_{12} = \mathbf{A}_{21}$, $\mathbf{A}_{13} = \mathbf{A}_{31}$, $\mathbf{A}_{23} = \mathbf{A}_{32}$, $\vec{U}' = \left(U_{c,1}^{0}, U_{c,1}^{1}, U_{s,1}^{1}\right)$, $\mathbf{B}_0 = \operatorname{diag}\{\rho,\rho,\rho\}$,

$$\mathbf{A}_{11} = \operatorname{diag}\{\mu+\lambda,\mu,\mu\}, \quad \mathbf{A}_{22} = \operatorname{diag}\{\mu,\mu+\lambda,\mu\}, \quad \mathbf{A}_{33} = \operatorname{diag}\{\mu,\mu,\mu+\lambda\};$$

$$\mathbf{A}_{12} = [a_{2,3} = a_{3,2} = \mu+\lambda, \quad \text{остальные нули}];$$
$$\mathbf{A}_{13} = [a_{1,2} = a_{2,1} = \mu+\lambda, \quad \text{остальные нули}];$$
$$\mathbf{A}_{23} = [a_{1,3} = a_{3,1} = \mu+\lambda, \quad \text{остальные нули}],$$

где $\rho = \frac{3}{2}$, $\lambda = \frac{3}{5}$, $\mu = \frac{3}{10}$. Заметим, что первые два приближения P_1, P_2 соответствуют широко известным в математической физике телеграфному уравнению и динамическим уравнениям теории упругости относительно вектора упругих смещений. Как известно (см. например, [13]), последние соответственно относятся к классам гиперболических уравнений и сильно гиперболических систем. Построение решения задачи для одномерного телеграфного уравнения с импедансным граничным условием методом преобразования Лапласа рассматривалось в книге [17, с. 545–546].

Априорные оценки. Построим априорные оценки для решения задачи (18)–(22) в классе гладких решений. Для этого введем в рассмотрение ее эквивалентную форму записи (14)–(17), где составляющие вектора решений представлены в виде коэффициентов линейной комбинации сферических функций. Для удобства записи опустим верхний индекс (2) у всех функций и положим

$$U = \exp(\gamma t)V, \quad 0 < \gamma = \text{const}.$$

После такой замены задача (14)–(17) перепишется в следующем виде:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - \frac{1}{4\pi}\sum_{\ell=0}^{r}(4\ell+1)\int\limits_{\Omega} P_{2\ell}(\mu_0)\sum_{\alpha=1}^{3}\sum_{\beta=1}^{3}\omega'_\alpha\omega'_\beta\frac{\partial^2 V(t,\omega',x)}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}\,d\omega' + \sigma_\gamma\left(2\frac{\partial V}{\partial t} + \sigma_\gamma V\right)$$
$$= \frac{\sigma_s}{4\pi}\int\limits_{\Omega} g(\mu_0)\left(\frac{\partial V}{\partial t} + \sigma_\gamma V\right)d\omega' + \widetilde{F}, \quad (25)$$

где $\sigma_\gamma = \sigma + \gamma$, $\widetilde{F} = \exp(-\gamma t)F$, с начальными условиями

$$V(0,\omega,x) = \varphi(\omega,x), \quad (26)$$

$$\left.\frac{\partial V}{\partial t}\right|_{t=0} = \Phi(\omega,x) - \gamma\varphi(\omega,x) \equiv \widetilde{\Phi}(\omega,x) \quad (27)$$

и граничным условием

$$\frac{1}{4\pi}\sum_{\ell=0}^{r}(4\ell+1)\int\limits_{\Omega} P_{2\ell}(\mu_0)\left(|(\omega',n)|\left(\frac{\partial V(t,\omega',z)}{\partial t} + \sigma_\gamma V(t,\omega',z)\right)\right.$$
$$\left. + |(\omega',n)|^2\frac{\partial V(t,\omega',z)}{\partial n}\right)d\omega' = 0, \quad z \in \Gamma. \quad (28)$$

Граничное условие (28) умножим на $V_t(t,z,\omega)$ и проинтегрируем по $\omega \in \Omega$. Тогда, воспользовавшись равенством

$$V_t(t,\omega',z) = \frac{1}{4\pi}\sum_{\ell=0}^{r}(4\ell+1)\int\limits_{\Omega} P_{2\ell}(\mu_0)V_t(t,\omega,z)\,d\omega, \quad (29)$$

находим

$$\int\limits_{\Omega}|(\omega,n)|^2\frac{\partial V}{\partial n}V_t\,d\omega = -\int\limits_{\Omega}|(\omega,n)|(V_t + \sigma_\gamma V)V_t\,d\omega, \quad V_t = \frac{\partial V}{\partial t}. \quad (30)$$

Рассмотрим дифференциальный оператор, входящий в уравнение (25):

$$\mathscr{L}V = -\frac{1}{4\pi}\sum_{\ell=0}^{r}(4\ell+1)\int\limits_{\Omega} P_{2\ell}(\mu_0)\sum_{\alpha=1}^{3}\sum_{\beta=1}^{3}\omega'_\alpha\omega'_\beta\frac{\partial^2 V(t,\omega',x)}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}\,d\omega'.$$

Умножим его на $2V_t$ и проинтегрируем по области $Q' = [0,t'] \times G \times \Omega$, где $t' \le T$. Тогда на основании формулы Грина [2] и равенства (29) получаем

$$2\int\limits_{Q'}\mathscr{L}VV_t\,dxd\omega dt$$
$$= 2\int\limits_{Q'}\sum_{\alpha=1}^{3}\sum_{\beta=1}^{3}\omega_\alpha\omega_\beta\frac{\partial V}{\partial x_\alpha}\frac{\partial V_t}{\partial x_\beta}\,dxd\omega dt - 2\int\limits_{0}^{t'}\int\limits_{\Gamma\times\Omega}|(\omega,n)|^2\frac{\partial V}{\partial n}V_t\,d\omega dzdt.$$

Отсюда с учетом формулы (30) имеем

$$2\int\limits_{Q'}\mathscr{L}VV_t\,d\omega dxdt$$
$$= 2\int\limits_{Q'}\sum_{\alpha=1}^{3}\sum_{\beta=1}^{3}\omega_\alpha\omega_\beta\frac{\partial V}{\partial x_\alpha}\frac{\partial V_t}{\partial x_\beta}\,d\omega dxdt + 2\int\limits_{0}^{t'}\int\limits_{\Gamma\times\Omega}|(\omega,n)|(V_t + \sigma_\gamma V)V_t\,d\omega dzdt.$$

Из правой части последнего соотношения с помощью интегрирования по частям по переменной t получим

$$2\int\limits_{Q'} \mathscr{L}VV_t d\omega dxdt = \int\limits_{G\times\Omega}\left(\sum_{\alpha=1}^{3}\omega_\alpha\frac{\partial V(t',\omega,x)}{\partial x_\alpha}\right)^2 d\omega dx$$
$$-\int\limits_{G\times\Omega}\left(\sum_{\alpha=1}^{3}\omega_\alpha\frac{\partial\varphi}{\partial x_\alpha}\right)^2 d\omega dx + 2\int\limits_0^{t'}\int\limits_{\Gamma\times\Omega}|(\omega,n)|\,|V_t(t,\omega,z)|^2\,d\omega dzdt$$
$$+\int\limits_{\Gamma\times\Omega}|(\omega,n)|\,|V(t',\omega,z)|^2\,d\omega dz - \int\limits_{\Gamma\times\Omega}|(\omega,n)|\,|\varphi|^2\,d\omega dz. \quad (31)$$

Пусть

$$I_0 = 2\int\limits_0^{t'}\int\limits_{\Gamma\times\Omega}|(\omega,n)|\,|V_t(t,\omega,z)|^2\,d\omega dzdt + \int\limits_{\Gamma\times\Omega}|(\omega,n)|\,|V(t',\omega,z)|^2\,d\omega dz.$$

Положим $\xi_\alpha = n_\alpha$ $(\alpha = 1,2,3)$ и воспользуемся неравенством (24), в результате приходим к неравенству

$$I_0 \geq 2\chi_{2r}\int\limits_0^{t'}\int\limits_{\Gamma\times\Omega}|V_t(t,\omega,z)|^2\,d\omega dzdt$$
$$+\chi_{2r}\int\limits_{\Gamma\times\Omega}|V(t',\omega,z)|^2\,d\omega dz - \int\limits_{\Gamma\times\Omega}|(\omega,n)|\,|\varphi|^2\,d\omega dz. \quad (32)$$

Рассмотрим квадратичную форму

$$I_1 = \int\limits_{G\times\Omega}\left(\sum_{\alpha=1}^{3}\omega_\alpha\frac{\partial V(t',\omega,x)}{\partial x_\alpha}\right)^2 d\omega dx,$$

откуда, воспользовавшись неравенством (23) и положив в нем $\xi_\alpha U^{(2)} = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}V$, получим

$$I_1 \geq \frac{4\pi}{4r+1}\chi_{2r}\int\limits_{G\times\Omega}\sum_{\alpha=1}^{3}\left(\frac{\partial V(t',\omega,x)}{\partial x_\alpha}\right)^2 d\omega dx. \quad (33)$$

Из (31) с учетом неравенств (32) и (33) найдем

$$J_0 \equiv 2\int\limits_{Q'}\mathscr{L}VV_t\,d\omega dxdt \geq \frac{4\pi}{4r+1}\chi_{2r}\int\limits_{G\times\Omega}\sum_{\alpha=1}^{3}\left(\frac{\partial V(t',\omega,x)}{\partial x_\alpha}\right)^2 d\omega dx$$
$$-\int\limits_{G\times\Omega}\left(\sum_{\alpha=1}^{3}\omega_\alpha\frac{\partial\varphi}{\partial x_\alpha}\right)^2 d\omega dx + 2\chi_{2r}\int\limits_0^{t'}\int\limits_{\Gamma\times\Omega}|V_t(t,\omega,z)|^2\,d\omega dzdt$$
$$+\chi_{2r}\int\limits_{\Gamma\times\Omega}|V(t',\omega,z)|^2\,d\omega dz - \int\limits_{\Gamma\times\Omega}|(\omega,n)|\,|\varphi|^2\,d\omega dz. \quad (34)$$

Умножим уравнение (25) на $2V_t$ и результат проинтегрируем по Q', $t' \le T$:

$$2\int\limits_{Q'} V_t\left\{\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - \frac{1}{4\pi}\sum_{\ell=0}^{r}(4\ell+1)\int\limits_{\Omega} P_{2\ell}(\mu_0)\sum_{\alpha,\beta=1}^{3}\omega'_\alpha\omega'_\beta\frac{\partial^2 V(t,\omega',x)}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}\,d\omega'\right.$$

$$\left.+\,\sigma_\gamma\left(2\frac{\partial V}{\partial t}+\sigma_\gamma V\right)\right\}dxd\omega dt = \frac{\sigma_s}{2\pi}\int\limits_{Q'} V_t\left\{\int\limits_{\Omega} g(\mu_0)\left(\frac{\partial V}{\partial t}+\sigma_\gamma V\right)d\omega' + \widetilde{F}\right\}dxd\omega dt. \tag{35}$$

Левую часть (35) преобразуем с помощью интегрирования по частям, принимая во внимание (34), и после этого установим следующие неравенства:

$$J_1 = \int\limits_{Q'}\frac{\partial V_t^2}{\partial t}\,d\omega dxdt = \|V_t(t')\|^2_{L_2(G\times\Omega)} - \|\widetilde{\Phi}\|^2_{L_2(G\times\Omega)};$$

$$J_2 = \sigma_\gamma^2\int\limits_{Q'}\frac{\partial V^2}{\partial t}\,d\omega dx = \sigma_\gamma^2\big(\|V(t')\|^2_{L_2(G\times\Omega)} - \|\varphi\|^2_{L_2(G\times\Omega)}\big);$$

$$J_3 = 4\sigma_\gamma\int\limits_{Q'}\frac{\partial V}{\partial t}V_t\,d\omega dxdt = 2\sigma_\gamma\int\limits_0^{t'}\|V_t(t)\|^2_{L_2(G\times\Omega)}\,dt.$$

Рассмотрим интеграл

$$J_4 = \frac{\sigma_s}{2\pi}\left|\int\limits_{Q'}\int\limits_{\Omega} g(\mu_0)V_t(t,\omega',x)V_t(t,\omega,x)d\omega'\,d\omega dxdt\right|.$$

Применяя неравенство Коши — Буняковского, имеем

$$J_4 \le \frac{\sigma_s g_0}{2\pi}\int\limits_0^{t'}\|V_t(t)\|^2_{L_2(G\times\Omega)}\,dt,$$

где $g_0 = \|g\|_{L_2(\Omega\times\Omega)}$. Для интеграла

$$J_5 = \frac{\sigma_\gamma\sigma_s}{2\pi}\left|\int\limits_{Q'}\int\limits_{\Omega} g(\mu_0)V(t,\omega',x)V_t(t,\omega,x)\,d\omega'\,d\omega dxdt\right|$$

находим, что

$$J_5 \le \frac{\sigma_\gamma\sigma_s g_0}{4\pi}\left\{\int\limits_0^{t'}\|V_t(t)\|^2_{L_2(G\times\Omega)}\,dt + \int\limits_0^{t'}\|V(t)\|^2_{L_2(G\times\Omega)}\,dt\right\}.$$

Наконец, используя известное неравенство Юнга, запишем

$$J_6 = 2\left|\int\limits_{Q'}\widetilde{F}(t,\omega,x)V_t(t,\omega,x)\,d\omega dxdt\right|$$

$$\le \frac{1}{\epsilon}\int\limits_0^{t'}\|\widetilde{F}(t)\|^2_{L_2(G\times\Omega)}\,dt + \epsilon\int\limits_0^{t'}\|V_t(t)\|^2_{L_2(G\times\Omega)}\,dt.$$

Учитывая все оценки для J_k, $k=\overline{0,6}$, и заменяя V на U из (35), находим

$$(1+c_1T)\sup_t\|U_t(t)\|^2_{L_2(G\times\Omega)}+c_2(T)\sup_t\|U(t)\|^2_{L_2(G\times\Omega)}$$
$$+\frac{4\pi}{4r+1}\chi_{2r}\sup_t\sum_{\alpha=1}^{3}\left\|\frac{\partial U(t,\omega,x)}{\partial x_\alpha}\right\|^2_{L_2(G\times\Omega)}$$
$$+2\chi_{2r}T\sup_t\|U_t(t)\|^2_{L_2(\Gamma\times\Omega)}+\chi_{2r}\sup_t\|U(t)\|^2_{L_2(\Gamma\times\Omega)}$$
$$\leq\|\widetilde{\Phi}\|^2_{L_2(G\times\Omega)}+\sum_{\alpha=1}^{3}\left\|\omega_\alpha\frac{\partial\varphi}{\partial x_\alpha}\right\|^2_{L_2(G\times\Omega)}+\|\varphi\|^2_{L_2(G\times\Omega)}$$
$$+\|(\omega,n)\varphi\|^2_{L_2(\Gamma\times\Omega)}+\frac{T}{\varepsilon}\exp(2\gamma T)\sup_t\|F(t)\|^2_{L_2(G\times\Omega)},\qquad(36)$$

где c_1, $c_2(t)$ — положительные константы, зависящие от σ_γ, σ_s, g_0.

Определение. Назовем *обобщенным решением задачи* (14)–(17) линейную комбинацию сферических функций $U(t,x,\omega)$, коэффициенты которой являются компонентами вектор-функции $\vec{U}$, принадлежащими $W_2^1((0,T]\times G)$, равную $\vec{\varphi}(x,\omega)$ при $t=0$ и удовлетворяющую тождеству

$$\int\limits_{Q_T}\left(-U_t\eta_t+\sum_{\alpha=1}^{3}\sum_{\beta=1}^{3}\omega_\alpha\omega_\beta\frac{\partial U}{\partial x_\alpha}\frac{\partial\eta}{\partial x_\beta}\right)d\omega dxdt$$
$$+\int\limits_0^T\int\limits_{\Gamma\times\Omega}|(\omega,n)|(U_t+\sigma U)\eta\,d\omega dzdt-\int\limits_{G\times\Omega}\Phi\eta(x,\omega)\,dxd\omega=\int\limits_{Q'}F\eta\,dxd\omega dt$$

для любой вектор-функции $\vec{\eta}(t,x)$ из $W_2^1((0,T]\times G)$, равной нулю при $t=T$, компоненты которой являются коэффициентами линейной комбинации сферических функций $\eta(t,\omega,x)$.

Известным приемом из [13] с использованием априорной оценки (36) легко доказывается следующая

Теорема 1. *Задача* (18)–(21) *или* (16)–(17) *имеет единственное сильное обобщенное решение, состоящее из линейной комбинации сферических функций* $U(t,\omega,x)$, *коэффициенты которых являются компонентами вектор-функции* $\vec{U}(t,x)$ *из* $W_2^1((0,T]\times G)$ *для любых* $\vec{\varphi}\in W_2^1(G)$, $\vec{\Phi}\in L_2(G)$, $\vec{F}(t,x)\in C^1((0,T);L_2(G))$.

Замечание. Утверждение последней теоремы полностью переносится для четных $\mathbf{P}_{2r}$-приближений с граничными условиями (8).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Марчук Г. И.* Численные методы расчета ядерных реакторов. М.: Атомиздат, 1958.
2. *Владимиров В. С.* Математические задачи односкоростной теории переноса частиц // Тр. Мат. ин-та АН СССР. 1961. Т. 61. С. 3–158.
3. *Годунов С. К., Султангазин У. М.* О диссипативности граничных условий Владимирова для симметрической системы метода сферических гармоник // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1971. Т. 11, № 3. С. 688–704.
4. *Султангазин У. М.* Методы сферических гармоник и дискретных ординат в задачах кинетической теории переноса. Алма-Ата: Наука, 1979.

5. *Смелов В. В.* О симметризации нечетного $\mathbf{P}_{2N-1}$-приближения односкоростного уравнения переноса // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1980. Т. 20, № 1. С. 121–132.
6. *Смелов В. В.* Об однозначном формировании условии на внутренних и внешних границах области в нечетном $\mathbf{P}_{2N-1}$-приближении метода сферических гармоник // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1979. Т. 19, № 1. С. 248–252.
7. *Смелов В. В.* Принцип итерирования по подобластям в задачах с уравнением переноса // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1981. Т. 21, № 6. С. 1493–1504.
8. *Султангазин У. М., Смелов В. В., Марек И., Акишев А. Ш. и др.* Математические проблемы кинетической теории переноса. Алма-Ата: Наука, 1986.
9. *Вейнберг А., Вигнер.* Физическая теория ядерных реакторов. М.: Изд-во иностр. лит., 1961.
10. *Румянцев Г. Я.* Граничные условия в методе сферических гармоник // Атомная энергия. 1961. Т. 10, № 1. С. 26–34.
11. *Акишев А. Ш.* Об одной задаче В. С. Владимирова в теории переноса излучения (краткое сообщение) // Успехи мат. наук. 1982. Т. 37, № 5. С. 227.
12. *Акишев А. Ш.* Об одной задаче В. С. Владимирова в теории переноса излучения // Aplikace Matematiky. 1984. V. 29, N 3. P. 161–181.
13. *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.
14. *Смелов В. В., Кутов В. П.* Конечные P_N-приближения метода сферических гармоник при разных приближений в разных подобластях. Новосибирск, 1984. 13 с. (Препринт / АН СССР. Сиб. отд-ние. Вычисл. центр; № 502).
15. *Муравей Л. А.* Об асимптотическом поведении при больших значениях времени решения одной внешней краевой задачи для волнового уравнения // Докл. АН СССР. 1975. Т. 220, № 2. С. 289–292.
16. *Акишев А. Ш.* Построение высокоточных разностных схем для системы уравнений метода сферических гармоник // Тез. докл. Междунар. симпоз. «Численные методы решения уравнения переноса» (26-28 мая 1992). М.: Ядерное общество, 1992. С. 16–19.
17. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1965.

Статья поступила 26 июля 2001 г.

Акыш (Акишев) Абдигали Шойынбаевич
Институт математики МОН РК, ул. Пушкина, 125, Алматы 480100, Казахстан
`Bal@Bips.kz (для Абдигали Акыш)`