Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2003. Том 44, № 1

УДК 517.54

ПОПРАВКА К СТАТЬЕ «ДЕФОРМАЦИЯ ПЛАСТИН МАЛЫХ КОНДЕНСАТОРОВ И ПРОБЛЕМА П. П. БЕЛИНСКОГО»

В. В. Асеев

Аннотация: Приводится исправленное доказательство леммы 4.1 из статьи автора, указанной в заголовке.

Ключевые слова: конденсатор, конформная емкость, конформный модуль

Доказательство леммы 4.1 в статье автора [1] содержит ошибку, в связи с чем и возникла необходимость в данной поправке. Вначале мы приведем два вспомогательных утверждения, необходимых для корректного доказательства упомянутой леммы.

Для конденсатора (E_0, E_1) в $\mathbb{R}^n$, каждая из пластин которого является объединением конечного числа невырожденных континуумов, мы используем теорему существования и единственности экстремальной функции $u_0(x)$ для конформной емкости $\mathrm{Cap}(E_0, E_1)$, доказанную Ф. Герингом в [2]. Его доказательство, проведенное для конденсатора в $\mathbb{R}^3$ со связными пластинами, сохраняет силу и для отмеченной выше ситуации.

Следующее утверждение не претендует на новизну и приведено лишь для полноты доказательства.

Утверждение 1. *Пусть для невырожденного конденсатора* (E_0, E_1) *в* $\mathbb{R}^n$ *существует экстремальная функция* $u_0(x)$ *для конформной емкости* $T = \mathrm{Cap}(E_0, E_1)$. *Пусть* $\alpha \in (0,1)$, $D_{0,\alpha} = \{x \in \mathbb{R}^n \backslash (E_0 \cup E_1) : u_0(x) < \alpha\}$ *и* $D_{1,\alpha} = \{x \in \mathbb{R}^n \backslash (E_0 \cup E_1) : u_0(x) > \alpha\}$. *Тогда*

$$\int\limits_{D_{0,\alpha}} |\nabla u_0(x)|^n \, dx = \alpha T, \qquad \int\limits_{D_{1,\alpha}} |\nabla u_0(x)|^n \, dx = (1-\alpha)T. \tag{1}$$

Доказательство. В силу единственности экстремальной функции для конденсатора (E_0, E_1) функция $v_0(x) = \begin{cases} \alpha^{-1} u_0(x) & \text{при } x \in D_{0,\alpha} \cup E_0, \\ 1 & \text{при } x \in \overline{D_{1,\alpha} \cup E_1} \end{cases}$ является экстремальной для $(E_0, \overline{D_{1,\alpha} \cup E_1})$ и, следовательно,

$$\mathrm{Cap}(E_0, \overline{D_{1,\alpha} \cup E_1}) = a_0 = \alpha^{-n} \int\limits_{D_{0,\alpha}} |\nabla u_0(x)|^n \, dx.$$

Аналогично функция $v_1(x) = \begin{cases} (1-\alpha)^{-1}(u_0(x) - \alpha) & \text{при } x \in D_{1,\alpha} \cup E_1, \\ 0 & \text{при } x \in \overline{D_{0,\alpha} \cup E_0} \end{cases}$ экстремальна для конденсатора $(\overline{D_{0,\alpha} \cup E_0}, E_1)$ и поэтому

$$\mathrm{Cap}(\overline{D_{0,\alpha} \cup E_0}, E_1) = a_1 = (1-\alpha)^{-n} \int\limits_{D_{1,\alpha}} |\nabla u_0(x)|^n \, dx.$$

В этих обозначениях справедливо равенство

$$T = \alpha^n a_0 + (1-\alpha)^n a_1, \tag{2}$$

а требуемые соотношения (1) запишутся в виде

$$\alpha^{n-1} a_0 = T = (1-\alpha)^{n-1} a_1. \tag{3}$$

Используя равенство конформной емкости конденсатора и модуля семейства кривых, соединяющих его пластины (см., например, [3]), и известное соотношение для модулей семейств кривых (см., например, [4, лемма 5.24, с. 56]), получаем неравенство $T^{-1/(n-1)} \geq a_0^{-1/(n-1)} + a_1^{-1/(n-1)}$. Положив $t = \alpha^n a_0/T$, в силу (2) приходим к неравенству

$$f(t) = \left(\frac{\alpha^n}{t}\right)^{1/(n-1)} + \left(\frac{(1-\alpha)^n}{1-t}\right)^{1/(n-1)} \leq 1. \tag{4}$$

Так как $f(t)$ имеет на $(0,1)$ единственную точку минимума $t = \alpha$ и $f(\alpha) = 1$, из неравенства (4) вытекает равенство $t = \alpha$, равносильное первому равенству в (3). Ввиду (2) второе равенство в (3) следует из первого. Утверждение доказано.

Утверждение 2. *Пусть F_0, F_1 — невырожденные континуумы в $\overline{B}(0,1)$ такие, что $d = \min\{\operatorname{diam} F_0, \operatorname{diam} F_1\} > 0$ и хаусдорфово расстояние δ между ними удовлетворяет оценке $\delta < d/3$. Тогда для любого компакта $K \subset G = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| > 2\} \cup \{\infty\}$, содержащего какой-нибудь невырожденный континуум, выполняется оценка*

$$|\operatorname{mod}(F_0, K) - \operatorname{mod}(F_1, K)| \leq \left(\frac{\omega_n}{c_n \operatorname{Ln}(\delta^{-1} d/2)}\right)^{1/(n-1)} = F(\delta/d), \tag{5}$$

где ω_n и c_n — положительные константы, зависящие лишь от n.

Доказательство. Задав произвольно малое $\varepsilon > 0$ и воспользовавшись непрерывностью конформной емкости последовательности убывающих конденсаторов (см., например, [5, теорема 3.3, с. 132]), можно построить покрытие компакта K конечным набором замкнутых шаров (в хордовой метрике на $\overline{\mathbb{R}^n}$), объединение которых T содержится в G и удовлетворяет неравенствам

$$|\operatorname{mod}(F_i, K) - \operatorname{mod}(F_i, T)| < \varepsilon/3, \quad i = 0, 1. \tag{6}$$

Не ограничивая общности, можно считать, что

$$\operatorname{mod}(F_0, T) > \operatorname{mod}(F_1, T); \quad \operatorname{Cap}(F_1, T) > \operatorname{Cap}(F_0, T). \tag{7}$$

По теореме Ф. Геринга [2] для конденсатора (F_0, T) существует экстремальная функция $u_0(x)$. Пусть $m_0 = \max\{u_0(x) : x \in F_1\} = u_0(x_0)$. Если $m_0 = 0$, то функция $u_0(x)$ является допустимой для $(F_0 \cup F_1, T)$, и поэтому

$$\operatorname{Cap}(F_1 \cup F_0, T) \leq \int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus (F_0 \cup T)} |\nabla u_0(x)|^n \, dx = \operatorname{Cap}(F_0, T),$$

что вместе с очевидным неравенством $\operatorname{Cap}(F_1, T) \leq \operatorname{Cap}(F_1 \cup F_0, T)$ приводит к противоречию с (7). Следовательно, $m_0 > 0$. Так как экстремальная функция u_0 монотонна снизу относительно T (см. [6, теорема 3.2, с. 41] или [7, теорема 2.5, с. 99]), найдется континуум $\gamma \subset \{|x| \leq 2\}$, соединяющий точку x_0 со сферой ∂G, такой, что $u_0(x) \geq m_0$ для всех $x \in \gamma$. Поскольку δ — хаусдорфово расстояние между F_0 и F_1, найдется точка $x_1 \in F_0$ такая, что $|x_0 - x_1| \leq \delta$. Континуум F_0 соединяет сферу $\{|x - x_1| = \delta\}$ со сферой $\{|x - x_1| = d/2\}$. Так как $d/2 - \delta > 0$, то F_0, равно как и γ, соединяет граничные сферы шарового слоя $\Omega = \{\delta < |x - x_1| < d/2\}$. Применяя известную лемму Вяйсяля (см., например, [4, лемма 5.32, с. 60]), получаем оценку

$$\operatorname{Cap}(F_0, \gamma; \Omega\ ) \geq c_n \operatorname{Ln}(\delta^{-1} d/2). \tag{8}$$

Положим $D_0 = \{x : u_0(x) < m_0\}$. Так как функция $v(x) = \{m_0^{-1} u_0(x)$ при $x \in \Omega \cap D_0; 1$ при $x \in \Omega \backslash D_0\}$ допустима для конденсатора $(F_0, \gamma; \Omega)$, из (8) следует оценка

$$\int\limits_{D_0} |\nabla u_0(x)|^n \, dx \geq m_0^n \int\limits_{\Omega \cap D_0} |\nabla v(x)|^n \, dx \geq m_0^n c_n \operatorname{Ln}(\delta^{-1} d/2).$$

Однако в силу утверждения 1

$$\int\limits_{D_0} |\nabla u_0(x)|^n \, dx = m_0 \operatorname{Cap}(F_0, T).$$

Из этой оценки вытекает соотношение

$$m_0^{(n-1)/n} \leq \left(\frac{\operatorname{Cap}(F_0, T)}{c_n \operatorname{Ln}(\delta^{-1} d/2)} \right)^{1/n},$$

которое после перехода к конформному модулю дает неравенство

$$m_0 \operatorname{mod}(F_0, T) \leq \left(\frac{\omega_n}{c_n \operatorname{Ln}(\delta^{-1} d/2)} \right)^{1/(n-1)} = F(\delta/d). \tag{9}$$

Множество $\overline{D_0} = \{x : u_0(x) \leq m_0\}$ является континуумом (из-за монотонности экстремальной функции u_0) и содержит в себе континуум F_1. Поэтому $\operatorname{mod}(F_1, T) \geq \operatorname{mod}(\overline{D_0}, T)$ и, применив утверждение 1 к

$$\operatorname{Cap}(\overline{D_0}, T) = (1 - m_0)^{-n} \int\limits_{\{m_0 < u_0(x) < 1\}} |\nabla u_0(x)|^n \, dx,$$

получим равенства

$$\operatorname{Cap}(\overline{D_0}, T) = (1 - m_0)^{-n+1} \operatorname{Cap}(F_0, T); \operatorname{mod}(\overline{D_0}, T) = (1 - m_0) \operatorname{mod}(F_0, T).$$

Следовательно, $\operatorname{mod}(F_1, T) \geq (1 - m_0) \operatorname{mod}(F_0, T)$, и с учетом (9) и (7) получаем оценку $|\operatorname{mod}(F_0, T) - \operatorname{mod}(F_1, T)| \leq m_0 \operatorname{mod}(F_0, T) \leq F(\delta/d)$. Учитывая (6), приходим к соотношению $|\operatorname{mod}(F_0, K) - \operatorname{mod}(F_1, K)| \leq 2\varepsilon/3 + F(\delta/d)$, из которого в силу произвольности $\varepsilon > 0$ и следует требуемая оценка (5). Утверждение доказано.

Теперь мы возвращаемся к [1] и приводим исправленный текст доказательства леммы.

Лемма 4.1. *Пусть $e \in \mathbb{R}^n$, $e \neq 0$, Γ — невырожденный континуум, $e \in \Gamma$, и пусть последовательность $\delta_j \to +0$ такова, что для растяжений $\mu_j(x) =$*

$e+(\delta_j|e|)^{-1}(x-e)$ *соответствующая последовательность континуумов* $\mu_j(\Gamma)$ *сходится по метрике Хаусдорфа к лучу* L, *выходящему из точки* e. *Для* $s>0$ *обозначим*

$$L(s)=L\cap\overline{B}(e,s|e|),\quad \Gamma(s)=(\Gamma\cap\overline{B}(e,s|e|))_e^{\mathrm{cont}}.$$

(*Через* A_a^{cont} *в статье* [1] *обозначается компонента связности множества* A, *содержащая точку* $a\in A$). *Тогда*

$$\sup_E|\operatorname{mod}(E,\Gamma(\delta_j))-\operatorname{mod}(E,L(\delta_j))|\to 0\quad \text{при } j\to\infty,$$

где супремум берется по всем компактам $E\subset\overline{B}(0,|e|/2)$, *содержащим невырожденные континуумы.*

Доказательство. Для $j=1,2,\dots$ рассмотрим преобразование $\nu_j(x)=\mu_j(x)-e$. Тогда $F_0=\nu_j(L(\delta_j))$ — радиальный отрезок в $\overline{B}(0,1)$, а континуум $F_1^j=\nu_j(\Gamma(\delta_j))\subset\overline{B}(0,1)$ соединяет точку 0 с единичной сферой. Поэтому $d=\min\{\operatorname{diam}F_0,\operatorname{diam}F_1^j\}\geq 1$. Ввиду сходимости $F_1^j\to F_0$ в метрике Хаусдорфа при $j\to\infty$, при всех достаточно больших j хаусдорфово расстояние $\delta^{(j)}$ между континуумами F_0 и F_1^j удовлетворяет оценке $\delta^{(j)}<1/4<d/3$. Компактное множество $E_j=\nu_j(E)$ лежит в шаре $\nu_j(\overline{B}(0,|e|/2))=\overline{B}(-(\delta_j|e|)^{-1}e,1/2\delta_j)$ и, следовательно, $E_j\subset\{x:|x|>2\}$. Таким образом, к конденсаторам (F_0,E_j) и (F_1^j,E_j) применимо утверждение 2, в силу которого

$$|\operatorname{mod}(L(\delta_j),E)-\operatorname{mod}(\Gamma(\delta_j),E)|=\left|\operatorname{mod}(F_0,E_j)-\operatorname{mod}(F_1^j,E_j)\right|\leq F(\delta^{(j)}).$$

Так как $F(\delta^{(j)})$ сходится к 0 при $i\to\infty$ и не зависит от выбора невырожденного компакта $E\subset\overline{B}(0,|e|/2)$, приходим к требуемой сходимости. Лемма доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Асеев В. В.* Деформация пластин малых конденсаторов и проблема П. П. Белинского // Сиб. мат. журн. 2001. Т. 42, № 6. С. 1215–1230.
2. *Gehring F. W.* Rings and quasiconformal mappings in space // Trans. Amer. Math. Soc. 1962. V. 103, N 3. P. 353–393.
3. *Шлык В. А.* О равенстве p-емкости и p-модуля // Сиб. мат. журн. 1993. Т. 34, № 6. С. 216–221.
4. *Vuorinen M.* Conformal geometry and quasiregular mappings. Berlin; Heidelberg; New York; London; Paris; Tokyo: Springer-Verl., 1988. (Lecture Notes in Math.; 1319).
5. *Hesse J.* A p-extremal length and p-capacity equality // Ark. Mat. 1975. V. 13, N 1. P. 131–144.
6. *Асеев В. В., Сычев А. В.* О множествах, устранимых для пространственных квазиконформных отображений // Сиб. мат. журн. 1974. Т. 15, № 6. С. 1213–1227.
7. *Yang Sh.* Monotone functions and extremal functions for condensers in $\mathbb{R}^n$ // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1 Math. 1991. V. 16. P. 95–112.

Статья поступила 15 апреля 2002 г.

Асеев Владислав Васильевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Коптюга, 4, Новосибирск 630090
ase@math.nsc.ru