Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2002. Том 43, № 5

УДК 517.54

МЕТРИЧЕСКАЯ ПЛОТНОСТЬ И КВАЗИМЁБИУСОВЫ ОТОБРАЖЕНИЯ

З. Ш. Ибрагимов

Аннотация: Изучается понятие μ-плотности метрических пространств, введенное В. В. Асеевым и Д. А. Троценко. Установлена связь между μ-плотностью и равномерной плотностью. μ-Плотные пространства охарактеризованы как «дугово»-связные метрические пространства, в которых «дуги» суть квазимёбиусовы образы канторова множества. Охарактеризованы квазиконформные отображения $\dot{\mathbb{R}}^n$ в терминах μ-плотности.

Ключевые слова: метрическая плотность, квазиконформное отображение, квазимебиусово отображение

1. Введение

Теория квазимёбиусовых отображений, впервые описанная в работах В. В. Асеева, П. Тукиа и Ю. Вяйсяля, включает в себя теорию квазиконформных отображений как локально квазимёбиусовых вложений областей в $\dot{\mathbb{R}}^n$ (см. [1, 2.6; 2, 2.6]. Понятие метрической плотности, введенное в [1], играет специальную роль в теории квазимёбиусовых отображений. А именно, функция искажения квазимёбиусова отображения, заданная на таких множествах, может быть аппроксимирована степенными функциями [1, теорема 3.2]. Кроме того, в [3, теорема 4] показано, что любое пространство, обладающее указанным выше свойством, будет μ-плотным (см. также [4, 3.8; 5, 2.6]).

В данной статье изучаются свойства μ-плотных множеств в связи с квазиконформными и квазимёбиусовыми отображениями, а также однородно плотными множествами. Связь между μ-плотностью и однородной плотностью установлена в лемме 3.1. В примере 3.9 дан точный коэффициент метрической плотности канторова множества. Теорема 4.4 характеризует μ-плотные множества как «дугово»-связные метрические пространства, в которых в качестве дуг выступают квазимёбиусовы образы канторова множества. Наконец, в теореме 5.4 дана характеристика квазиконформности в терминах коэффициента метрической плотности.

2. Основные понятия и обозначения

2.1. Основные обозначения взяты из [6]. Все рассматриваемые пространства метрические без изолированных точек. Обычно они обозначаются буквами X или Y. Расстояние между точками a, b записывается как $|a-b|$. Одноточечное расширение пространства X — это объединение $\dot{X} = X \cup \{\infty\}$, где $\infty \notin X$. Если $E \subset X$ замкнуто и ограничено, то $\dot{X} \setminus E$ считается окрестностью ∞. Это задает хаусдорфову топологию на $\dot{X}$. Если каждое ограниченное замкнутое множество в X компактно, то $\dot{X}$ — одноточечная компактификация X. Если $A \subset X$, то $\overline{A}$ — замыкание A, $\mathscr{C}A$ — дополнение $X \setminus A$, ∂A — граница A и $\dot{A}$ — подпространство $A \cup \{\infty\}$ в $\dot{X}$. Через $d(A, B)$ будем обозначать расстояние между множествами A, B и через $d(A)$ — диаметр A. Открытый шар $\{x : |x - x_0| < r\}$ записывается как $B(x_0, r)$. Через $|a|$ обозначаем евклидову норму точки $a \in \mathbb{R}^n$.

2.2. Пусть a, b, c, d — различные точки из $\dot{X}$. Если они лежат в X, их двойное отношение $\tau = |a, b, c, d|$ определяется так:

$$\tau = |a, b, c, d| = \frac{|a - b||c - d|}{|a - c||b - d|}. \tag{2.1}$$

В противном случае опускается множитель, содержащий ∞, например,

$$|a, b, c, \infty| = \frac{|a - b|}{|a - c|}.$$

2.3. Предположим, что $f : A \to \dot{Y}$, $A \subset \dot{X}$, — вложение и $\tau = |a, b, c, d|$ — двойное отношение точек из A. Обозначим через τ' двойное отношение образов $|f(a), f(b), f(c), f(d)|$. Говорят, что f *квазимёбиусово*, обозначают $f \in QM$, если существует гомеоморфизм $\eta : [0, \infty) \to [0, \infty)$ такой, что $\tau' \leq \eta(\tau)$, где $\tau = |a, b, c, d|$ — двойное отношение четырех различных точек из A. При этом говорят также, что f является *η-QM-отображением* (или что оно *обладает свойством η-QM*). Говорят также, что f *η-квазисимметрично*, или является η-QM-отображением, или *обладает свойством η-QS*, если

$$\frac{|f(a) - f(b)|}{|f(a) - f(c)|} \leq \eta\left(\frac{|a - b|}{|a - c|}\right) \tag{2.2}$$

для любой тройки $a, b, c \in A$ с $a \neq c$ (см. [4]).

Следуя [1], рассмотрим гомеоморфизм

$$\eta_\alpha(t) = \begin{cases} t^\alpha, & t \geq 1, \\ t^{\frac{1}{\alpha}}, & 0 \leq t < 1, \end{cases} \tag{2.3}$$

где $\alpha \geq 1$. Тогда о любом вложении со свойством ω-QM (ω-QS) таком, что $\omega(t) = M\eta_\alpha(t)$, говорят, что оно *обладает свойством* (M, α)-QM (соответственно (M, α)-QS), где $M > 0$.

2.4. Пусть $A \subset X$. Для трех различных точек $x, a, b \in \overline{A}$ с $|a - x| < |b - x|$ через $G_x(a, b)$ обозначим множество $\{y \in X : |a - x| < |y - x| < |b - x|\}$; назовем его *сферическим кольцом.* Пусть $\mathscr{H}(A)$ — совокупность всех $G_x(a, b)$ таких, что $G_x(a, b) \cap A = \varnothing$. Определим модуль $G_x(a, b)$, полагая

$$\Lambda(G_x(a, b)) = \ln \frac{|b - x|}{|a - x|}. \tag{2.4}$$

Для $A \subset X$ положим

$$\Lambda_0(A) = \sup_{G \in \mathscr{H}(A)} \Lambda(G). \tag{2.5}$$

Если $\mathscr{H}(A) = \varnothing$, полагаем $\Lambda_0(A) = 0$. Будем говорить, что $G_x(a, b)$ *разделяет подмножества C и D в X*, если $|c - x| \leq |a - x|$ и $|b - x| \leq |d - x|$ для всех $c \in C$ и $d \in D$ соответственно.

3. μ-Плотные и однородно плотные множества

В этом разделе установим связь между свойствами μ-плотности и однородной плотности, введенной П. Тукиа и Ю. Вяйсяля в [4]. Затем, используя ее, мы охарактеризуем μ-плотность множества A в терминах сферического кольца с наибольшим модулем, разделяющего компоненты A (следствия 3.4 и 3.5).

Определение [4, 3.8]. Пространство X называется *однородно плотным* (*обладает свойством HD*), если существуют числа λ_1, λ_2 такие, что $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 < 1$ и для каждой пары точек $a, b \in X$ есть точка $x \in X$, удовлетворяющая условию $\lambda_1|b-a| \leq |x-a| \leq \lambda_2|b-a|$. Говорят также, что X *обладает свойством* (λ_1, λ_2)-*HD*.

Следуя [1], последовательность $\{x_i, i \in \mathbb{Z}\}$ точек из X, отличных от $a, b \in \dot{X}$, будем называть *цепью, соединяющей точки a и b в X*, если $x_i \to a$ при $i \to -\infty$ и $x_i \to b$ при $i \to +\infty$. Если существует вещественное μ, $1 < \mu < \infty$, такое, что $|\ln(|a, x_i, x_{i+1}, b|)| \leq \ln \mu$ для всех $i \in \mathbb{Z}$, то цепь $\{x_i\}$ называют *μ-цепью.*

Определение [1, 3.1]. Пространство X называют *μ-плотным* ($\mu > 1$), если для каждой пары точек a, b из X существует μ-цепь $\{x_i\}$, соединяющая в X точки a и b.

Докажем, что понятия однородной плотности и μ-плотности тесно связаны между собой.

Лемма 3.1. *Пусть X — метрическое пространство. Если X обладает свойством* (λ_1, λ_2)-HD, *то X μ-плотно с*

$$\mu = \left(\frac{1+\lambda_2}{\lambda_1(1-\lambda_2)}\right)^2.$$

Обратно, если X μ-плотно, то X обладает свойством $\left(\frac{1}{6\mu}, \frac{1}{4}\right)$-HD.

Доказательство. Предположим, что X обладает свойством (λ_1, λ_2)-HD, и пусть $a, b \in X$. Тогда по предположению существует $x_1 \in X$ такое, что

$$\lambda_1|a-b| \leq |a-x_1| \leq \lambda_2|a-b|.$$

Аналогично для каждого $n = 2, 3, \ldots$ существует $x_n \in X$ такое, что

$$\lambda_1|a-x_{n-1}| \leq |a-x_n| \leq \lambda_2|a-x_{n-1}|.$$

Тогда

$$|a-x_n| \leq \lambda_2|a-x_{n-1}| \leq \cdots \leq \lambda_2^n|a-b|,$$

и так как $\lambda_2 < 1$, то $x_n \to a$ при $n \to +\infty$. Имеем

$$\begin{aligned}|a, x_n, x_{n+1}, b| = \frac{|a-x_n|}{|a-x_{n+1}|} \cdot \frac{|x_{n+1}-b|}{|x_n-b|} &\leq \frac{1}{\lambda_1} \cdot \frac{|a-b|+|x_{n+1}-a|}{|a-b|-|x_n-a|} \\ &\leq \frac{1}{\lambda_1} \cdot \frac{(1+\lambda_2^{n+1})|a-b|}{(1-\lambda_2^n)|a-b|} \leq \frac{1+\lambda_2}{\lambda_1(1-\lambda_2)}\end{aligned}$$

и

$$|a, x_n, x_{n+1}, b| \geq \frac{1}{\lambda_2} \cdot \frac{|a-b|-|x_{n+1}-a|}{|a-b|+|x_n-a|} \geq \frac{1}{\lambda_2} \cdot \frac{(1-\lambda_2^{n+1})|a-b|}{(1+\lambda_2^n)|a-b|} \geq \frac{1-\lambda_2}{\lambda_2}.$$

Следовательно,

$$|\ln(|a,x_n,x_{n+1},b|)| \le \max\left\{\ln\frac{1+\lambda_2}{\lambda_1(1-\lambda_2)}, \ln\frac{\lambda_2}{1-\lambda_2}\right\}$$
$$= \ln\frac{1+\lambda_2}{\lambda_1(1-\lambda_2)} < \ln\left(\frac{1+\lambda_2}{\lambda_1(1-\lambda_2)}\right)^2.$$

Аналогично для каждого $n = 0,1,2,\dots$ существует $y_n \in X$ такое, что $y_n \to b$ при $n \to +\infty$ и

$$|\ln(|a,y_n,y_{n+1},b|)| \le \ln\left(\frac{1+\lambda_2}{\lambda_1(1-\lambda_2)}\right)^2.$$

Кроме того,

$$|a,x_1,y_0,b| \ge \frac{|a-x_1|}{|a-b|(1+\lambda_2)} \cdot \frac{|y_0-b|}{|a-b|(1+\lambda_2)} \ge \left(\frac{\lambda_1}{1+\lambda_2}\right)^2$$

и

$$|a,x_1,y_0,b| \le \frac{|a-x_1|}{|a-b|(1-\lambda_2)} \cdot \frac{|y_0-b|}{|a-b|(1-\lambda_2)} \le \left(\frac{\lambda_2}{1-\lambda_2}\right)^2.$$

Тем самым цепь

$$z_k = \begin{cases} x_{-k} & \text{для } k = -1,-2,\dots, \\ y_k & \text{для } k = 0,1,2,\dots \end{cases}$$

является μ-цепью, соединяющей в X точки a и b, где

$$\mu = \left(\frac{1+\lambda_2}{\lambda_1(1-\lambda_2)}\right)^2.$$

Этим доказана первая часть леммы.

Пусть теперь X μ-плотно. Пусть $a,b \in X$ и $\{x_i\}$ — μ-цепь, соединяющая в X точки a и b. Тогда для каждого $i \in \mathbb{Z}$ имеем

$$\frac{1}{\mu} \le \frac{|a-x_i|\,|x_{i+1}-b|}{|a-x_{i+1}|\,|x_i-b|} \le \mu.$$

Положим

$$G = \left\{x \in X : \frac{1}{6\mu}|a-b| \le |a-x| \le \frac{1}{4}|a-b|\right\}.$$

Ясно, что любая точка $x \in G$ обеспечит завершение доказательства. Таким образом, достаточно доказать, что $G \ne \varnothing$. Пусть $G = \varnothing$. Тогда существует $i_0 \in \mathbb{Z}$ такое, что

$$|a-x_{i_0}| < \frac{|a-b|}{6\mu} \quad \text{и} \quad |a-x_{i_0+1}| > \frac{|a-b|}{4}.$$

Также

$$\frac{1}{\mu} \le \frac{|a-x_{i_0}|}{|b-x_{i_0}|} \cdot \frac{|x_{i_0+1}-b|}{|x_{i_0+1}-a|} < \frac{\frac{1}{6\mu}|a-b|}{(1-\frac{1}{6\mu})|a-b|} \cdot \frac{|a-b|+|a-x_{i_0+1}|}{|a-x_{i_0+1}|},$$

откуда

$$\frac{|a-b|+|a-x_{i_0+1}|}{|a-x_{i_0+1}|} > \frac{6\mu-1}{\mu} > 5,$$

так что $|a-x_{i_0+1}| < \frac{|a-b|}{4}$. Требуемое противоречие получено. $\square$

В следующих двух леммах устанавливается связь между однородной плотностью множества A и величиной $\Lambda_0(A)$, определенной в (2.5).

Лемма 3.2. *Если $A \subset X$ обладает свойством (λ_1, λ_2)-HD, то $\Lambda_0(A) \le \ln \frac{1}{\lambda_1}$.*

Доказательство. Если $\mathscr{H}(A) = \varnothing$, то доказывать нечего. Предполагая иное, рассмотрим произвольное сферическое кольцо G в $\mathscr{H}(A)$. Тогда

$$G = \{x \in X : |c-a| < |c-x| < |c-b|\}$$

для некоторых $a, b, c \in \overline{A}$. По предположению существует $d \in A$ такое, что

$$\lambda_1|c-b| \le |c-d| \le \lambda_2|c-b|.$$

Так как $G \cap A = \varnothing$, имеем $|c-a| \ge |c-d| \ge \lambda_1|c-b|$. Отсюда

$$\Lambda(G) = \ln \frac{|c-b|}{|c-a|} \le \ln \frac{|c-b|}{\lambda_1|c-b|} = \ln \frac{1}{\lambda_1},$$

так что $\Lambda_0(A) \le \ln \frac{1}{\lambda_1}$. $\square$

Лемма 3.3. *Пусть $A \subset X$. Если $\Lambda_0(A) \le k$, то A обладает свойством $(\frac{1}{2e^{2k}}, \frac{1}{2})$-HD.*

Доказательство. Пусть $c, b \in A$. Положим

$$G = \left\{x \in X : \frac{|c-b|}{2e^{2k}} < |c-x| < \frac{|c-b|}{2}\right\}.$$

Заметим, что $\Lambda(G) = 2k$ и тем самым $G \cap A \ne \varnothing$. Тогда для любого $x \in G \cap A$ имеем

$$\frac{1}{2e^{2k}}|c-b| \le |c-x| \le \frac{1}{2}|c-b|. \qquad \square$$

Последние две леммы вместе с леммой 3.1 приводят к двум следствиям, в которых μ-плотность множества A связывается с величиной $\Lambda_0(A)$.

Следствие 3.4. *Если $A \subset X$ μ-плотно, то $\Lambda_0(A) \le \ln 6\mu$.* $\square$

Следствие 3.5. *Пусть $A \subset X$. Если $\Lambda_0(A) \le k$, то A μ-плотно с $\mu \le 36e^{4k}$.* $\square$

Ниже в следствии 3.7 мы установим связь между модулями сферических колец, разделяющих две точки, и возможностью связать эти точки μ-цепью. Но сначала докажем такой результат.

Лемма 3.6. *Предположим, что точки $x, y \in A \subset X$ не могут быть связаны в A какой-либо μ-цепью. Тогда либо $\sup \Lambda(G_x(a,b)) = +\infty$, либо $\sup \Lambda(G_y(a,b)) = +\infty$, где $G_x(a,b)$ и $G_y(a,b)$ в $\mathscr{H}(A)$ и супремум берется по всем $a, b \in \overline{A}$ таким, что $G_x(a,b)$ и $G_y(a,b)$ разделяют множества $\{x\}$ и $\{y\}$.*

Доказательство. Пусть $\sup \Lambda(G_x(a,b)) \le p$ и $\sup \Lambda(G_y(a,b)) \le p$ для некоторого $p < \infty$. Тогда множества

$$G_x{}^i = \left\{z \in X : \frac{1}{2e^{2pi}}|x-y| < |x-z| < \frac{1}{2e^{2p(i-1)}}|x-y|\right\}$$

и

$$G_y{}^i = \left\{z \in X : \frac{1}{2e^{2pi}}|x-y| < |y-z| < \frac{1}{2e^{2p(i-1)}}|x-y|\right\}$$

с $\Lambda(G_x{}^i) = \Lambda(G_y{}^i) = 2p$ имеют непустые пересечения с A для каждого $i = 1, 2, \dots$. Значит, существует последовательность $\{z_k,\ k \in \mathbb{Z}\}$, где $z_k \in G_x{}^{(-k+1)} \cap A$ для $k = 0, -1, -2, \dots$ и $z_k \in G_y{}^k \cap A$ для $k = 1, 2, \dots$, являющаяся μ-цепью, связывающей в A точки x, y и $\mu \le 9e^{4p}$. Этим достигнуто требуемое противоречие. $\square$

Следствие 3.7. *Пусть $\mu > 9$. Если $x, y \in A \subset X$ не могут быть соединены в A μ-цепью, то существует $G_z(a,b) \in \mathscr{H}(A)$ такое, что $G_z(a,b)$ разделяет множества $\{x\}$, $\{y\}$ и $\Lambda(G_z(a,b)) > \frac{1}{4}\ln(\mu/9)$, где $z = x$ или $z = y$.* $\square$

Определим меру плотности для метрических пространств.

Определение 3.8. Для метрического пространства X величина $\mu_d(X) = \inf\{\mu : X\ \mu\text{-плотно}\}$ называется *коэффициентом метрической плотности* X.

Завершим этот раздел примером, в котором установлен коэффициент метрической плотности канторова множества F на промежутке $[0,1]$.

Пример 3.9. Если F — канторово множество, то $\mu_d(F) = 12.25$.

Действительно, согласно [7] F имеет следующее устройство. Пусть

$$h_1(x) = \frac{1}{3}x, \quad h_2(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$$

— преобразование подобия в $\mathbb{R}^1$. Для $I = [0,1]$ положим $I_1 = h_1(I)$, $I_2 = h_2(I)$ и $F_1 = \partial I_1 \cup \partial I_2$. Аналогично положим

$$F_2 = \partial I_{11} \cup \partial I_{12} \cup \partial I_{21} \cup \partial I_{22},$$

где

$$I_{11} = h_1(h_1(I)), \quad I_{12} = h_1(h_2(I)), \quad I_{21} = h_2(h_1(I)), \quad I_{22} = h_2(h_2(I)).$$

Продолжая процесс, мы получаем последовательность компактных множеств

$$F_k = \bigcup_{i_1,i_2,\dots,i_k \in \{1,2\}} \partial I_{i_1 i_1 \dots i_k}, \quad \text{где} \quad I_{i_1 i_1 \dots i_k} = h_{i_1} \circ h_{i_2} \circ \dots \circ h_{i_k}(I).$$

Тогда $F_1 \subset F_2 \subset \dots \subset F_k \subset F_{k+1} \subset \dots$ и $F = \overline{F'}$, где $F' = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} F_k$. Заметим, что

$$d(I_{i_1 i_2 \dots i_k}) = (1/3)^k, \quad d(I_{i_1 i_2 \dots i_k 1}, I_{i_1 i_2 \dots i_k 2}) = (1/3)^{k+1}.$$

Опуская детали, отметим следующие утверждения.

Утверждение 1. *Для любых различных точек $a, b \in F'$ существует последовательность $\{x_k,\ k = 0,1,2,\dots\}$ точек из F' с $x_0 = b$ такая, что $x_k \to a$ при $k \to \infty$ и $|a - x_{k+1}| < |a - x_k| \le 3|a - x_{k+1}|$ для всех $k = 0,1,2,\dots$.*

Утверждение 2. *Для любых $a \in I_1 \cap F'$ и $b \in I_2 \cap F'$ существуют $x \in I_1 \cap F'$ и $y \in I_2 \cap F'$ такие, что $|\ln(|a,x,y,b|)| \le \ln(12.25)$.*

Кроме того, если $a = 2/9$ и $b = 7/9$, то $|\ln(|a,x,y,b|)| \ge \ln 12.25$ для любых $x \in I_1$, $y \in I_2$, причем равенство достигается только для $x = 0$ и $y = 1$.

С помощью утверждений 1 и 2 легко показать, что

$$\mu_d(F') = 12.25.$$

Наконец, используя тот факт, что $\mu_d(X) \le \mu$ влечет $\mu_d(\overline{X}) \le \mu$ для любого множества $X \in \dot{\mathbb{R}}^n$, получим, что $\mu_d(F) = 12.25$. Мы опускаем детали доказательства этого факта. $\square$

4. Квазимёбиусовы отображения и μ-плотные множества

В этом разделе мы изучаем некоторые связи между QM-отображениями и μ-плотными множествами. Впервые П. Тукиа и Ю. Вяйсяля было замечено (см. [4]), что каждое QS-отображение, заданное на HD-множестве, будет (C,α)-QS-отображением. Затем подобные результаты, установленные В. В. Асеевым и Д. А. Троценко, легли в основу введения μ-плотных множеств.

Теорема 4.1 [1, 3.2]. *Каждое ω-QM-отображение, заданное на μ-плотном множестве, будет (M,α)-QM-отображением, где M и α зависят только от ω и μ.*

То, что условие μ-плотности в теореме 4.1 является также необходимым, отчасти показано в [1, 4.1]. Полное решение, данное в [3, теорема 3], привело к иной характеристике μ-плотных множеств.

Теорема 4.2 [3, теорема 4]. *Пусть $X \subset \dot{\mathbb{R}}^n$ — множество без изолированных точек. Тогда X μ-плотно тогда и только тогда, когда каждое ω-QM-отображение $f : X \to \dot{\mathbb{R}}^n$ будет (M,α)-QM-отображением, где M,α и μ, ω зависят только друг от друга.*

Теорему 4.2 можно сравнить со следующей теоремой Троценко и Вяйсяля.

Теорема 4.3 [8, теорема 6.21]. *Для метрического пространства A следующие условия количественно эквивалентны:*

(1) *A M-относительно связно,*

(2) *каждое η-квазисимметрическое отображение A будет (C,α)-квазисимметрическим с (C,α), зависящей только от η.*

M-относительно связные множества включают равномерно совершенные множества, но они могут содержать изолированные точки. Более подробно об этих множествах см. в [8].

Предположим теперь, что для каждой пары различных точек a,b множества X существует ω-QM-отображение $f : F \to X$ такое, что $f(0) = a$ и $f(1) = b$, где F — канторово множество (см. выше пример 3.9). Тогда легко видеть, что X μ-плотно с μ, зависящим только от ω. Сейчас мы докажем обращение этого утверждения.

Теорема 4.4. *Пусть X — полное метрическое пространство и F — канторово множество. Если X μ-плотно, то для любых $b_1,b_2 \in X$ с $b_1 \neq b_2$ существует (M,n_0)-QM-отображение $g : F \to X$ с $g(0) = b_1$ и $g(1) = b_2$, где n_0 и M зависят только от μ. Здесь n_0 — наименьшее целое, большее чем $\max\{\mu+1,4\}$.*

Доказательство. Положим $\omega(t) = 5 \cdot 3^{n_0}\eta_{n_0}(t)$ (см. 2.3) и $E_0 = \{b_1,b_2\}$. Тогда по лемме 3.1 существуют $b_{12}, b_{21} \in X$ такие, что

$$\frac{|b_1-b_2|}{6\mu} \leq |b_1-b_{12}| \leq \frac{|b_1-b_2|}{4}$$

и

$$\frac{|b_1-b_2|}{6\mu} \leq |b_{21}-b_2| \leq \frac{|b_1-b_2|}{4}.$$

Пусть $E_1 = \{b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22}\}$, где $b_{11} = b_1$ и $b_{22} = b_2$. Применив лемму 3.1 к парам (b_{11}, b_{12}) и (b_{21}, b_{22}), получим

$$E_2 = \{b_{111}, b_{112}, b_{121}, b_{122}, b_{211}, b_{212}, b_{221}, b_{222}\},$$

где $b_{111} = b_{11}$, $b_{122} = b_{12}$, $b_{211} = b_{21}$, $b_{222} = b_{22}$. Заметим, что

$$\frac{|b_1 - b_2|}{(6\mu)^2} \le |b_{i_1 i_2 1} - b_{i_1 i_2 2}| \le \frac{|b_1 - b_2|}{4^2}$$

для всех 2-индексов $i_1 i_2$. Продолжая процесс, мы получим последовательность $\{E_k\}$, $E_k = \{b_{i_1 i_2 \dots i_k i_{k+1}},\ i_j \in \{1,2\}\}$, подмножеств X. Кроме того,

$$E_0 \subset E_1 \subset E_2 \subset \dots \subset E_k \subset E_{k+1} \subset \dots \tag{4.4}$$

и

$$\frac{|b_1 - b_2|}{(6\mu)^k} \le |b_{i_1 i_2 \dots i_k 1} - b_{i_1 i_2 \dots i_k 2}| \le \frac{|b_1 - b_2|}{4^k} \tag{4.5}$$

для всех k-индексов $i_1 i_2 \dots i_k$. Положим $E' = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k$. Будем говорить, что E_k является k-м итерационным подмножеством в X, порожденным парой $\{b_1, b_2\}$.

Из обоснования примера 3.9 вытекает, что $F' = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} F_k$ и $F = \overline{F}'$. Для удобства введем следующие обозначения:

$$F_1 = \{a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}\}, \quad F_2 = \{a_{111}, a_{112}, a_{121}, a_{122}, a_{211}, a_{212}, a_{221}, a_{222}\}, \dots,$$

$F_k = \{a_{i_1 i_2 \dots i_k i_{k+1}},\ i_j \in \{1,2\}\}$. Здесь

$$a_{11} = 0, \quad a_{12} = 1/3, \quad a_{21} = 2/3, \quad a_{22} = 1,$$

$$a_{111} = a_{11} = 0, \quad a_{112} = 1/9, \quad a_{121} = 2/9, \quad a_{122} = a_{12} = 1/3,$$
$$a_{211} = a_{21} = 2/3, \quad a_{212} = 7/9, \quad a_{221} = 8/9, \quad a_{222} = a_{22} = 1.$$

Для каждого $k = 1, 2, \dots$ определим отображение $f_k : F_k \to E_k$, полагая

$$f_k(a_{i_1 i_2 \dots i_{k+1}}) = b_{i_1 i_2 \dots i_{k+1}}.$$

Очевидным образом определено отображение $f : F' \to E'$.

Сначала покажем, что f — ω-QS-отображение. Очевидно, достаточно показать, что f_k будет ω-QS-отображением для каждого $k = 1, 2, \dots$. Доказательство проведем индукцией по k. Если $k = 1$, легко проверить, что f_1 — ω-QS-отображение. Предположим, что f_{k-1} — ω-QS-отображение. Заметим, что f_{k-1} будет ω-QS-вложением из F_{k-1} в k-е итерационное подмножество в X, порожденное любой парой точек из X. Пусть $h_1(x) = \frac{x}{3}$ и $h_2(x) = \frac{x+2}{3}$ — преобразование подобия в $\mathbb{R}^1$. Тогда

$$F_k = h_1(F_{k-1}) \cup h_2(F_{k-1}), \quad E_k = f_k(F_k) = (f_k \circ h_1)(F_{k-1}) \cup (f_k \circ h_2)(F_{k-1}).$$

Пусть x, y, z — тройка различных точек из F_k. Тогда ввиду определения f_k и по предположению индукции

$$f_{k|h_1(F_{k-1})} \text{ и } f_{k|h_2(F_{k-1})}$$

суть ω-QS-отображения. Значит, достаточно рассмотреть следующие два случая.

Случай 1: $x \in h_1(F_{k-1})$ и $y, z \in h_2(F_{k-1})$. Так как $1/4 + 1/4^2 + 1/4^3 + \dots = 1/3$, имеем

$$b_{1 i_1 i_2 \dots i_n} \in B(b_1, (1/3)|b_1 - b_2|) \text{ и } b_{2 i_1 i_2 \dots i_n} \in B(b_2, (1/3)|b_1 - b_2|)$$

для всех n-индексов $i_1 i_2 \dots i_n$ и всех $n = 1, 2, \dots$. Тем самым

$$f_k(x) \in B(b_1, (1/3)|b_1 - b_2|) \text{ и } f_k(y), f_k(z) \in B(b_2, (1/3)|b_1 - b_2|),$$

откуда легко получить, что

$$\frac{1}{3} \le \frac{|x-y|}{|x-z|} \le 3 \text{ и } \frac{1}{5} \le \frac{|f_k(x) - f_k(y)|}{|f_k(x) - f_k(z)|} \le 5.$$

Следовательно, f_k является $(5 \cdot 3^{n_0}, n_0)$-QS-отображением.

Случай 2: $x, y \in h_1(F_{k-1})$ и $z \in h_2(F_{k-1})$. Тогда $x = a_{i_1 i_2 \dots i_{k+1}}$ и $y = a_{j_1 j_2 \dots j_{k+1}}$ для некоторых $(k+1)$-индексов $i_1 i_2 \dots i_{k+1}$ и $j_1 j_2 \dots j_{k+1}$ соответственно и $i_1 = j_1 = 1$. Пусть p — наименьшее целое, $2 \le p \le k+1$, для которого $i_p \ne j_p$. Тогда

$$\frac{1}{3^p} \le |x - y| \le \frac{1}{3^{p-1}},$$

где $x = a_{i_1 i_2 \dots i_{(p-1)} i_p \dots i_{(k+1)}}$ и $y = a_{i_1 i_2 \dots i_{(p-1)} j_p \dots j_{(k+1)}}$. Отсюда

$$x, y \in [a_{i_1 i_2 \dots i_{(p-1)} 1},\ a_{i_1 i_2 \dots i_{(p-1)} 2}].$$

Кроме того, x и y лежат в различных подсегментах $[a_{i_1 i_2 \dots i_{(p-1)} 11},\ a_{i_1 i_2 \dots i_{(p-1)} 12}]$ и $[a_{i_1 i_2 \dots i_{(p-1)} 21},\ a_{i_1 i_2 \dots i_{(p-1)} 22}]$ сегмента $[a_{i_1 i_2 \dots i_{(p-1)} 1},\ a_{i_1 i_2 \dots i_{(p-1)} 2}]$. Ввиду симметрии можно считать, что

$$x \in [a_{i_1 i_2 \dots i_{(p-1)} 11}, a_{i_1 i_2 \dots i_{(p-1)} 12}], \quad y \in [a_{i_1 i_2 \dots i_{(p-1)} 21}, a_{i_1 i_2 \dots i_{(p-1)} 22}].$$

Тогда

$$f_k(x) \in B(b_{1 i_2 \dots i_{(p-1)} 1}, (1/3)|b_{1 i_2 \dots i_{(p-1)} 1} - b_{1 i_2 \dots i_{(p-1)} 2}|)$$

и

$$f_k(y) \in B(b_{1 i_2 \dots i_{(p-1)} 2}, (1/3)|b_{1 i_2 \dots i_{(p-1)} 1} - b_{1 i_2 \dots i_{(p-1)} 2}|).$$

Поэтому

$$\frac{|f_k(x) - f_k(y)|}{|f_k(x) - f_k(z)|} \le \frac{\frac{5}{3}(\frac{1}{4})^{p-1}|b_1 - b_2|}{\frac{1}{3}|b_1 - b_2|} \le 5\left(\frac{1}{3}\right)^{p-1} = 15\left(\frac{1}{3}\right)^{p}$$

и

$$\frac{|f_k(x) - f_k(y)|}{|f_k(x) - f_k(z)|} \ge \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{6\mu})^{p-1}|b_1 - b_2|}{\frac{5}{3}|b_1 - b_2|} \ge \frac{(\frac{1}{3^{n_0}})^{p-1}}{5} = \frac{(\frac{1}{3^{n_0}})^{p-2}}{5 \cdot 3^{n_0}} \ge \frac{1}{5 \cdot 3^{n_0}}(\frac{1}{3^{p-2}})^{n_0}.$$

Поскольку

$$\frac{1}{3^p} \le \frac{|x-y|}{|x-z|} \le \frac{1}{3^{p-2}},$$

то

$$\frac{1}{5 \cdot 3^{n_0}}\left(\frac{|x-y|}{|x-z|}\right)^{n_0} \le \frac{|f_k(x) - f_k(y)|}{|f_k(x) - f_k(z)|} \le 15 \cdot \frac{|x-y|}{|x-z|}.$$

Таким образом, f_k представляет собой $(5 \cdot 3^{n_0}, n_0)$-QS-отображение.

Комбинируя случаи 1 и 2, можно показать, что $f_k : F_k \to E_k$ является $(5 \cdot 3^{n_0}, n_0)$-QS-отображением и поэтому таким же будет $f : F' \to E'$. Ввиду полноты X на основании [4, 2.25] f может быть продолжено до $(5 \cdot 3^{n_0}, n_0)$-QS-вложения $g : F \to X$. Тогда по [1, 2.9] g будет (M, n_0)-QM-отображением, где M зависит только от n_0. $\square$

5. Характеристика квазиконформности в терминах метрической плотности

В этом разделе мы (качественно) охарактеризуем квазиконформные отображения из $\dot{\mathbb{R}}^n$ в себя в терминах коэффициентов метрической плотности подмножеств $\dot{\mathbb{R}}^n$. Обозначения и основные понятия, используемые здесь, можно найти в [9–11]. Пусть Γ — семейство кривых в $\dot{\mathbb{R}}^n$ и $F(\Gamma)$ — множество всех неотрицательных борелевских функций $\rho : \mathbb{R}^n \to \dot{\mathbb{R}}^1$ таких, что

$$\int\limits_\gamma \rho\, ds \geq 1$$

для каждой локально спрямляемой кривой $\gamma \in \Gamma$. Тогда коэффициент конформности Γ определяется как

$$M(\Gamma) = \inf_{\rho \in F(\Gamma)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho^n\, dm.$$

Будем называть *кольцом* область $A \subset \dot{\mathbb{R}}^n$, дополнение которой является объединением двух непересекающихся связных компактных множеств $\mathscr{C}_0$ и $\mathscr{C}_1$. Такое кольцо обозначим через $R(\mathscr{C}_0, \mathscr{C}_1)$. Будем говорить, что кольцо $R(\mathscr{C}_0, \mathscr{C}_1)$ *вырожденное*, если либо $\mathscr{C}_0$, либо $\mathscr{C}_1$ состоит из одной точки. Пусть $A = R(\mathscr{C}_0, \mathscr{C}_1)$ и Γ_A — семейство всех кривых, соединяющих $\mathscr{C}_0$ и $\mathscr{C}_1$ в A. Модуль конформности кольца A тогда будет равен

$$\operatorname{mod} A = \operatorname{mod} R(\mathscr{C}_0, \mathscr{C}_1) = \left(\frac{\omega_{n-1}}{M(\Gamma_A)}\right)^{\frac{1}{n-1}}, \tag{5.1}$$

где ω_{n-1} — поверхность единичной сферы в $\dot{\mathbb{R}}^n$.

Согласно Ю. Вяйсяля [9] гомеоморфизм $f : D \to D'$, где D и D' — области в $\dot{\mathbb{R}}^n$, называют K-QC-*отображением* $(1 \leq \infty)$ в D, если

$$\frac{1}{K} M(\Gamma) \leq M(\Gamma') \leq K M(\Gamma)$$

для каждого семейства путей Γ в D. Однако позже было показано, что квазиконформность может быть охарактеризована требованием, чтобы (5.1) было выполнено для некоторых классов семейств путей, в частности, для семейства путей, соединяющих граничные компоненты колец в D. В теореме 5.2 ниже мы охарактеризуем квазиконформность в терминах коэффициента метрической плотности множеств в D.

Следующая лемма будет полезна в доказательстве теоремы 5.2.

Лемма 5.1. *Пусть $D \subset \dot{\mathbb{R}}^n$ — область и $\{A_m\}$ — последовательность непересекающихся невырожденных колец с $\overline{A}_m \subset D$. Тогда $\sup\limits_m \operatorname{mod} A_m = \infty$ в том и только в том случае, когда $\mu_d(D_0) = \infty$, где $D_0 = D \setminus \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} A_m$.*

Доказательство. Допустим, что $\sup\limits_m \operatorname{mod} A_m = \infty$ и $A_m = R(C_0^m, C_1^m)$. Вначале заметим, что так как A_m невырожденные, то множество D_0 не содержит изолированных точек.

Затем мы покажем, что для каждого $\mu > 1$ существуют точки $a, b \in D_0$, которые не могут быть соединены в D_0 какой-либо μ-цепью. Действительно, возьмем m такое, что

$$\operatorname{mod} A_m > \ln \lambda_n(\mu + 1),$$

где λ_n — положительная постоянная, зависящая только от n (см. [12, с. 225]. Пусть теперь $a \in D_0 \cap C_0^m$ и $b \in D_0 \cap C_1^m$ — произвольные точки, и пусть $\{x_i\}$ — какая-либо μ_1-цепь, соединяющая a и b в $\dot{\mathbb{R}}^n \setminus A_m$. Тогда существует $i \in \mathbb{Z}$ такое, что $x_i \in C_0^m$ и $x_{i+1} \in C_1^m$. Используя [12, следствие 1], имеем

$$\ln \lambda_n(\mu + 1) < \operatorname{mod} A_m < \operatorname{mod} R_T(|a, x_i, x_{i+1}, b|) \leq \ln \lambda_n(|a, x_i, x_{i+1}, b| + 1),$$

откуда

$$\mu < |a, x_i, x_{i+1}, b| \leq \mu_1.$$

Здесь $R_T(t)$ — кольцо Тейхмюллера, см. [12, с. 225]. Отсюда получаем, что $\{x_i\}$ не является μ-цепью. В частности, точки a и b не могут быть соединены в $\dot{\mathbb{R}}^n \setminus A_m$, а значит, в D_0 какой-либо μ-цепью. Таким образом, $\mu_d(D_0) = \infty$.

Обратно, пусть $\mu_d(D_0) = \infty$. Принимая во внимание мёбиусову инвариантность, можно считать, что $\infty \in A_1$. По следствию 3.5 имеем $\sup\limits_{G \in \mathscr{H}(D_0)} \Lambda(G) = \infty$. Покажем, что для каждого $G \in \mathscr{H}(D_0)$ существует k такое, что Γ_{A_k} ограничивается снизу Γ_G. Пусть G — произвольный элемент $\mathscr{H}(D_0)$. Тогда $G = \{x \in \mathbb{R}^n : |b - a| < |x - a| < |c - a|\}$ для некоторых $a, b, c \in \overline{D}_0$ и $G \cap D_0 = \varnothing$, откуда

$$G \subset \left(\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m \right) \cup (\dot{\mathbb{R}}^n \setminus D).$$

Но так как

$$\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m \right) \cap (\dot{\mathbb{R}}^n \setminus D) = \varnothing$$

и G связно, то $G \subset \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} A_m$. В силу наших предположений A_m не пересекаются, так что $G \subset A_k$ для некоторого k. Наконец, поскольку $a \in \overline{D}_0$, то Γ_{A_k} ограничено снизу Γ_G. Тогда ввиду [9, теорема 6.4] имеем $M(\Gamma_{A_k}) < M(\Gamma_G)$ и, следовательно, $\operatorname{mod} A_k > \operatorname{mod} G$. Таким образом,

$$\infty = \sup_{G \in \mathscr{H}(D_0)} \Lambda(G) \leq \sup_m \operatorname{mod} A_m,$$

что и завершает доказательство. □

Теорема 5.2. *Пусть $D, D' \subset \dot{\mathbb{R}}^n$ — области, и предположим, что $f : D \to D'$ — гомеоморфизм такой, что $\mu_d(\Sigma) < \infty$ в том и только в том случае, когда $\mu_d(f\Sigma) < \infty$ для каждого подмножества Σ в D. Тогда f является QC-отображением.*

Доказательство. Предположим, что f не является QC-отображением. Тогда по [13, лемма 1] существует последовательность $\{A_m\}$ попарно не пересекающихся колец A_m с $\overline{A}_m \subset D$ такая, что

$$\operatorname{mod} A_m < \frac{\kappa}{m^2} \text{ и } \operatorname{mod} A'_m > m^2 \text{ для всех } m = 1, 2, \ldots$$

где $A'_m = A'(x_m, r_m) = \{x' : \ l(x_m, r_m) \leq |x' - f(x)| \leq L(x_m, r_m)\}$ — сферическое кольцо, как в [13, теорема 1], $\kappa = \kappa(n) < \infty$ — константа из леммы Вяйсяля [14, теорема 3.10] и $A_m = f^{-1}(A'_m)$. В частности, A_m невырожденные согласно [9, теорема 11.10]. Пусть $D_0 = D \setminus \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m$. Тогда

$$f(D_0) = f(D) \setminus \bigcup_{m=1}^{\infty} f(A_m) = D' \setminus \bigcup_{m=1}^{\infty} A'_m.$$

Отсюда по лемме 5.1 $\mu_d(D_0) < \infty$, в то время как $\mu_d(fD_0) = \infty$; противоречие. Итак, f — QC-отображение.

Теорема 5.3. *Необходимым и достаточным условием того, что гомеоморфизм $f : \dot{\mathbb{R}}^n \to \dot{\mathbb{R}}^n$ является QC-отображением, служит выполнение соотношения $\mu_d(f\Sigma) < \infty$ ($\mu_d(f\Sigma) = \infty$) тогда и только тогда, когда $\mu_d(\Sigma) < \infty$ ($\mu_d(\Sigma) = \infty$) для каждого подмножества Σ в $\mathbb{R}^n$.*

Доказательство. Необходимость вытекает из того, что f является QM-отображением (см., например, [6, 5.3]) и что конечность метрической плотности множества сохраняется при QM-отображениях.

Достаточность следует из теоремы 5.2. $\square$

Замечание. 1. Необходимость в предыдущем утверждении вытекает также из [5, следствие 4.6].

2. Доказательство теоремы 5.2 было предложено В. В. Асеевым, см. также [15, теорема 9].

В заключение хотелось бы выразить благодарность В. В. Асееву за ознакомление с кругом этих проблем и полезные обсуждения. Его идеи послужили толчком к доказательству многих результатов этой работы. Я благодарен Juha Heinonen и Jeremy Tyson за содержательные обсуждения деталей этой работы. Я также глубоко признателен Fred Gehring за его многочисленные предложения по содержанию этой работы.

Наконец, я признателен рецензенту за многочисленные замечания и предложения, которые я постарался учесть.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Асеев В. В., Троценко Д. А.* Квазисимметрические вложения, четверки точек и искажение модулей // Сиб. мат. журн. 1987. Т. 28, № 4. С. 32–38.
2. *Väisälä J.* Quasi-symmetric embeddings in euclidean spaces // Trans. Amer. Math. Soc. 1981. V. 264. P. 191–204.
3. *Ибрагимов З.* Квазимёбиусовы вложения на μ-плотных множествах // Математический анализ и дифференциальные уравнения. Новосибирск: Новосиб. ун-т, 1991. С. 44–52.
4. *Tukia P., Väisälä J.* Quasisymmetric embeddings of metric spaces // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. AI Math. 1980. V. 5. P. 97–114.
5. *Järvi P., Vourinen M.* Uniformly perfect sets and quasiregular mappings // J. London Math. Soc (2). 1996. V. 54. P. 515–529.
6. *Väisälä J.* Quasimöbius maps // J. Anal. Math. 1984/85. V. 44. P. 218–234.
7. *Hutchinson J.* Fractals and Self Similarity // Indiana Math J. 1981. V. 30. P. 731–747.
8. *Trotsenko D., Väisälä J.* Upper sets and Quasisymmetric maps // Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 1999. V. 24. P. 465–488.
9. *Väisälä J.* Lectures on n-dimensional quasiconformal mappings. New York: Springer-Verl., 1971.
10. *Gehring F. W.* Symmetrization of rings in space // Trans. Amer. Math. Soc. 1961. V. 101. P. 499–519.
11. *Gehring F. W.* Rings and quasiconformal mappings in space // Trans. Amer. Math. Soc. 1962. V. 103. P. 353–393.

12. *Gehring F. W.* Quasiconformal mappings // Complex Analysis and its Applications. II. Vienna: Intern. Atomic Energy Agency, 1976. P. 213–268

13. *Caraman P.* Characterizaton of the quasiconformality by arc families of extremal length zero // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. AI. 1973. N 528. P. 1–10.

14. *Väisälä J.* On quasiconformal mappings in space // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. AI. 1961. N 298. P. 1–35.

15. *Асеев В. В.* Непрерывность конформной емкости для конденсаторов с равномерно совершенными пластинами // Сиб. мат. журн. 1999. Т. 40, № 2. С. 243–253.

Статья поступила 9 октября 2000 г.

Ибрагимов Заир Шавкатович (Ibragimov Zair)
Department of Mathematics, University of Michigan, Ann Arbor, MI 48109, USA
ibragim@umich.edu