*Сибирский математический журнал*
*Июль—август, 2002. Том 43, № 4*

*УДК 517.518*

# К ВОПРОСУ ОБ ОБОБЩЕННОМ РЕШЕНИИ АЛГЕБРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

**А. А. Щеглова**

**Аннотация:** Исследуется возможность построения обобщенного в смысле Соболева — Шварца решения задачи

$$A(t)x'(t) + B(t)x(t) = f(t),\ t \in T = [0, +\infty), \quad x(0) = a,$$

с вырожденной для любого $t \in T$ $(n \times n)$-матрицей при производных в условиях, когда классического решения $x(t) \in C^1(T)$ не существует (начальные данные не согласованы, а правая часть — недостаточно гладкая вектор-функция). Доказана сходимость последовательности классических решений задачи Коши для системы с постоянными коэффициентами, полученных методом возмущения, к обобщенному решению.

**Ключевые слова:** алгебродифференциальная система, задача Коши, обобщенное решение, метод возмущения

**Введение.** Известно [1], что классическое решение $x(t) \in C^1(T)$ задачи Коши для алгебродифференциальной системы уравнений (АДС):

$$A(t)x'(t) + B(t)x(t) = f(t), \quad t \in T = [0, +\infty), \tag{1}$$

$$x(0) = a, \tag{2}$$

(здесь $A(t), B(t)$ — $(n \times n)$-матрицы, $\det A(t) \equiv 0$, $t \in T$) существует, если начальные данные (2) согласованы с правой частью системы (1), а элементы матриц $A(t)$, $B(t)$ и $n$-мерного вектора $f(t)$ суть $r$ раз непрерывно дифференцируемые на $T$ функции, $r \le n$.

Поскольку в ряде важных приложений эти довольно жесткие условия не выполняются, предлагается расширить класс решений, с тем чтобы задача (1), (2) была разрешима для любого заданного вектора $a$ и при более слабых требованиях на гладкость правой части $f(t)$. А именно, будем искать решение в классе обобщенных функций бесконечного порядка [2]. Такое расширение оправдано, в частности, тем, что, как будет показано ниже, решение, полученное методом возмущения для АДС (1) с постоянными коэффициентами, сходится к обобщенному решению задачи (1), (2).

**Вспомогательные сведения**. Здесь и далее будем предполагать, что элементы матриц $A(t)$ и $B(t)$ — аналитические на $T$ функции ($A(t), B(t) \in C^A(T)$). Относительно АДС (1) в монографии [3, с. 126] доказан важный результат.

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 01–01–00259).

**Теорема 1.** *Следующие утверждения эквивалентны:*
1) *имеет место равенство*

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} A & O & \dots & O \\ A'+B & A & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C^0_{k+1}A^{(k+1)}+C^1_{k+1}B^{(k)} & C^1_{k+1}A^{(k)}+C^2_{k+1}B^{(k-1)} & \dots & A \end{pmatrix} = \mathrm{const} \geq (k+1)n$$

*для любого* $t \in T$, *где* $k = \max\limits_{t\in T} \operatorname{rank} A(t)$, $C^j_i$ — *биномиальные коэффициенты;*

2) *существуют неособенные при каждом* $t \in T$ $(n\times n)$*-матрицы* $P(t), Q(t) \in C^A(T)$ *такие, что замена переменной* $x(t) = Q(t)y(t)$ *и умножение слева на матрицу* $P(t)$ *приводят задачу* (1), (2) *к виду*

$$\begin{pmatrix} E_d & O \\ O & N(t) \end{pmatrix} y'(t) + \begin{pmatrix} J(t) & O \\ O & E_{n-d} \end{pmatrix} y(t) = P(t)f(t), \quad t \in T, \tag{3}$$

$$y(0) = Q^{-1}(0)a, \tag{4}$$

*где* $J(t)$ — *некоторая* $(d\times d)$*-матрица,* $N(t)$ — *верхнетреугольная матрица такая, что* $N^r(t) \equiv O$ $(r \leq n-d)$.

Определение 1. АДС (3) будем называть *центральной канонической формой* (ЦКФ) для системы (1).

Пусть $D$ — пространство финитных функций класса $C^\infty(\mathbb{R})$ и $D'$ — пространство обобщенных функций на $D$.

Для любой обобщенной функции $\tilde g(t) \in D'$ и функции $h(t) \in C^\infty(\mathbb{R})$ определено произведение

$$\langle h(t)\tilde g(t), \phi(t)\rangle = \langle \tilde g(t), h(t)\phi(t)\rangle \quad \forall\phi(t) \in D.$$

Кроме того, любая функция $\tilde g(t) \in D'$ бесконечное число раз дифференцируема в обобщенном смысле [2, с. 23]:

$$\left\langle \left(\frac{d}{dt}\right)^j \tilde g(t), \phi(t) \right\rangle = (-1)^j \langle \tilde g(t), \phi^{(j)}(t)\rangle.$$

Если $u(t)$ — произвольная абсолютно непрерывная на $T$ функция, то для обобщенной производной имеет место равенство

$$\frac{d}{dt}(u(t)\theta(t)) = u(0)\delta(t) + u'(t)\theta(t). \tag{5}$$

Здесь $u'(t)$ — обычная производная, которая определена почти всюду и, следовательно, локально интегрируема на $T$; $\theta(t)$ — функция Хевисайда: $\langle\theta(t), \phi(t)\rangle = \int\limits_0^{+\infty} \phi(t)\,dt$; $\delta(t)$ — дельта-функция Дирака: $\langle \delta(t), \phi(t)\rangle = \phi(0)$ $\forall\phi(t) \in D$.

Пусть $\tilde g(t)$ — вектор, компонентами которого являются функции из $D'$. Тогда

$$\langle \tilde g(t), \phi(t)\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} \tilde g_1(t) \\ \dots \\ \tilde g_n(t) \end{pmatrix}, \phi(t) \right\rangle = \begin{pmatrix} \langle \tilde g_1(t), \phi(t)\rangle \\ \dots \\ \langle \tilde g_n(t), \phi(t)\rangle \end{pmatrix} \ \forall\phi(t) \in D.$$

**О разрешимости обобщенной задачи Коши**. Предположим, что в уравнении (1) вектор-функция $f(t)$ локально интегрируема на $T$. Тогда в $D'$ она порождает регулярную обобщенную функцию $\tilde{f}(t) = f(t)\theta(t)$. Покажем, что обобщенная задача Коши

$$A(t)\tilde{x}'(t) + B(t)\tilde{x}(t) = A(0)a\delta(t) + \tilde{f}(t), \tag{6}$$

соответствующая задаче (1), (2), имеет в классе $K'_+ \subset D'$ обобщенных функций с ограниченным слева носителем единственное решение $\tilde{x}(t)$.

Определение 2. Решение $\tilde{x}(t) \in K'_+$ задачи (6) будем называть *обобщенным решением* задачи (1), (2).

Пусть матрицы $A(t)$ и $B(t)$ в системе (6) таковы, что для АДС (1) выполнено условие 2 теоремы 1. В этом случае после замены переменной $\tilde{x}(t) = Q(t)\tilde{y}(t)$ и умножения системы (6) слева на матрицу $P(t)$ в соответствии с (3), (4) получим

$$\tilde{y}_1(t) + J(t)\tilde{y}_1(t) = \bar{a}_1(t)\delta(t) + \hat{f}_1(t), \tag{7}$$

$$N(t)\tilde{y}_2'(t) + \tilde{y}_2(t) = N(0)\bar{a}_2\delta(t) + \hat{f}_2(t), \tag{8}$$

где

$$\begin{pmatrix} \tilde{y}_1(t) \\ \tilde{y}_2(t) \end{pmatrix} = \tilde{y}(t), \quad \begin{pmatrix} \bar{a}_1 \\ \bar{a}_2 \end{pmatrix} = Q^{-1}(0)a, \quad \begin{pmatrix} \hat{f}_1(t) \\ \hat{f}_2(t) \end{pmatrix} = P(t)\hat{f}(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix}\theta(t).$$

Решение системы (7) будем искать в виде суммы

$$\tilde{y}_1(t) = \omega\delta(t) + \eta(t)\theta(t). \tag{9}$$

Здесь $\omega \in \mathbb{R}^d$, $\eta(t)$ — некоторая абсолютно интегрируемая на $T$ $d$-мерная вектор-функция. Подставив (9) в (7) с учетом равенства (5) и приравняв регулярные и сингулярные слагаемые, получим уравнения относительно $\omega$ и $\eta(t)$

$$\omega\delta'(t) + J(0)\omega\delta(t) = (\bar{a}_1 - \eta(0))\delta(t), \quad \eta'(t) + J(t)\eta(t) = f_1(t), \quad t \in T.$$

Отсюда $\omega = O$, $\eta(0) = \bar{a}_1$,

$$\eta(t) = \Omega(t)\left(\bar{a}_1 + \int_0^t \Omega^{-1}(\tau)f_1(\tau)\,d\tau\right),$$

где $\Omega(t)$ — решение матричной задачи Коши

$$\Omega'(t) + J(t)\Omega(t) = O, \quad t \in T; \quad \Omega(0) = E_d.$$

Таким образом,

$$\tilde{y}_1(t) = \Omega(t)\left(\bar{a}_1 + \int_0^t \Omega^{-1}(\tau)f_1(\tau)\,d\tau\right)\theta(t). \tag{10}$$

Введем обозначение

$$F[\tilde{g}(t)] = N(t)\frac{d}{dt}\tilde{g}(t) \tag{11}$$

для любой функции $\tilde{g}(t) \in K'_+$ (здесь дифференцирование понимается в обобщенном смысле). Тогда из (8) следует, что

$$\tilde{y}_2(t) = \sum_{j=0}^{r-1}(-1)^j F^j[\hat{f}_2(t) + N(0)\bar{a}_2\delta(t)]. \tag{12}$$

Из изложенного выше вытекает справедливость следующего утверждения.

**Теорема 2.** *Пусть*

1) $A(t), B(t) \in C^A(T)$, $f(t)$ *локально интегрируема на* $T$;

2) *для АДС* (1) *на* $T$ *определена* ЦКФ (3).

*Тогда решение задачи* (6) *существует, единственно в классе* $K'_+$ *и представимо в виде* $\tilde{x}(t) = Q(t)\tilde{y}(t)$, *где компоненты вектора* $\tilde{y}(t) = (\tilde{y}_1(t)^T, \tilde{y}_2(t)^T)^T$ ($^T$ — *символ транспонирования*) *определяются формулами* (10), (12), (11), *в которых все производные следует понимать в обобщенном смысле.*

**Метод возмущения для обобщенной задачи Коши**. Пусть в АДС (1) матрицы $A$ и $B$ постоянны. Рассмотрим соответствующую ей возмущенную задачу

$$(A + \varepsilon B)x'_\varepsilon(t) + Bx_\varepsilon(t) = f(t), \quad t \in T, \tag{13}$$

$$x_\varepsilon(0) = a \tag{14}$$

с малым параметром $\varepsilon > 0$.

В предположении регулярности пучка матриц $\lambda A + B$ и при условии $f(t) \in C^{2r}(T)$, $r \leq n$, на правую часть в [1, с. 103] доказана равномерная сходимость для любого $t \geq \varepsilon_0 > 0$ при $\varepsilon \to 0$ решения задачи (13), (14) к классическому решению исходной задачи (1), (2), если последнее существует. Там же отмечено, что на отрезке $[0, \varepsilon_0]$ возникает пограничный слой ошибок типа «всплеска»:

$$x_\varepsilon(t) = \sum_{j=0}^{2r-2} c_j \frac{e^{-t/\varepsilon}}{t^j}, \quad t \in [0, \varepsilon_0].$$

Ниже будет показано, что классическое решение задачи (13), (14), будучи продолженным нулем в обобщенном смысле при $t < 0$, сходится к обобщенному решению задачи (1), (2) в пространстве $K'_+$. При этом ограничения на $f(t)$ удалось существенно ослабить.

Определение 3. Говорят, что обобщенные функции $\tilde{g}_\varepsilon(t) \in D'$ *сходятся к обобщенной функции* $\tilde{g}(t) \in D'$ при $\varepsilon \to 0$, если для любой основной функции $\phi(t) \in D$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \langle \tilde{g}_\varepsilon(t), \phi(t) \rangle = \langle \tilde{g}(t), \phi(t) \rangle.$$

Если пучок матриц $\lambda A + B$ регулярен, то существуют неособенные $(n \times n)$-матрицы $P$ и $Q$ такие, что замена переменной $x(t) = Qy(t)$ и умножение системы (1) слева на матрицу $P$ преобразуют (1) в ЦКФ (3) [4, с. 313] (в (3) зависимость от $t$ в матрицах $N(t)$ и $J(t)$ следует опустить).

Соответствующая (3), (4) возмущенная задача Коши будет иметь вид

$$(E + \varepsilon J)y'_{\varepsilon 1}(t) + Jy_{\varepsilon 1}(t) = f_1(t), \tag{15}$$

$$(N + \varepsilon E)y'_{\varepsilon 2}(t) + y_{\varepsilon 2}(t) = f_2(t), \quad t \in T, \tag{16}$$

$$\begin{pmatrix} y_{\varepsilon 1}(0) \\ y_{\varepsilon 2}(0) \end{pmatrix} = Q^{-1}a = \begin{pmatrix} \bar{a}_1 \\ \bar{a}_2 \end{pmatrix}. \tag{17}$$

Если в (1) $f(t) \in C(T)$, то задача (15)–(17) разрешима (в классическом смысле) единственным образом при любом $a \in \mathbb{R}^n$, поскольку для достаточно малых $\varepsilon$, $0 < \varepsilon < k_0$, матрицы при производных в (15), (16) будут неособенными.

Предположим, что в (1) $f(t) \in C^r(T)$. В этом случае по теореме 2 обобщенная задача Коши (7), (8) имеет единственное решение в пространстве $K'_+$. При этом в формулах (10), (12)

$$\Omega(t) = \exp(-Jt) := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i!} J^i t^i;$$

$F^j = N^j \left(\frac{d}{dt}\right)^j$, $\left(\frac{d}{dt}\right)^j$ — обычная производная;

$$F^j[\hat{f}_2(t)] = F^j[f_2(t)\theta(t)] = N^j\big(f_2(0)\delta^{(j-1)}(t) + f_2'(0)\delta^{(j-2)}(t) + \ldots + f_2^{(j-1)}(0)\delta(t) + f_2^{(j)}(t)\theta(t)\big), \quad j = \overline{1, r-1}.$$

Принимая во внимание равенство $N^r = O$, несложно проверить, что решение задачи (7), (8) будет иметь вид

$$\tilde{y}_1(t) = \exp(-Jt)\left(\bar{a}_1 + \int\limits_0^t \exp(J\tau) f_1(\tau)\, d\tau\right)\theta(t), \tag{18}$$

$$\tilde{y}_2(t) = \sum_{s=0}^{r-2} (-1)^s N^{s+1}(\bar{a}_2 - \nu)\delta^{(s)}(t) + \sum_{j=0}^{r-1} (-1)^j N^j f_2^{(j)}(t)\theta(t), \tag{19}$$

$$\nu = \sum_{j=0}^{r-1} (-1)^j N^j f_2^{(j)}(0). \tag{20}$$

Замечание. Решение $y(t) \in C^1(T)$ задачи (3), (4) существует, если $\nu = \bar{a}_2$. В этом случае $(\tilde{y}_1(t)^T, \tilde{y}_2(t)^T)^T = y(t)\theta(t)$.

Из формулы (10) можно получить обобщенное решение задачи (15)–(17):

$$\tilde{y}_{\varepsilon 1}(t) = \exp(-(E+\varepsilon J)^{-1} Jt)\left(\bar{a}_1 + \int\limits_0^t \exp((E+\varepsilon J)^{-1} J\tau)(E+\varepsilon J)^{-1} f_1(\tau)\, d\tau\right)\theta(t), \tag{21}$$

$$\tilde{y}_{\varepsilon 2}(t) = \exp(-(N+\varepsilon E)^{-1} t)\left(\bar{a}_2 + \int\limits_0^t \exp((N+\varepsilon E)^{-1}\tau)(N+\varepsilon E)^{-1} f_2(\tau)\, d\tau\right)\theta(t), \tag{22}$$

которое представляет собой не что иное, как классическое решение задачи (15)–(17), продолженное нулем в обобщенном смысле при $t < 0$.

Перейдем к обоснованию сходимости обобщенных функций (21), (22) к функциям (18)–(20).

Вполне очевидно, что $\tilde{y}_{\varepsilon 1}(t) \to \tilde{y}_1(t)$ при $\varepsilon \to 0$ в пространстве $K'_+$. Поэтому остановимся на доказательстве сходимости $\tilde{y}_{\varepsilon 2}(t) \to \tilde{y}_2(t)$, $\varepsilon \to 0$.

Интеграл, стоящий в правой части равенства (22), возьмем $r$ раз по частям. В результате получим

$$\tilde{y}_{\varepsilon 2}(t) = \Bigg[\exp(-(N+\varepsilon E)^{-1} t)(\bar{a}_2 - \nu_\varepsilon) + \sum_{j=0}^{r-1} (-1)^j (N+\varepsilon E)^j f_2^{(j)}(t) + (-1)^r (N+\varepsilon E)^{r-1} \int\limits_0^t \exp(-(N+\varepsilon E)^{-1}(t-\tau)) f_2^{(r)}(\tau)\, d\tau\Bigg]\theta(t), \tag{23}$$

$$\nu_\varepsilon = \sum_{j=0}^{r-1} (-1)^j (N+\varepsilon E)^j f_2^{(j)}(0).$$

Ясно, что

$$\sum_{j=0}^{r-1} (-1)^j (N+\varepsilon E)^j f_2^{(j)}(t) \to \sum_{j=0}^{r-1} (-1)^j N^j f_2^{(j)}(t); \tag{24}$$

$$\nu_\varepsilon \to \nu \quad \text{при } \varepsilon \to 0 \tag{25}$$

равномерно по $\varepsilon$.

Покажем, что в обобщенном смысле

$$\exp(-(N+\varepsilon E)^{-1}t)\theta(t) \to \sum_{s=0}^{r-2} (-1)^s N^{s+1} \delta^{(s)}(t). \tag{26}$$

По определению матричной экспоненты [4, с. 110]

$$\exp(-(N+\varepsilon E)^{-1}t) = \sum_{k=0}^{\infty} (N+\varepsilon E)^{-k} \frac{(-t)^k}{k!}.$$

В силу нильпотентности матрицы $N$ имеет место представление

$$(N+\varepsilon E)^{-k} = \frac{1}{\varepsilon^k}\Bigg(E - \frac{k}{\varepsilon}N + \frac{k(k+1)}{2!\varepsilon^2}N^2 - \frac{k(k+1)(k+2)}{3!\varepsilon^3}N^3 + \dots \\ + (-1)^{r-1}\frac{k(k+1)\dots(k+r-2)}{(r-1)!\varepsilon^{r-1}}N^{r-1}\Bigg).$$

Поэтому

$$\exp(-(N+\varepsilon E)^{-1}t) = \sum_{k=0}^{\infty}\Bigg(E - \frac{k}{\varepsilon}N + \frac{k(k+1)}{2!\varepsilon^2}N^2 + \dots \\ + (-1)^{r-1}\frac{k(k+1)\dots(k+r-2)}{(r-1)!\varepsilon^{r-1}}N^{r-1}\Bigg)\frac{(-t/\varepsilon)^k}{k!}.$$

Ряд, стоящий в правой части последнего равенства, при фиксированном $\varepsilon > 0$ сходится для любого $t$. Нетрудно убедиться, что каждый из рядов

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k(k+1)\dots(k+s)}{(s+1)!\varepsilon^{s+1}} N^{s+1} \frac{(-t/\varepsilon)^k}{k!}, \quad s = \overline{0, r-2},$$

также будет сходящимся для любого $t$, поскольку

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-t/\varepsilon)^k}{k!} = e^{-t/\varepsilon}.$$

Для доказательства сходимости (26) достаточно показать, что

$$\tilde{\psi}_{\varepsilon 0}(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(E - \frac{k}{\varepsilon}N\right)\frac{(-t/\varepsilon)^k}{k!}\theta(t) = \left(E + \frac{t}{\varepsilon^2}N\right)e^{-t/\varepsilon}\theta(t) \to N\delta(t); \tag{27}$$

$$\tilde{\psi}_{\varepsilon s}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{s+1} \frac{k(k+1)\dots(k+s)}{(s+1)!\varepsilon^{s+1}} N^{s+1} \frac{(-t/\varepsilon)^k}{k!}\theta(t) \to (-1)^s N^{s+1}\delta^{(s)}(t), \tag{28}$$

$s=\overline{1,r-2}$, при $\varepsilon\to 0$.

Обозначим соответственно через $\psi_{\varepsilon 0}(t)$ и $\psi_{\varepsilon s}(t)$ функции, порождающие регулярные обобщенные функции $\tilde\psi_{\varepsilon 0}(t)$ и $\tilde\psi_{\varepsilon s}(t)$.

Сначала заметим, что

$$\int_a^b \psi_{\varepsilon 0}(t)\,dt=\begin{cases} O, & a<b<0,\\ \int\limits_0^b (E+\frac{t}{\varepsilon^2}N)e^{-t/\varepsilon}\,dt, & a<0<b,\\ \int\limits_a^b (E+\frac{t}{\varepsilon^2}N)e^{-t/\varepsilon}\,dt, & 0<a<b.\end{cases}$$

Поскольку для любого $b>0$

$$\int_0^b\left(E+\frac{t}{\varepsilon^2}N\right)e^{-t/\varepsilon}\,dt=\varepsilon E-\left(\varepsilon E+\frac{b}{\varepsilon}N+N\right)e^{-b/\varepsilon}+N\to N\quad\text{при}\quad\varepsilon\to 0$$

равномерно по $\varepsilon$, то для любых $a,b$, $0<a<b$,

$$\int_a^b\left(E+\frac{t}{\varepsilon^2}N\right)e^{-t/\varepsilon}\,dt=\int_0^b\left(E+\frac{t}{\varepsilon^2}N\right)e^{-t/\varepsilon}\,dt-\int_0^a\left(E+\frac{t}{\varepsilon^2}N\right)e^{-t/\varepsilon}\,dt\to O.$$

Кроме того, для любых положительных $a$ и $b$ и любого $\varepsilon$, $0<\varepsilon<k_0$,

$$\left\|\int_a^b\psi_{\varepsilon 0}(t)\,dt\right\|\le\int_a^b e^{-t/\varepsilon}\,dt+\|N\|\int_a^b\frac{t}{\varepsilon^2}e^{-t/\varepsilon}\,dt$$
$$<\int_0^\infty e^{-t/\varepsilon}\,dt+\|N\|\int_0^\infty\frac{t}{\varepsilon^2}e^{-t/\varepsilon}\,dt=\varepsilon+\|N\|<k_0+\|N\|.$$

По определению дельтаобразной последовательности [5, с. 52] это и означает сходимость (27).

Для обоснования предельного соотношения (28) нужно показать, что первообразные $s$-го порядка функций $\psi_{\varepsilon s}(t)$:

$$\Psi_{\varepsilon s}(t)=\int_0^t\int_0^t\dots\int_0^t\sum_{k=0}^\infty(-1)^{s+1}\frac{k(k+1)\dots(k+s)}{(s+1)!\varepsilon^{s+1}}N^{s+1}\frac{(-t/\varepsilon)^k}{k!}\,dtdt\dots dt$$
$$=(-1)^s\frac{1}{(s+1)!\varepsilon^{s+2}}N^{s+1}t^{s+1}e^{-t/\varepsilon},\quad s=\overline{1,r-2},$$

образуют дельтаобразную последовательность.

В самом деле, для любого $b>0$

$$\int_0^b\Psi_{\varepsilon s}(t)\,dt=\left.\left((-1)^{s+1}\sum_{j=0}^{s+1}\frac{1}{j!}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)^jN^{s+1}e^{-t/\varepsilon}\right)\right|_0^b$$
$$=(-1)^{s+1}\sum_{j=0}^{s+1}\frac{1}{j!}\left(\frac{b}{\varepsilon}\right)^jN^{s+1}e^{-b/\varepsilon}+(-1)^sN^{s+1}\to(-1)^sN^{s+1}\quad\text{при}\quad\varepsilon\to 0.$$

Так же, как это сделано в отношении функций $\psi_{\varepsilon 0}(t)$, можно показать, что

$$\int_a^b \Psi_{\varepsilon s}(t)\,dt \to O, \quad \varepsilon \to 0,$$

при $a < b < 0$ и $0 < a < b$.

Наконец, для любых $a, b > 0$

$$\left\| \int_a^b \Psi_{\varepsilon s}(t)\,dt \right\| < \|N^{s+1}\| \int_0^{+\infty} \frac{1}{(s+1)!\varepsilon^{s+2}} t^{s+1} e^{-t/\varepsilon}\,dt = \|N^{s+1}\|.$$

Таким образом, сходимость (28) доказана. Из (27) и (28) вытекает справедливость предельного соотношения (26).

Теперь покажем, что в (23) слагаемое, содержащее интеграл, стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$.

По теореме о среднем для любого $t \in T$ существует $\xi$, $0 < \xi < t$, такое, что

$$(-1)^r \left( (N + \varepsilon E)^{r-1} \int_0^t \exp(-(N + \varepsilon E)^{-1}(t - \tau)) f_2^{(r)}(\tau)\,d\tau \right) \theta(t)$$
$$= (-1)^r (N + \varepsilon E)^{r-1} \exp(-(N + \varepsilon E)^{-1}(t - \xi)) f_2^{(r)}(\xi) t \theta(t).$$

Аналогично (26) доказывается, что

$$\exp(-(N + \varepsilon E)^{-1}(t - \xi))\theta(t) \to \sum_{s=0}^{r-2} (-1)^s N^{s+1} \delta^{(s)}(t - \xi).$$

Так как $(N + \varepsilon E)^{r-1} \to N^{r-1}$, $\varepsilon \to 0$, имеем

$$(-1)^r (N + \varepsilon E)^{r-1} \exp(-(N + \varepsilon E)^{-1}(t - \xi)) f_2^{(r)}(\xi) t \theta(t)$$
$$\to (-1)^r N^{r-1} \sum_{s=0}^{r-2} (-1)^s N^{s+1} \delta^{(s)}(t - \xi) f_2^{(r)}(\xi) t.$$

В силу нильпотентности матрицы $N$ последнее выражение равно нулю для любых $t$, $\xi \geq 0$. Тем самым с учетом (24), (25) доказано, что функции (21), (22) сходятся в пространстве $K'_+$ к функциям (18)–(20).

Поскольку решения задач (13), (14) и (15)–(17) и обобщенных задач (6) и (7), (8) связаны соответственно равенствами

$$x_\varepsilon(t) = Q y_\varepsilon(t) \quad \text{и} \quad \tilde{x}_\varepsilon(t) = Q \tilde{y}_\varepsilon(t), \quad \det Q \neq 0,$$

можно сформулировать окончательный результат.

**Теорема 3.** *Пусть в системе* (1)

1) *пучок постоянных матриц* $\lambda A + B$ *регулярен;*

2) $f(t) \in C^r(T)$, *где* $r$ — *число нулевых квадратных блоков на диагонали верхнетреугольной матрицы* $N$ *из формулы* (3).

*Тогда решение возмущенной задачи Коши* (13), (14) *сходится к обобщенному решению задачи* (1), (2) *в пространстве* $K'_+$.

Иллюстративный пример. Рассмотрим АДС в форме (3), (4):

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ |t-1| \end{pmatrix}, \quad t \in T = [0, +\infty), \tag{29}$$

$$\begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{30}$$

в которой $d = 0$, $r = 2$, а правая часть $f(t)$ принадлежит $C(T)$. Отметим, что задача (29), (30) неразрешима в классическом смысле, так как начальные данные не являются согласованными, а правая часть недостаточно гладкая вектор-функция (не из $C^2(T)$).

Единственное решение системы (29) имеет вид

$$x_1(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < 1, \\ -1, & t \ge 1, \end{cases} \qquad x_2(t) = |t-1|.$$

Поэтому согласованными начальными данными для АДС (29) являются следующие:

$$\begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Соответствующая (29), (30) обобщенная задача Коши

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1'(t) \\ \tilde{x}_2'(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1(t) \\ \tilde{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ |t-1| \end{pmatrix} \theta(t)$$

разрешима единственным образом в классе $K'_+$:

$$\tilde{x}_1(t) = \begin{cases} -\delta(t) + \theta(t), & 0 \le t < 1, \\ -\delta(t) - \theta(t), & t \ge 1, \end{cases}$$

$$\tilde{x}_2(t) = |t-1|\theta(t) = \begin{cases} (1-t)\theta(t), & 0 \le t < 1, \\ (t-1)\theta(t), & t \ge 1. \end{cases}$$

Несложно проверить, что обобщенное решение возмущенной задачи

$$\begin{pmatrix} \varepsilon & 1 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{\varepsilon 1}'(t) \\ x_{\varepsilon 2}'(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{\varepsilon 1}(t) \\ x_{\varepsilon 2}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ |t-1| \end{pmatrix}, \quad t \in T,$$

$$\begin{pmatrix} x_{\varepsilon 1}(0) \\ x_{\varepsilon 2}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

выражается по формулам

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{\varepsilon 1}(t) &= x_{\varepsilon 1}(t)\theta(t) \\ &= \begin{cases} [1 - (1 + \frac{t}{\varepsilon} + \frac{t}{\varepsilon^2})e^{-t/\varepsilon}]\theta(t), & 0 \le t < 1, \\ -1 - (1 + \frac{t}{\varepsilon} + \frac{t}{\varepsilon^2})e^{-t/\varepsilon} + 2(1 + \frac{t}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon})e^{\frac{1-t}{\varepsilon}}]\theta(t), & t \ge 1, \end{cases} \end{aligned}$$

$$\tilde{x}_{\varepsilon 2}(t) = x_{\varepsilon 2}(t)\theta(t) = \begin{cases} [1 - t + \varepsilon - (1+\varepsilon)e^{-t/\varepsilon}]\theta(t), & 0 \le t < 1, \\ [-1 + t - \varepsilon - (1+\varepsilon)e^{-t/\varepsilon} + 2\varepsilon e^{\frac{1-t}{\varepsilon}}]\theta(t), & t \ge 1, \end{cases}$$

где $x_{\varepsilon 1}(t), x_{\varepsilon 2}(t) \in C^1(T)$.

С учетом того, что $\frac{t}{\varepsilon^2} e^{-t/\varepsilon}\theta(t) \to \delta(t)$ при $\varepsilon \to 0$, нетрудно убедиться, что имеет место сходимость

$$\tilde{x}_{\varepsilon 1}(t) \to \tilde{x}_1(t); \quad \tilde{x}_{\varepsilon 2}(t) \to \tilde{x}_2(t), \quad \varepsilon \to 0,$$

в пространстве $K'_+$.

## *ЛИТЕРАТУРА*

**1.** *Бояринцев Ю. Е.* Регулярные и сингулярные системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Новосибирск: Наука, 1980.

**2.** *Шилов Г. Е.* Математический анализ. Второй специальный курс. М.: Наука, 1965.

**3.** *Чистяков В. Ф.* Алгебро-дифференциальные операторы с конечномерным ядром. Новосибирск: Наука, 1996. Т. .

**4.** *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1988.

**5.** *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Обобщенные функции и действия над ними. М.: Физматгиз, 1959.

*Статья поступила 21 марта 2000 г.*

*Щеглова Алла Аркадьевна*
*Институт динамики систем и теории управления СО РАН*
*ул. Лермонтова, 134, Иркутск 664033*
`shchegl@icc.ru`