Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2003. Том 44, № 3

УДК 512.545

ПОДМНОГООБРАЗИЯ $\mathscr{L}_{pq}$ ИМЕЮТ КОНЕЧНЫЙ БАЗИС ТОЖДЕСТВ

Н. Н. Нарицын

Аннотация: Рассматриваются многообразия решеточно упорядоченных групп с тождеством перестановки n-х степеней элементов. Установлено, что любое такое ℓ-многообразие при $n = pq$, где p, q — разные простые числа, имеет конечный базис тождеств.

Ключевые слова: многообразие, решеточно упорядоченная группа, тождество, конечный базис

В теории многообразий любых алгебраических систем одним из основных является вопрос о существовании конечного базиса тождеств. Далее рассматривается ℓ-многообразие $\mathscr{L}_n$, на котором выполнено тождество $[x^n, y^n] = e$.

Впервые такие многообразия были определены в [1], где также было установлено соотношение $\mathscr{L}_n \cap \mathscr{R} = \mathscr{A}$. В частности, любая линейно упорядоченная подгруппа ℓ-группы из $\mathscr{L}_n$ является абелевой. В [2] построена счетная серия $\{\mathscr{S}_p\}$ многообразий $\mathscr{S}_p$, накрывающих многообразия всех абелевых ℓ-групп $\mathscr{A}$ и таких, что $\mathscr{S}_p \subseteq \mathscr{L}_p$, где p простое. В [3] для каждого непростого p и в [4] для простого p установлено, что $\mathscr{S}_p \neq \mathscr{L}_p$. В [5] для простого p положительно решен вопрос о существовании конечного базиса тождеств ℓ-подмногообразий в $\mathscr{L}_p$. У. Холланд и Н. Рейли [6] независимо доказали конечную базируемость многообразий $\mathscr{S}_p$. Независимо от С. А. Гурченкова [5] У. Холланд, А. Меклер и Н. Рейли [7] показали конечную базируемость подмногообразий в $\mathscr{L}_p \cap \mathscr{A}^2$. Позднее У. Холланд и Н. Рейли [8] доказали конечную базируемость подмногообразий из $\mathscr{L}_n \cap \mathscr{A}^2$ с конечным базисным рангом, а С. А. Гурченков [9] — конечную базируемость любого подмногообразия в $\mathscr{L}_n \cap \mathscr{A}^2$. Н. Рейли [10] и независимо С. А. Гурченков [11] установили, что для любого многообразия $\mathscr{M}$, в котором линейно упорядоченные группы абелевы, справедливы включения $\mathscr{M} \subseteq \mathscr{L}_n$ для некоторого $n = n(\mathscr{M})$ и $\mathscr{L}_n \subseteq \mathscr{A}^k$ для некоторого $k = k(n)$. В работе [12] С. А. Гурченков показал конечную базируемость подмногообразий из $\mathscr{L}_n$, порожденных конечно порожденной ℓ-группой, а также конечную базируемость ℓ-многообразий $\mathscr{M} \subset \mathscr{L}_n$ с конечным аксиоматическим рангом $r_a(\mathscr{M})$. Все обозначения, не приводимые ниже, даны в [12–14].

В настоящей работе рассматривается ℓ-многообразие $\mathscr{L}_{pq}$, где p, q — разные простые числа. Установлено, что любое ℓ-многообразие из $\mathscr{L}_{pq}$ имеет конечный базис тождеств.

В работе [12] показано, что любое ℓ-подмногообразие $\mathscr{L}_n$ порождается множеством своих конечно порожденных конечно подпрямо неразложимых ℓ-групп G, обладающих нижеследующим строением. Решеточно упорядоченная группа G имеет конечный ортогональный ранг $r_o(G)$, и для нее определено число $k = k(G)$:

$k(G) = 1 + k(G_1)$, если G — лексикорасширение ℓ-группы G_1 с помощью линейно упорядоченной группы G/G_1, $G_1 \neq G, E$ и $G_1 = G_2 \times_\ell G_3$ для некоторых $G_2, G_3 \neq E$;

$k(G) = \max\{k(G_1), k(G_2)\}$, если $G = G_1 \times_\ell G_2$ и $G_1, G_2 \neq E$;

$k(G) = 0$, если G линейно упорядочена.

Также ℓ-группа G содержит ряд выпуклых ℓ-подгрупп

$$E = G_{(0)} < G_{(1)} < \dots < G_{(k)} < G_{(k+1)} = G,$$

где $k = k(G)$ и

1) для любого $g \in G$ либо $G^g_{(i)} = G_{(i)}$, либо $G^g_{(i)} \cap G_{(i)} = E$, $i = 1, 2, \dots, k$;
2) для любого $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ существует $u \in G$ такой, что $G^u_{(i)} \cap G_{(i)} = E$;
3) ℓ-подгруппа $G_{(i+1)}$ является лексикорасширением ℓ-подгруппы $G_{(i+1)} \cap G^{\langle G\rangle}_{(i)}$ с помощью линейно упорядоченной группы $G_{(i+1)}/G_{(i+1)} \cap G^{\langle G\rangle}_{(i)}$, $i \in \{0, 1, 2, \dots, k\}$;
4) ℓ-подгруппа $G_{(i+1)}/G_{(i+1)} \cap G^{\langle G\rangle}_{(i)}$ — максимальная выпуклая линейно упорядоченная подгруппа ℓ-группы $\overline{G}_i = G/G^{\langle G\rangle}_{(i)}$, $i \in \{0, 1, \dots, k\}$,

а также систему подгрупп G^*_i, $i = 0, 1, \dots, k+1$, таких, что

1) $G_{(i)} = (G^*_i)_\ell$, $i = 1, 2, \dots, k+1$;
2) $G_{(i)} = G^*_i \overrightarrow{\succ} (G_{(i)} \cap G^{\langle G\rangle}_{(i-1)})$, $i = 1, 2, \dots, k+1$;
3) G^*_i — конечно-порожденная линейно упорядоченная подгруппа в G;
4) $N_{G^{**}_i}(G_{(j)}) \subseteq C_{G^{**}_i}(G^*_i)$ при $j < i$, $i, j \in \{0, 1, 2, \dots, k+1\}$, где

$$G^{**}_i = \mathrm{gr}\big(G^*_{k+1}, G^*_k, \dots, G^*_i\big).$$

В конечно порожденной абелевой группе без кручения G^*_i можно выбрать некоторую базу $g_{i,1} > e$, $g_{i,2} > e, \dots, g_{i,s_i} > e$, причем линейный порядок в G^*_i определен соотношениями $e < g_{i,1} \ll g_{i,2} \ll \dots \ll g_{i,s_i}, i = k+1, k, \dots, 2$. Элементы базы $g_{i,1}, \dots, g_{i,s_i}$ подгруппы G^*_i не лежат в $C_G(G_{(i-1)})$, $i = k+1, k, \dots, 2$, $\mathscr{A}(G) = G^{\langle G\rangle}_{(1)}$, а выпуклая ℓ-подгруппа G^*_1 является бесконечной циклической с порождающим $\{a\}$.

Перейдем к новому представлению конечно порожденных конечно подпрямо неразложимых ℓ-групп из $\mathscr{L}_{pq}$. Для этого перенумеруем все порождающие ее элементы следующим образом: $a \sim g_1$, $g_{i,j} \sim g_{s_2+s_3+\dots+s_{i-1}+j+1}$, $g_{k+1,s_{k+1}} \sim g_t$, где $t = 1 + s_2 + s_3 + \dots + s_{k+1}$. Затем для каждого элемента g_i, $i \in \{2, 3, \dots, t\}$, определим набор $\bar{\rho}_{i,r} = (\rho_{i,i-1}, \rho_{i,i-2}, \dots, \rho_{i,r})$ для некоторых $\rho_{i,j} \in \{p, q, pq, 1\}$, $j \in \{i-1, i-2, \dots, r\}$, таких, что $[g_i^{\rho_{i,j}}, g_j] = e$ и $[g_i^s, g_j] \neq e$ для каждого s, $0 < s < \rho_{i,j}$. Любой такой набор будем называть *ρ-вектором.*

Далее считаем, что ℓ-группа G есть $\mathrm{gr}(g_1, g_2, \dots, g_t)$.

Из работы [12] имеем следующие свойства:

1) ℓ-группа G содержит систему выпуклых ℓ-подгрупп

$$E = G_{(0)} \subset G_{(1)} \subset G_{(2)} \subset \dots \subset G_{(t)} = G;$$

2) $e < g_1 \ll g_2 \ll g_3 \ll \dots \ll g_t$;
3) $g_i \notin C_G(G_{(i-1)})$, $i = 2, 3, \dots, t$;
4) $G_{(i)} = (g_i)_\ell$, $i = 1, 2, \dots, t$;
5) $G_{(i)} = (g_i) \overrightarrow{\succ} (G_{(i)} \cap G^{\langle G\rangle}_{(i-1)})$, $i = 1, 2, \dots, t$;
6) для любого $g \in G$ либо $G^g_{(i)} = G_{(i)}$, либо $G^g_{(i)} \cap G_{(i)} = E$;

7) $N_{G_i^{**}}(G_{(j)}) = C_{G_i^{**}}(g_j)$ при $j < i$, $i, j \in \{0, 1, 2, \dots, t\}$, где

$$G_i^{**} = \mathrm{gr}(g_t, g_{t-1}, \dots, g_i).$$

Отдельно выделим свойства ρ-векторов $\bar{\rho}_{i,1}$, где $i \in \{2, 3, \dots, t\}$, которые проверяются непосредственно:

1) $\rho_{i,j-1} = \rho_{i,j} m$ для некоторого $m \in \{p, q, pq, 1\}$, где $j \in \{2, 3, \dots, i\}$, считаем $\rho_{i,i} = 1$;

2) $\rho_{i,1} \neq 1$, $i \in \{2, 3, \dots, t\}$.

Лемма 1. *Пусть G — конечно порожденная конечно подпрямо неразложимая ℓ-группа ℓ-многообразия $\mathscr{L}_{pq}$, обладающая вышеприведенными строением и свойствами. Тогда для любых элементов g_i и g_j $(i > j)$, $i, j \in \{2, 3, \dots, t\}$, верно* НОД$(\rho_{i,j}, \rho_{j,1}) = 1$.

Доказательство. Пусть $G = \mathrm{gr}(a, g_2, \dots, g_t)$. Так как $G \in \mathscr{L}_{pq}$, для каждого $x \in G$ верно $x^{pq} \in C_G(\mathscr{A}(G))$ [12], следовательно, $a^{(g_i g_j)^{pq}} = a$. Разобьем произведение $(g_i g_j)^{pq}$ на $pq/\rho_{i,j}$ частей, что возможно, ибо $\rho_{i,j}$ делит pq:

$$a^{(g_i g_j)^{pq}} = a^{((g_i g_j)^{\rho_{i,j}})^{pq/\rho_{i,j}}}.$$

Поскольку $(g_i g_j)^{\rho_{i,j}} = (g_i^{\rho_{i,j}} g_j^{g_i^{\rho_{i,j}-1}} \dots g_j^{g_i} g_j)$, то

$$a^{(g_i g_j)^{pq}} = a^{(g_i^{\rho_{i,j}} g_j^{g_i^{\rho_{i,j}-1}} \dots g_j^{g_i} g_j)^{pq/\rho_{i,j}}}.$$

По определению ρ-вектора справедливо $\big[g_i^{\rho_{i,j}}, g_j^{g_i^s}\big] = e$, $s \in N$, значит,

$$a^{(g_i^{\rho_{i,j}} g_j^{g_i^{\rho_{i,j}-1}} \dots g_j^{g_i} g_j)^{pq/\rho_{i,j}}} = a^{g_i^{pq} (g_j^{g_i^{\rho_{i,j}-1}} \dots g_j^{g_i} g_j)^{pq/\rho_{i,j}}} = a^{(g_j^{g_i^{\rho_{i,j}-1}} \dots g_j^{g_i} g_j)^{pq/\rho_{i,j}}}.$$

Согласно свойствам ℓ-группы G имеем

$$\big[g_j^{g_i^{s_1}}, g_j^{g_i^{s_2}}\big] = e,\ s_1, s_2 \in N; \quad a \wedge g_j^{g_i^s} = e \text{ при } s \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\, \rho_{i,j}).$$

Отсюда следует, что

$$a^{(g_i g_j)^{pq}} = a^{(g_j^{g_i^{\rho_{i,j}-1}} \dots g_j^{g_i} g_j)^{pq/\rho_{i,j}}} = a^{g_j{}^{pq/\rho_{i,j}}} = a.$$

Теперь утверждение леммы очевидно. Лемма доказана.

Следствие 1. *Пусть G — конечно порожденная конечно подпрямо неразложимая ℓ-группа из $\mathscr{L}_{pq} \backslash A^2$, тогда $\rho_{2,1} \neq pq$.*

Доказательство. Допустим, что $\rho_{2,1} = pq$. Так как $g_2 \in A^2(G)$, в силу 3-й ступени разрешимости ℓ-группы G в ней существует хотя бы один элемент (из множества порождающих), не централизующий g_2. Исходя из леммы 1 получаем противоречие с предположением. Следствие доказано.

Лемма 2. *Пусть ℓ-группа G принадлежит $\mathscr{L}_{pq} \backslash \mathscr{A}$, $G = \mathrm{gr}(g_1, g_2, \dots, g_i, \dots, g_t)$, а $\widetilde{G} = \mathrm{gr}(g_1, g_2, \dots, g_i^m, \dots, g_t)$, причем $(m, \rho_{i,1}) = 1$. Тогда*

$$\mathrm{var}_\ell(G) = \mathrm{var}_\ell(\widetilde{G}).$$

Доказательство леммы вытекает из свойства ρ-вектора $\bar{\rho}_{i,1}$ и из следующего известного факта: пусть $\mathscr{Z}_n = \mathrm{gr}(g \mid g^n = e)$, B — подгруппа, порожденная неединичным элементом $\{g^m\}$. Тогда $\mathscr{Z}_n \simeq B$, если и только если $(m,n)=1$. Лемма доказана.

Обозначим через $\mathscr{M}$ множество всех конечно порожденных конечно подпрямо неразложимых ℓ-групп ℓ-многообразия $\mathscr{L}_{pq}$, имеющих описанные выше строение и свойства.

Обозначим $w_{j,k} = g_{s_1}^{m_{s_1}} g_{s_2}^{m_{s_2}} \dots g_{s_k}^{m_{s_k}}$, $s_i \in \{j+1, j+2, \dots, t\}$, $i \in \{1,2,\dots,k\}$, $m_{s_i} \in N$, $j \in \{1,2,\dots,t-1\}$.

Всюду далее рассматриваем только те слова $w_{j,k}$, для которых выполнено $g_j^{w_{j,k}} \in G_{(j+1)}$, $j \in \{1,2,\dots,t-1\}$.

Определение. Назовем слово $w_{j,k}$ *несократимым,* когда выполнены следующие два условия:

1) $s_i \neq s_{i+1}$ и $s_i \neq s_{i-1}$ $\forall i \in \{2,3,\dots,k-1\}$;
2) $|m_{s_i}| < \rho_{s_i,j}$ $\forall i \in \{1,2,\dots,k\}$.

Определение. Для некоторого $j \in \{1,2,\dots,t-1\}$ слово $w_{j,k}$ со свойством $g_j^{w_{j,k}} \in G_{(j+1)}$ называется *правильным* в ℓ-подгруппе $G_{(j+1)}$, если $s_1 < s_2 < \dots < s_k$ и оно несократимое.

Определение. Назовем g_{s_i} *элементом* слова $w_{j,k}$, а $g_{s_i}^{m_{s_i}}$ — *компонентой* слова $w_{j,k}$.

Лемма 3. *Пусть $G \in \mathscr{M}$, $G = (a, g_2, \dots, g_t)$. Тогда для любого слова $w_{j,k}$ в ℓ-группе G найдется правильное в $G_{(j+1)}$ слово $\widetilde{w}_{j,\tilde{k}}$ такое, что $g_j^{w_{j,k}} = g_j^{\widetilde{w}_{j,\tilde{k}}}$.*

Доказательство. Пусть слово $w_{j,k}$ неправильное в ℓ-группе $G_{(j+1)}$. Существует максимальное число $i \in \{1,2,\dots,k\}$ такое, что в слове $g_{s_1}^{m_{s_1}} g_{s_2}^{m_{s_2}} \dots g_{s_i}^{m_{s_i}}$ выполнено $s_1 < s_2 < \dots < s_i$.

Теперь если $\left[g_{s_i}^{m_{s_i}}, g_{s_{i+1}}^{m_{s_{i+1}}}\right] \neq e$, то, так как $s_{i+1} < s_i$ и $g_j^{g_{s_1}^{m_{s_1}} g_{s_2}^{m_{s_2}} \dots g_{s_i}^{m_{s_i}}} \wedge g_{s_{i+1}} = e$, имеем

$$g_j^{g_{s_1}^{m_{s_1}} \dots g_{s_i}^{m_{s_i}} g_{s_{i+1}}^{m_{s_{i+1}}} \dots g_{s_k}^{m_{s_k}}} = g_j^{g_{s_1}^{m_{s_1}} \dots g_{s_i}^{m_{s_i}} g_{s_{i+2}}^{m_{s_{i+2}}} \dots g_{s_k}^{m_{s_k}}}.$$

Если же $\left[g_{s_i}^{m_{s_i}}, g_{s_{i+1}}^{m_{s_{i+1}}}\right] = e$, то в этом случае

$$g_j^{g_{s_1}^{m_{s_1}} \dots g_{s_i}^{m_{s_i}} g_{s_{i+1}}^{m_{s_{i+1}}} \dots g_{s_k}^{m_{s_k}}} = g_j^{g_{s_1}^{m_{s_1}} \dots g_{s_{i+1}}^{m_{s_{i+1}}} g_{s_i}^{m_{s_i}} \dots g_{s_k}^{m_{s_k}}}.$$

Далее повторяем вышеприведенные рассуждения нужное количество раз. В итоге получим слово $\overline{w}_{j,\bar{k}} = g_{\bar{s}_1}^{m_{\bar{s}_1}} \dots g_{\bar{s}_{\bar{k}}}^{m_{\bar{s}_{\bar{k}}}}$, в котором $\bar{s}_1 < \bar{s}_2 < \dots < \bar{s}_{\bar{k}}$. Очевидно, такое слово можно привести к несократимому слову $\widetilde{w}_{j,\tilde{k}} = g_{\tilde{s}_1}^{m_{\tilde{s}_1}} \dots g_{\tilde{s}_{\tilde{k}}}^{m_{\tilde{s}_{\tilde{k}}}}$. Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть $G \in \mathscr{M}$, $G = \mathrm{gr}(a, g_2, \dots, g_{s_1}, \dots, g_{s_k}, \dots, g_t)$, и пусть $w_{j,k} = g_{s_1}^{m_{s_1}} g_{s_2}^{m_{s_2}} \dots g_{s_k}^{m_{s_k}}$ — правильное в $G_{(j+1)}$ слово, все компоненты которого перестановочны. Тогда существует правильное слово $\widetilde{w}_{j,k}$ такое, что $g_j^{w_{j,k}} = g_j^{\widetilde{w}_{j,k}}$, имеющее следующее строение:*

1) $\widetilde{w}_{j,k} = \tilde{g}_{s_1}^{\widetilde{m}_{s_1}} \tilde{g}_{s_2}^{\widetilde{m}_{s_2}} \dots \tilde{g}_{s_k}^{\widetilde{m}_{s_k}}$;
2) $\widetilde{m}_{s_i} = a_{s_i}^{n_{s_i}}$, $a_{s_i} \in \{p, q, 1\}$, *для каждого $i \in \{1,2,\dots,k\}$ и некоторого $n_{s_i} \in N$,*

причем $\mathrm{var}_\ell(G) = \mathrm{var}_\ell(\widetilde{G})$, *где* $\widetilde{G} = \mathrm{gr}(a, g_2, \dots, \tilde{g}_{s_1}, \dots, \tilde{g}_{s_k}, \dots, g_t)$.

Доказательство достаточно провести для g_{s_1}. Рассмотрим следующие два случая.

(а) $(m_{s_1}, \rho_{s_1,1}) = 1$; обозначим $\tilde{g}_{s_1} = g_{s_1}^{m_{s_1}}$, в этом случае $\widetilde{m}_{s_1} = 1$.

(б) $(m_{s_1}, \rho_{s_1,1}) = m \neq 1$. Так как слово $w_{j,k}$ правильное, считаем $0 < m_{s_1} < \rho_{s_1,j}$ и поэтому $m_{s_1} = m^n s$, где $m \in \{p, q\}$, $n, s \in \mathbb{N}$. Пусть n максимально возможное, т. е. $(s, m) = 1$. В этом случае если $(s, \rho_{s_1,1}) = 1$, то обозначим $\tilde{g}_{s_1} = g_{s_1}^s$. Тогда $g_j^{g_{s_1}^{m_{s_1}}} = g_j^{\tilde{g}_{s_1}^{m^n}}$. Если же $(s, \rho_{s_1,1}) = \delta \neq 1$, то в этом случае число $m_{s_1} = m^n s$ кратно pq в силу того, что $(s, m) = 1$, а это противоречит несократимости слова $w_{j,k}$.

Равенство $\mathrm{var}_\ell(G) = \mathrm{var}_\ell(\widetilde{G})$ следует из леммы 2. Лемма доказана.

Считаем $\bar{\rho}_{i,r} = \bar{1}$, если $\rho_{i,j} = 1$ $\forall j \in \{i-1, i-2, \dots, r\}$.

Определение. ρ-Вектор $\bar{\rho}_{i,r}$ называется *регулярным*, если для любого $j \in \{i-1, i-2, \dots, r\}$ выполнено $g_j^{g_i^s} \neq g_j^{w_{j,k}}$ $\forall w_{j,k} = g_{s_1}^{m_{s_1}} g_{s_2}^{m_{s_2}} \dots g_{s_k}^{m_{s_k}}$, где $\rho_{i,j+1} \leq s < \rho_{i,j}$, $\rho_{i,i} = 1$ и $s_x \neq i$, $x = 1, 2, \dots, k$.

Из леммы 2, строения ρ-векторов и определения регулярности следует

Лемма 2′. *Пусть* $G \in \mathscr{M} \backslash \mathscr{A}$, $G = \mathrm{gr}(g_1, g_2, \dots, g_i, \dots, g_t)$, а $\widetilde{G} = \mathrm{gr}(g_1, g_2, \dots, g_i^m, \dots, g_t)$, *причем* $(m, \rho_{i,1}) = 1$. *Тогда*

1) $\mathrm{var}_\ell(G) = \mathrm{var}_\ell(\widetilde{G})$;

2) *у всех элементов* $g_j \in \widetilde{G}$, $j \neq i$, *сохраняется регулярность* (*нерегулярность*) *ρ-векторов.*

Обозначим через R_α подмножество $\{g_\alpha, g_{\alpha+1}, \dots, g_t\}$ множества порождающих ℓ-группы G такое, что $[g_i, g_j] = e$ для всех $i, j \in \{\alpha, \alpha+1, \dots, t\}$, причем α минимальное из возможных.

Лемма 5. *Пусть ℓ-группа* $G \in \mathscr{M} \backslash \mathscr{A}^2$ *t-порожденная. Тогда существует ℓ-группа* $\widetilde{G} \in \mathscr{M}$, $\widetilde{G} = \mathrm{gr}(a, g_2, \dots, \tilde{g}_\alpha, \tilde{g}_{\alpha+1}, \dots, \tilde{g}_t)$, *такая, что для любого ее элемента* $\tilde{g}_i$, $i \in \{3, 4, \dots, t\}$, *ρ-вектор* $\bar{\rho}_{i,2}$ *либо регулярный, либо равен* $\bar{1}$ *и* $\mathrm{var}_\ell(G) = \mathrm{var}_\ell(\widetilde{G})$.

Доказательство. Пусть $\{a, g_2, \dots, g_\alpha, g_{\alpha+1}, \dots, g_t\}$ — множество порождающих ℓ-группы G. Если для некоторого $i \in \{3, 4, \dots, t\}$ ρ-вектор $\bar{\rho}_{i,2}$ не равен $\bar{1}$, то $g_i \in R_\alpha$.

Доказательство ведем индукцией по числу $\alpha - 2$. Докажем лемму при $\alpha - 2 = 1$. Пусть $\bar{\rho}_{i,2}$ — нерегулярный ρ-вектор, причем элемент g_i, которому он соответствует, максимальный.

Итак, $g_2^{g_i^s} = g_2^{w_{2,k}}$, где $1 \leq s < \rho_{i,2}$.

Так как все элементы слова $w_{2,k}$ и элемент g_i лежат в R_α и, следовательно, перестановочны, без ограничения общности считаем, что $i > s_k > s_{k-1} > \dots > s_1$ и степени элементов слова $w_{2,k}$ и степень s удовлетворяют лемме 4.

Рассмотрим все возможные случаи.

1. $s = 1$, тогда обозначим $\tilde{g}_i = g_i {w_{2,k}}^{-1}$.

2. $s = m^n$, $m \in \{p, q\}$. Согласно лемме 1 $\rho_{i,2}$ — простое число. Так как $\rho_{i,2} > m^n$, то $\rho_{i,2} = pq/m$. Итак, $g_2^{g_i^{pq/m}} = g_2$, отсюда $g_2^{g_i^{m^n + c}} = g_2^{w_{2,k} g_i^c} = g_2$, где $\mathrm{c} = pq/m - m^n$, причем $(\mathrm{c}, pq) = 1$ и, следовательно, $g_2^{g_i^c} = g_2^{w_{2,k}^{-1}}$, затем обозначим $g_i^* = g_i^c$ и получим случай 1.

Пусть утверждение верно для всех ℓ-групп из $\mathscr{M}$ с $\alpha-2=r$, докажем, что оно справедливо и для ℓ-групп с $\alpha-2=r+1$. Пусть $\bar{\rho}_{i,2}$ нерегулярный. Очевидно, индукционное предположение применимо к ρ-векторам $\bar{\rho}_{j,3}$, $j=3,4,\dots,t$, т. е. $\bar{\rho}_{i,3}$ либо регулярный, либо равен $\bar{1}$. Если у элемента g_i ρ-вектор $\bar{\rho}_{i,3}$ не равен $\bar{1}$ и регулярный, то для него утверждение доказано. Действительно, по лемме 1 имеем $g_2^{g_i^{\rho_{i,3}}}=g_2$, но согласно строению ℓ-группы G будет $g_2^{g_i^s}\notin G_{(3)}$ при $1\le s<\rho_{i,3}=\rho_{i,2}$.

Поэтому считаем, что $\bar{\rho}_{i,3}=\bar{1}$ и $\bar{\rho}_{i,2}$ не регулярный, т. е. $g_2^{g_i^s}=g_2^{w_{2,k}}$ для некоторого s, $1\le s<\rho_{i,2}$. У всех элементов $\{g_{s_1},g_{s_2},\dots,g_{s_k}\}$ слова $w_{2,k}$ соответствующие им ρ-векторы $\bar{\rho}_{j,3}$, $j\in\{s_1,s_2,\dots,s_k\}$, равны $\bar{1}$, так как если существуют $x_1,x_2,\dots,x_b\in\{1,2,\dots,k\}$, $b>0$, такие, что $\bar{\rho}_{s_{x_1},3}\ne\bar{1}$, $\bar{\rho}_{s_{x_2},3}\ne\bar{1},\dots,\bar{\rho}_{s_{x_b},3}\ne\bar{1}$, то $g_3^{w_{2,k}}=g_3^{g_{s_{x_1}}^{m_{s_{x_1}}}g_{s_{x_2}}^{m_{s_{x_2}}}\dots g_{s_{x_b}}^{m_{s_{x_b}}}}=g_3$. А по предположению индукции о регулярности ρ-векторов $\bar{\rho}_{j,3}$ это равенство справедливо, если и только если выполнено $m_{s_{x_l}}=0(\operatorname{mod}\rho_{s_{x_l},3})$, $l\in\{1,2,\dots,b\}$, что по лемме 1 противоречит несократимости слова $w_{2,k}$. Таким образом, считаем $\bar{\rho}_{i,3}=\bar{\rho}_{j,3}=\bar{1}$, $j\in\{s_1,s_2,\dots,s_k\}$.

Далее доказательство леммы для ρ-вектора $\bar{\rho}_{i,2}$ аналогично доказательству базы индукции.

В любом из случаев 1, 2 равенство $\operatorname{var}_\ell(G)=\operatorname{var}_\ell(\widetilde{G})$ выполнено согласно лемме 2. Лемма доказана.

Предложение 1. *Пусть ℓ-многообразие порождено ℓ-группой $G\in\mathscr{M}$. Тогда существует конечно порожденная конечно подпрямо неразложимая ℓ-группа $\widetilde{G}$, в которой порождающим ее элементам соответствуют только регулярные ρ-векторы, такая, что* $\operatorname{var}_\ell(G)=\operatorname{var}_\ell(\widetilde{G})$.

Доказательство. Пусть $\{a,g_2,\dots,g_i,\dots,g_t\}$ — элементы, порождающие ℓ-группу G. Без ограничения общности считаем, что для каждого $j\in\{3,4,\dots,t\}$ ρ-вектор $\bar{\rho}_{j,2}$ регулярный (согласно лемме 5). Если для любого g_i, $i\in\{2,3,\dots,t\}$, ρ-вектор $\bar{\rho}_{i,1}$ регулярный, то доказывать нечего.

Поэтому выберем элемент g_i с максимальным номером i и не регулярным ρ-вектором $\bar{\rho}_{i,1}$. Тогда $a^{g_i^s}=a^{w_{1,k}}$, где $w_{1,k}=g_{s_1}^{m_{s_1}}g_{s_2}^{m_{s_2}}\dots g_{s_k}^{m_{s_k}}$ — правильное в $G_{(2)}$ слово.

Покажем сначала, что все компоненты слова $w_{1,k}$ перестановочны с g_2. Если все элементы этого слова не лежат в R_α, то перестановочность очевидна. Поэтому пусть существуют компоненты $g_{s_{x_1}}^{m_{s_{x_1}}},g_{s_{x_2}}^{m_{s_{x_2}}},\dots,g_{s_{x_b}}^{m_{s_{x_b}}}$, не перестановочные с g_2. Обозначим произведение таких компонент слова $w_{1,k}$ через $d_b=g_{s_{x_1}}^{m_{s_{x_1}}}g_{s_{x_2}}^{m_{s_{x_2}}}\dots g_{s_{x_b}}^{m_{s_{x_b}}}$. Произведение остальных компонент обозначим через $\bar{d}_{\bar{b}}$. Ясно, что $a^{w_{1,k}}=a^{\bar{d}_{\bar{b}}d_b}$. Так как $a^{w_{1,k}}\in G_{(2)}$, то $g_2=g_2^{\bar{d}_{\bar{b}}d_b}=g_2^{d_b}$, но все компоненты d_b не централизуют g_2, следовательно, получено противоречие с регулярностью ρ-векторов $\bar{\rho}_{j,2}$, $j\in\{s_{x_1},s_{x_2},\dots,s_{x_b}\}$.

Итак, все компоненты слова $w_{1,k}$ перестановочны с g_2 и, следовательно, перестановочны между собой. В силу того, что g_i^s является некоторым правильным словом, он также перестановочен с g_2. Следовательно, g_i^s перестановочен со всеми компонентами слова $w_{1,k}$.

Так как i максимальное, то $i>s_k>s_{k-1}>\dots>s_1$. Действительно, если $s_k>i$, то в силу перестановочности всех компонент слова между собой и с g_i^s несложно выразить $g_{s_k}^{m_{s_k}}$ через g_i^s и $g_{s_x}^{m_{s_x}}$, где $x\in\{1,2,\dots,k-1\}$. Отсюда следует, что ρ-вектор $\bar{\rho}_{s_k,1}$ не является регулярным, причем $s_k > i$, а это противоречит выбору g_i.

Далее считаем, что степени элементов слова $w_{1,k}$ и степень s элемента g_i удовлетворяют лемме 4.

Итак, $a^{g_i^{m^n}} = a^{w_{1,k}}$, где $m \in \{p, q, 1\}$, $n \in \mathbb{N}$. Покажем, что в ℓ-группе G существует элемент $\bar{g}_i = g_i^c$ такой, что $a^{\bar{g}_i^m} = a^{\widetilde{w}_{1,k}}$ и $\mathrm{var}_\ell(G) = \mathrm{var}_\ell(\overline{G})$, где $\overline{G} = \mathrm{gr}(a, g_2, \ldots, g_{i-1}, \bar{g}_i, g_{i+1}, \ldots, g_t)$.

Преобразуем это равенство.

1. Пусть $(m^n, \rho_{i,1}) = 1$. В этом случае обозначаем $\bar{g}_i = g_i^{m^n}$ и тогда $a^{\bar{g}_i} = a^{w_{1,k}}$. По лемме 2 верно $\mathrm{var}_\ell(G) = \mathrm{var}_\ell(\overline{G})$, где $\overline{G} = \mathrm{gr}(a, g_2, \ldots, \bar{g}_i, \ldots, g_t)$.

2. Если $(m^n, \rho_{i,1}) = m \neq 1$, то $\rho_{i,1} = pq$,

(а) если $n = 1$, то $a^{g_i^m} = a^{w_{1,k}}$ и доказывать нечего,

(б) если $n > 1$, то

$$a^{g_i^{pq}} = a^{g_i^{m(m^{n-1}+c)}} = a^{g_i^{m^n+mc}} = a^{w_{1,k} g_i^{mc}} = a,$$

где с $= pq/m - m^{n-1}$. Так как $(pq/m, m^{n-1}) = 1$, то $(c, pq) = 1$, отсюда получаем равенство $a^{\bar{g}_i^m} = a^{w_{1,k}^{-1}}$, где $\bar{g}_i = g_i^c$. По лемме 2 равенство $\mathrm{var}_\ell(G) = \mathrm{var}_\ell(\overline{G})$, где $\overline{G} = \mathrm{gr}(a, g_2, \ldots, \bar{g}_i, \ldots, g_t)$, выполнено.

Исходя из случаев 1, 2, далее считаем, что для элемента g_i ℓ-группы G выполнено $a^{g_i^m} = a^{w_{1,k}}$, где $m \in \{p, q, 1\}$.

Покажем, что существует $z \in G$ такой, что $a^{(g_i z)^m} = a^{w_{1,k-1}}$.

1. Если $m = 1$, то $z = g_{s_k}^{-m_{s_k}}$ и равенство доказано.

2. Если $m \neq 1$, то преобразуем равенство $a^{g_i^m} = a^{w_{1,k}}$. Так как при $c = pq/m - m$ имеем $m(m+c) = pq$ (очевидно, что $(c, pq) = 1$), то $a^{g_i^{m(m+c)}} = a$. Таким образом, получаем $a^{g_i^{m(m+c)}} = a^{w_{1,k}^m g_i^{mc}} = a$, отсюда следует равенство $a^{\bar{g}_i^m} = a^{\widetilde{w}_{1,k}}$, где $\bar{g}_i = g_i^c$, а $\widetilde{w}_{1,k} = w_{1,k}^{-m}$. По лемме 2 верно $\mathrm{var}_\ell(G) = \mathrm{var}_\ell(\overline{G})$, где $\overline{G} = \mathrm{gr}(a, g_2, \ldots, \bar{g}_i, \ldots, g_t)$.

Теперь считаем $a^{g_i^m} = a^{w_{1,k}^{-m}}$ и в этом случае будем искать $z \in G$ такой, что $a^{(g_i z)^m} = a^{w_{1,k-1}^{-m}}$. Если $[g_i, g_{s_k}] = e$, то $z = g_{s_k}^{m_{s_k}}$ и равенство доказано, если же $[g_i, g_{s_k}] \neq e$, то $z = g_{s_k}^{m m_{s_k}}$ и

$$a^{(g_i z)^m} = a^{g_i^m z^{g_i^{m-1}} z^{g_i^{m-2}} \ldots z^{g_i} z}.$$

Так как $i > s_k$ и m простое, то $a^{(g_i z)^m} = a^{g_i^m z} = a^{w_{1,k-1}^{-m}}$.

Покажем теперь, что существует $z_1 \in G$ такой, что $\mathrm{var}_\ell(G) = \mathrm{var}_\ell(\widetilde{G})$, где $\widetilde{G} = \mathrm{gr}(a, g_2, \ldots, g_i z z_1, \ldots, g_{t-1}, g_t)$ и $a^{(g_i z z_1)^m} = a^{w_{1,k-1}}$.

1. Допустим, что $g_i \in R_\alpha$. Если $g_{s_k} \in R_\alpha$, то $z_1 = e$ и все доказано. Пусть $g_{s_k} \notin R_\alpha$. В силу 3-й ступени разрешимости ℓ-группы G существует множество элементов $\overline{R}_\alpha$, $\overline{R}_\alpha \subset R_\alpha$, с которыми g_{s_k} не перестановочен, например, $\{g_{\alpha_1}, g_{\alpha_2}, \ldots, g_{\alpha_s}\} \backslash \{g_i\}$, $\alpha_j \in \{t, t-1, \ldots, \alpha\} \backslash \{i\}$, $j \in \{1, 2, \ldots, s\}$. По доказанному выше элемент z является некоторой степенью элемента g_{s_k}, следовательно, $\forall j$ $g_{\alpha_j} \gg z$ и $z^{g_{\alpha_j}^{\rho_{\alpha_j, s_k}}} = z$, причем $\forall n,\ 0 < n < \rho_{\alpha_j, s_k},\ z^{g_{\alpha_j}^n} \neq z$. Обозначим

$$z_1 = \prod_{0 \leq \sigma_j < \rho_{j, s_k}} (z)^{g_{\alpha_1}^{\sigma_{\alpha_1}} g_{\alpha_2}^{\sigma_{\alpha_2}} \ldots g_{\alpha_s}^{\sigma_{\alpha_s}}}, \quad \text{причем } \sum \sigma_j \neq 0,$$

где $j \in \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s\} \backslash \{i\}$.

Заметим, что данное произведение состоит из попарно ортогональных элементов, что следует из леммы 5. Ясно, что $z_1 \ll g_r\ \forall r \in \{\alpha, \alpha+1, \dots, t\}$. Поэтому

$$g_t \gg g_{t-1} \gg \dots \gg g_i z z_1 \gg \dots \gg g_\alpha.$$

Покажем, что элемент $\tilde{g}_i = g_i z z_1$ перестановочен со всеми элементами из R_α. Действительно,

$$(g_i z z_1)^{g_r} = g_i^{g_r} z^{g_r} z_1^{g_r}, \quad \text{где } r \in \{\alpha, \alpha+1, \dots, t\} \backslash \{i\}.$$

Так как $g_i, g_r \in R_\alpha$, то $g_i^{g_r} z^{g_r} z_1^{g_r} = g_i z^{g_r} z_1^{g_r}$.

Докажем, что $(zz_1)^{g_r} = zz_1$. Итак, $(zz_1)^{g_r} = z^{g_r} z_1^{g_r}$. Если $g_r \notin \overline{R}_\alpha$, то очевидно, что $(zz_1)^{g_r} = zz_1$. Если же $g_r \in \overline{R}_\alpha$, то по определению элемента z_1 имеем

$$z_1^{g_r} = \prod_{0 \le \sigma_j < \rho_{j,s_k}} (z)^{g_{\alpha_1}^{\sigma_{\alpha_1}} g_{\alpha_2}^{\sigma_{\alpha_2}} \dots g_r^{\sigma_r+1} \dots g_{\alpha_s}^{\sigma_{\alpha_s}}}, \quad \text{причем } \sum \sigma_j \ne 0,$$

где $j \in \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s\} \backslash \{i\}$. Это значит, что в произведении

$$\prod_{0 \le \sigma_j < \rho_{j,s_k}} (z)^{g_{\alpha_1}^{\sigma_{\alpha_1}} g_{\alpha_2}^{\sigma_{\alpha_2}} \dots g_r^{\sigma_r+1} \dots g_{\alpha_s}^{\sigma_{\alpha_s}}}$$

есть сомножитель z и нет сомножителя z^{g_r} (так как $\sum \sigma_j \ne 0$, где $j \in \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s\} \backslash \{i\}$). В силу ортогональности всех сомножителей рассматриваемого произведения приходим к равенству $z^{g_r} z_1^{g_r} = zz_1$.

Полученный нами элемент $\tilde{g}_i = g_i z z_1$ по действию на элементы g_j, $j < \alpha$, эквивалентен элементу $\bar{g}_i = g_i z$. Отсюда следует равенство $\mathrm{var}_\ell(G) = \mathrm{var}_\ell(\widetilde{G})$, где $\widetilde{G} = \mathrm{gr}(a, g_2, \dots, \tilde{g}_i, \dots, g_{t-1}, g_t)$.

2. Пусть $g_i \notin R_\alpha$. В этом случае если $\overline{R}_\alpha$, $\overline{R}_\alpha \subset R_\alpha$, — максимальное множество элементов, перестановочных с g_i, а $\widetilde{R}_\alpha \subset R_\alpha$ — максимальное множество элементов, перестановочных с z, то обозначим $\{g_{\alpha_1}, g_{\alpha_2}, \dots, g_{\alpha_s}\} = \overline{R}_\alpha \backslash \widetilde{R}_\alpha$, где $\alpha_j \in \{\alpha, \alpha+1, \dots, t\}$, $j \in \{1, 2, \dots, s\}$. Элементы этого множества не перестановочны с z и перестановочны с g_i. В этом случае обозначим

$$z_1 = \prod_{0 \le \sigma_j < \rho_{j,s_k}} (z)^{g_{\alpha_1}^{\sigma_{\alpha_1}} g_{\alpha_2}^{\sigma_{\alpha_2}} \dots g_{\alpha_s}^{\sigma_{\alpha_s}}}, \quad \text{причем } \sum \sigma_j \ne 0,$$

где $j \in \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s\}$. Элемент $\tilde{g}_i = g_i z z_1$ перестановочен со всеми элементами из множества $\overline{R}_\alpha$, что доказывается аналогично доказательству, приведенному в п. 1, и не перестановочен со всеми элементами из $R_\alpha \backslash \overline{R}_\alpha$. Так как $i > s_k$, то

$$g_{\alpha-1} \gg g_{\alpha-2} \gg \dots \gg \tilde{g}_i \gg \dots \gg g_{s_k} \gg \dots \gg g_2 \gg a > e.$$

Таким образом, доказано равенство $\mathrm{var}_\ell(G) = \mathrm{var}_\ell(\widetilde{G})$, где

$$\widetilde{G} = \mathrm{gr}(a, g_2, \dots, \tilde{g}_i, \dots, g_{t-1}, g_t).$$

Итак, мы показали, что если в ℓ-группе G для максимального по номеру порождающего элемента g_i с не регулярным ρ-вектором $\bar{\rho}_{i,1}$ выполнено $a^{g_i^m} = a^{w_{1,k}}$, $m \in \{p, q, 1\}$, то существует элемент $\bar{z} \in G$ такой, что $a^{(g_i \bar{z})^m} = a^{w_{1,k-1}}$ и $\mathrm{var}_\ell(G) = \mathrm{var}_\ell(\widetilde{G})$, где $\widetilde{G} = \mathrm{gr}(a, g_2, \dots, g_i \bar{z}, \dots, g_t)$.

Повторяя вышеприведенные рассуждения для каждой компоненты слова $w_{1,k}$, получаем регулярность ρ-вектора i-го (максимального) порождающего элемента.

Далее доказательство предложения проводится путем выбора максимального элемента с нерегулярным ρ-вектором в полученной ℓ-группе. Так как ℓ-группа G конечно порождена, то через конечное число шагов получаем доказательство предложения.

Определение. Конечно порожденная конечно подпрямо неразложимая ℓ-группа G из $\mathscr{L}_{pq}$ называется *регулярной*, если $G \in \mathscr{M}$ и все ρ-векторы, соответствующие порождающим ее элементам, регулярные.

Далее обозначим через $A(k)$, где $k \in \{p, q\}$, матрицу

$$A(k) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

где $a_{ij} \in \{1, pq/k\}$,

$$a_{i1} \geq a_{i2} \geq \dots \geq a_{in},\ i = 1, 2, \dots, m; \quad a_{1j} \leq a_{2j} \leq \dots \leq a_{mj},\ j = 1, 2, \dots, n,$$

и назовем ее ρ-*матрицей.*

Теперь для ρ-матрицы $A(k)$ обозначим через $B(A(k))$ ℓ-группу

$$B(A(k)) = \mathrm{gr}(a, g_1, g_2, \dots, g_{m-1}, h_1, h_2, \dots, h_n \| [h_{i_1}, h_{j_1}] = [g_{i_2}, g_{j_2}] = \big[a, g_{i_2}^k\big]$$
$$= \big[g_{i_2}, h_{i_1}^{a_{i_2 i_1}}\big] = \big[a, h_{i_1}^{a_{m i_1}}\big] = \big[g_{i_2}, g_{i_2}^{h_1^{\sigma_1} h_2^{\sigma_2} \dots h_n^{\sigma_n}}\big] = \big[a, a^{g_1^{\delta_1} \dots g_{m-1}^{\delta_{m-1}} h_1^{\sigma_1} \dots h_n^{\sigma_n}}\big] = e;$$
$$\sigma_{i_1}, \delta_{i_2} \in N;\ i_1, j_1 = 1, 2, \dots, n;\ i_2, j_2 = 1, 2, \dots, m-1)$$

с решеточным порядком, определяемым соотношениями

$$h_1 \gg h_2 \gg \dots \gg h_n \gg g_1 \gg g_2 \gg \dots \gg g_{m-1} \gg a > e;$$
$$a^{g_1^{\delta_1} \dots g_{m-1}^{\delta_{m-1}} h_1^{\sigma_1} \dots h_n^{\sigma_n}} \wedge a = e,$$

если найдутся $\delta_i \neq 0 (\mathrm{mod}\, k)$ или $\sigma_j \neq 0 (\mathrm{mod}\, a_{mj})$;

$$g_i^{h_1^{\sigma_1} h_2^{\sigma_2} \dots h_n^{\sigma_n}} \wedge g_i = e,$$

если найдутся $\sigma_j \neq 0 (\mathrm{mod}\, a_{mj})$, где $i \in \{1, 2, \dots, m-1\}$; $j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Отметим, что удаление i-й строки (j-го столбца) из ρ-матрицы $A(k)$ эквивалентно удалению g_i (h_j) элемента из ℓ-группы $B(A(k))$.

Из работы [12] немедленно следует

Лемма 6. *Пусть* $G \in \mathscr{M}$, $G = \mathrm{gr}(a, g_2, \dots, g_\alpha, \dots, g_i, g_{i+1}, \dots, g_t)$ *и в* G *выполнено* $a \ll g_2 \ll \dots \ll g_\alpha \ll \dots \ll g_i \ll g_{i+1} \ll \dots \ll g_t$. *Тогда* $\mathrm{var}_\ell(G) = \mathrm{var}_\ell(\widetilde{G})$, *где* $\widetilde{G} = \mathrm{gr}(a, g_2, \dots, g_\alpha, \dots, g_i, g_{i+1}, \dots, g_t)$, *в которой справедливо* $a \ll g_2 \ll \dots \ll g_\alpha \ll \dots \ll g_{i+1} \ll g_i \ll \dots \ll g_t$.

Лемма 7. *Пусть* $G \in \mathscr{M} \backslash \mathscr{A}^2$. *Тогда* $\mathrm{var}_\ell(G) = \mathrm{var}_\ell(B(A(k)))$ *для некоторой* ρ-*матрицы* $A(k)$ *и* $k \in \{p, q\}$.

Доказательство. Согласно предложению 1 без ограничения общности считаем ℓ-группу G регулярной. Пусть $\{a, g_2, g_3, \dots, g_t\}$ — база ℓ-группы G.

Покажем, что существует регулярная ℓ-группа $\widetilde{G}$ такая, что $\mathrm{var}_\ell(G) = \mathrm{var}_\ell(\widetilde{G})$ и порождающие ее элементы централизуют $\mathscr{A}(\widetilde{G})$ только в простой степени.

Допустим, это не так и для некоторого элемента g_i выполнено $\rho_{i,1} = pq$.

Согласно [12] ℓ-многообразие, порожденное ℓ-группой G, совпадает с ℓ-многообразием $\mathrm{var}_\ell(\widetilde{G})$, где

$$\widetilde{G} = \mathrm{gr}(a, g_2, \ldots, g_\alpha, \ldots, g_i, \bar{g}, g_{i+1}, \ldots, g_t),$$

$\bar{g} \gg g_i$ и $\bar{g} \in C_G(\mathscr{A}(G))$. Перейдем к новому порождающему $g = \bar{g}g_i^p$ и определим для него ρ-вектор $\bar{\rho} = (\rho_{i-1}, \rho_{i-2}, \ldots, \rho_1)$. По лемме 6 принимаем следующий порядок: $g \ll g_i$.

Итак, имеем равенство $a^{g_i^p} = a^g$. Преобразуем его: $a^{g_i^{pq}} = a^{g_i^{p(p+c)}} = a^{g^p g_i^{pc}} = a$, где $c = q - p$. Ясно, что $(c, pq) = 1$, поэтому обозначим $g_i^* = g_i^{|c|} g$, если с > 0, в противном случае примем $g_i^* = g_i^{|c|} g^{-1}$ и в итоге получаем $a^{g_i^{*p}} = a$. Равенство $\mathrm{var}_\ell(G) = \mathrm{var}_\ell(\widetilde{G})$, где

$$\widetilde{G} = \mathrm{gr}(a, g_2, \ldots, g_\alpha, \ldots, g_{i-1}, g, g_i^*, g_{i+1}, \ldots, g_t),$$

следует из леммы 2. Аналогично проводим доказательство для остальных элементов, имеющих не простую степень централизации $\mathscr{A}(G)$.

Далее без ограничения общности считаем, что порождающие элементы ℓ-группы G централизуют $\mathscr{A}(G)$ только в простой степени. Покажем лемму для $\rho_{2,1} = q$ (при $\rho_{2,1} = p$ доказательство аналогично, а случай $\rho_{2,1} = pq$ невозможен в силу следствия 1 и 3-й ступени разрешимости ℓ-группы G).

По лемме 6 примем следующий порядок: $g_t \gg g_{t-1} \gg \cdots \gg g_{\alpha_1} \gg \cdots \gg g_\alpha$, причем $g_i^p \in C_G(\mathscr{A}(G))$, $i \in \{t, t-1, \ldots, \alpha_1\}$. Обозначим подмножество $\{g_t, g_{t-1}, \ldots, g_{\alpha_1}\}$ множества R_α через $\widetilde{R}_{\alpha_1}$, и согласно работе [12]

$$G = \mathrm{gr}(\widetilde{R}_{\alpha_1}) \overset{\rightarrow}{\curlywedge} \big(G \cap G^{\langle G \rangle}_{(\alpha_1 - 1)}\big).$$

Введем обозначение для ρ-вектора $\bar{\rho}_{i,1}$ элемента g_i, $i = t, t-1, \ldots, \alpha_1$: $[\bar{\rho}_{i,1}] = (\rho_{i,\alpha_1-1}, \rho_{i,\alpha_1-2}, \ldots, \rho_{i,1})$ (ясно, что для любого i количество компонент $[\bar{\rho}_{i,1}]$ фиксировано и равно $\alpha_1 - 1$). Составим из этих наборов матрицу P, в которой $[\bar{\rho}_{i,1}]$ — i-й столбец. По лемме 6 изменим порядок в $\mathrm{gr}(\widetilde{R}_{\alpha_1})$ так, чтобы матрица P совпала с некоторой ρ-матрицей A. Далее переобозначим порождающие элементы ℓ-группы G следующим образом:

$$g_t \sim h_1,\ g_{t-1} \sim h_2, \ldots, g_{\alpha_1} \sim h_{t-\alpha_1+1}.$$

Теперь, перенумеровав элементы $g_2, g_3, \ldots, g_{\alpha_1-1}$ как $g_{\alpha_1-2}, g_{\alpha_1-3}, \ldots, g_1$, а затем, приняв $n = t - \alpha_1 + 1$ и $m = \alpha_1 - 1$, получаем изоморфизм ℓ-группы G некоторой ℓ-группе $B(A(k))$. Лемма доказана.

Далее для ρ-матрицы $A(k)$ будем обозначать через $|A[i]|_k$ количество элементов, равных k в i-м столбце, через $|A[i]|_1$ — количество единичных элементов в i-м столбце и положим $ve_{A(k)} = (v_1, v_2, \ldots, v_{n-1})$, где $v_j = |A[i]|_k - |A[i+1]|_k$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, n-1$.

Назовем набор $ve_{A(k)}$ *границей* ρ-матрицы $A(k)$.

Обозначим через $ve^{(i)}_{A(k)} = ve_B$ границу ρ-матрицы B, где B — матрица, полученная в результате удаления i столбцов из $A(k)$.

Определение. Пусть ρ-матрицы $A_1(k)$ и $A_2(k)$ имеют соответственно n_1 и n_2 столбцов, причем $n_1 > n_2$. Тогда будем считать, что $ve^{(n_1-n_2)}_{A_1(k)} \supseteq ve_{A_2(k)}$, если $v^{(n_1-n_2)}_{1i} \geq v_{2i}$ для каждого $i \in \{1, 2, \ldots, n_2\}$, где $v^{(n_1-n_2)}_{1i}$ — компоненты границы $ve^{(n_1-n_2)}_{A_1(k)}$, а v_{2i} — компоненты границы $ve_{A_2(k)}$.

Определение. ρ-Матрица A_1 называется *приводимой* к ρ-матрице A_2 (A_2 *вложима* в A_1), если, удаляя некоторые строки и столбцы из A_1, можно получить матрицу A_2.

Лемма 8. *Пусть для ρ-матриц $A_1(k)$ и $A_2(k)$ выполнены соотношения*
1) $|A_1[n_1]|_k \geq |A_2[n_2]|_k$;
2) $|A_1[1]|_1 \geq |A_2[1]|_1$;
3) $ve^{(n_1-n_2)}_{A_1(k)} \supseteq ve_{A_2(k)}$, *причем множество удаленных из $A_1(k)$ столбцов не содержит первый и последний столбцы ρ-матрицы A_1.*

Тогда матрица $A_1(k)$ приводима к матрице $A_2(k)$.

Доказательство. Докажем лемму в случае $n_1 = n_2 = n$ (случай $n_1 > n_2$ доказывается аналогично, но вместо матрицы $A_1(k)$ берется матрица, полученная в результате удаления из $A_1(k)$ $(n_1 - n_2)$ столбцов, кроме первого и последнего).

Покажем, что если неравенство $|A_1[i]|_k \geq |A_2[i]|_k$ и п. 3 выполнены, то неравенство $|A_1[i-1]|_k \geq |A_2[i-1]|_k$ также справедливо. Обозначим $|A_1[i]|_k = a$; $|A_1[i-1]|_k = b$; $|A_2[i]|_k = c$; $|A_2[i-1]|_k = d$. Итак, $a \geq c$, тем самым $b - a \geq d - c$, $b \geq d + (a - c)$, следовательно, $b \geq d$. Таким образом, доказано, что для каждого $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ выполнено $|A_1[i]|_k \geq |A_2[i]|_k$.

Если в первом условии леммы неравенство строгое, то удалим из матрицы $A_1(k)$ подряд $|A_1[n]|_k - |A_2[n]|_k$ строк, начиная со строки с номером $m_1 - |A_1[n]|_k + 1$, в направлении увеличения номера строки. Заметим, что для получившейся ρ-матрицы (обозначим ее через $A_3(k)$), вложимой в $A_1(k)$, справедливы все три условия леммы и, более того, $|A_3[n]|_k = |A_2[n]|_k$, $ve_{A_3(k)} = ve_{A_1(k)}$. Без ограничения общности считаем, что для ρ-матрицы $A_1(k)$ выполнено $|A_1[n]|_k = |A_2[n]|_k$.

Теперь если во втором условии леммы неравенство строгое, то удалим из матрицы $A_1(k)$ подряд $|A_1[1]|_1 - |A_2[1]|_1$ строк, начиная с первой, в направлении увеличения номера строки. Обозначим получившуюся ρ-матрицу через $A_3(k)$. Для нее выполнены все условия леммы и $|A_3[n]|_k = |A_2[n]|_k$, $|A_3[1]|_1 = |A_2[1]|_1$, $ve_{A_3(k)} = ve_{A_1(k)}$. Очевидно, что $A_3(k)$ вложима в $A_1(k)$.

Далее без ограничения общности считаем, что для ρ-матрицы $A_1(k)$ выполнены равенства $|A_3[n]|_k = |A_2[n]|_k$ и $|A_3[1]|_1 = |A_2[1]|_1$.

Если для ρ-матриц $A_1(k)$ и $A_2(k)$ выполнено $ve_{A_1(k)} = ve_{A_2(k)}$, то матрицы $A_1(k)$ и $A_2(k)$ совпадают, что проверяется непосредственно, и все доказано.

Если же $ve_{A_1(k)} \neq ve_{A_2(k)}$, то существует $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ такое, что $v_{1j} > v_{2j}$. В этом случае удалим $v_{1j} - v_{2j}$ строк из матрицы $A_1(k)$, начиная с $(m_1 - |A_1[j]|_k + 1)$-й, в направлении увеличения номера строки. Граница ρ-матрицы $A_1(k)$ отличается от границы получившейся матрицы (обозначим ее через $A_3(k)$) только в j-й позиции, причем $v_{3j} = v_{2j}$, где v_{3j} — j-я компонента границы ρ-матрицы $A_3(k)$. Очевидно, что ρ-матрица $A_1(k)$ приводима к ρ-матрице $A_3(k)$.

Так как количество компонент в границе $ve_{A_1(k)}$ ограничено, повторяя вышеприведенные рассуждения конечное число раз, получаем доказательство леммы.

Предложение 2. *Пусть G_1 и G_2 — регулярные ℓ-группы из ℓ-многообразия $\mathscr{L}_{pq}$ и A_1, A_2 — ρ-матрицы ℓ-групп G_1 и G_2 соответственно. Тогда если A_1 приводима к A_2, то $G_1 \geq G_2$.*

Из строения ρ-матрицы и определения границы следует

Лемма 9. *Пусть A — ρ-матрица и ve_A — ее граница, а $A^{(1)}$ — матрица, полученная в результате удаления i-го столбца из A, где $i \notin \{1, n\}$. Тогда $(v_1, v_2, \dots, v_{i-2}, v_{i-1} + v_i, v_{i+1}, \dots, v_{n-1})$ — граница ρ-матрицы $A^{(1)}$.*

Опираясь на полученные результаты, покажем, что справедлива основная

Теорема 1. *Любое собственное ℓ-подмногообразие $\mathscr{I}$ ℓ-многообразия $\mathscr{L}_{pq}$ имеет конечный базис тождеств.*

Доказательство. Если некоторое ℓ-многообразие $\mathscr{K}$ содержит ℓ-подмногообразие $\mathscr{I}$, не имеющее конечного базиса тождеств, то оно является пересечением ℓ-подмногообразий $\{\mathscr{I}_i\}$, $i \in N$, обладающих следующим свойством:

$$\mathscr{K} \supset \mathscr{I}_1 \supset \mathscr{I}_2 \supset \mathscr{I}_3, \dots \supset \mathscr{I},$$

что следует из работы [15].

Построим счетный набор ℓ-групп $\{G_i\}$, $i \in N$:

$$G_1 \in \mathscr{K} \backslash \mathscr{I}_2,\ G_2 \in \mathscr{I}_1 \backslash \mathscr{I}_2, \dots, G_i \in \mathscr{I}_{i-1} \backslash \mathscr{I}_i,\ \dots .$$

Очевидно, что он обладает следующим свойством:

$$G_i \notin \mathrm{var}_\ell(G_{i+1}, G_{i+2}, \dots, G_s, \dots)\ \forall i \in N.$$

Согласно работе [12] и предложению 1 любое ℓ-многообразие $\mathscr{I}$ в $\mathscr{L}_{pq}$ порождается множеством своих регулярных конечно порожденных конечно подпрямо неразложимых ℓ-групп.

Допустим, что $\mathscr{I}$ не имеет конечного базиса тождеств и тем самым существует вышеприведенный набор ℓ-групп, где $G_i \in \mathscr{L}_{pq}$. Так как ступень разрешимости ℓ-групп из $\mathscr{L}_{pq}$ ограничена [12], а именно равна 2 или 3, то из бесконечной последовательности ℓ-групп $\{G_i\}$ можно извлечь бесконечную подпоследовательность, элементы которой имеют одну ступень разрешимости. Рассмотрим каждый случай отдельно.

Если все ℓ-группы G_i метабелевы, то согласно работе [9] получаем противоречие со свойством набора ℓ-групп $\{G_i\}$. Поэтому пусть все ℓ-группы в бесконечном наборе 3-й ступени разрешимости.

По лемме 7 без ограничения общности считаем ℓ-группу G_i равной $B(A_i(k_i))$ для некоторого k_i. Так как набор ℓ-групп бесконечный, а $k_i \in \{p, q\}$, то будем считать $k_i = k_{i+1} = p$ (аналогично доказательство проводится для $k_i = k_{i+1} = q$), где $i \in N$ и в этом случае переобозначим ρ-матрицы $A_i(k_i) = A_i$. Пусть m_i, n_i — число строк и столбцов матрицы A_i соответственно, а t_i — число порождающих ℓ-группы G_i (очевидно, что $m_i + n_i = t_i$).

Далее рассматриваем различные бесконечные подпоследовательности набора ℓ-групп $\{G_i\}$ при введенных ограничениях. Очевидно, что свойство этого набора выполняется и на его подпоследовательностях. Без ограничения общности считаем, что нумерация элементов этих подпоследовательностей начинается с единицы.

Если $\max\{t_i \mid i \in N\} < \infty$, то в этом случае получаем противоречие со свойством набора $\{G_i\}$, исходя из строения ρ-матриц A_i, леммы 8 и предложения 2. Поэтому считаем, что $t_i < t_{i+1}$, $i \in N$. В силу бесконечности набора ℓ-групп G_i также можно считать $|A_i[n_i]|_k \leq |A_{i+1}[n_{i+1}]|_k$, $|A_i[1]|_1 \leq |A_{i+1}[1]|_1$.

1. Если $\max\{n_i \mid i \in N\} = n < \infty$, то выделим из набора ℓ-групп бесконечную последовательность, для ρ-матриц которых справедливо $n_i = \mathrm{const} \leq n$. Границы всех ρ-матриц в этом случае будут иметь одинаковое конечное количество компонент. Очевидно, что найдется бесконечная подпоследовательность ρ-матриц, в которой любая старшая по номеру матрица приводима ко всем младшим, что ввиду предложения 2 противоречит свойству набора ℓ-групп $\{G_i\}$.

2. $\max\{n_i \mid i \in N\}$ не существует. Тогда считаем, что $n_i < n_{i+1}$, т. е. количество компонент в границах ρ-матриц растет. Но в любой границе ve_{A_i} число ненулевых компонент ограничено и это число не больше $v_{11} + v_{12} + \dots + v_{1n_1} + \xi$, где ξ — количество нулевых компонент в границе ve_{A_1}, так как в противном случае в рассматриваемом наборе нашлась бы ρ-матрица (и не одна), приводимая к ρ-матрице A_1 (по лемме 8 и лемме 9), что согласно предложению 2 противоречит свойству набора ℓ-групп $\{G_i\}$. Поэтому извлечем из последовательности ℓ-групп бесконечную подпоследовательность, границы ρ-матриц которых имеют одинаковое количество ненулевых компонент.

Назовем максимальную совокупность подряд идущих нулей в границе ρ-матрицы *нулевым массивом*. *Длиной нулевого массива* назовем количество нулевых компонент, входящих в него.

Обозначим $\Theta(ve_{A_i}) = (\theta_{1,i}, \theta_{2,i}, \dots, \theta_{s+1,i})$, где $\theta_{j,i}$ — длины нулевых массивов, а s — количество ненулевых компонент в границе ve_{A_i}. Введем еще один набор $W(ve_{A_i}) = (w_{1,i}, w_{2,i}, \dots, w_{s,i})$, где $w_{j,i}$ — ненулевые компоненты границы ve_{A_i}, $j = 1, 2, \dots, s$.

Ясно, что в бесконечной последовательности ℓ-групп $\{G_i\}$ есть бесконечная подпоследовательность ℓ-групп $\{G_{i_k} \mid i_k \in N\}$, для которых выполнены неравенства $\theta_{j,i_k} \leq \theta_{j,i_k+1}$, $j = 1, 2, \dots, s+1$; $w_{j,i_k} \leq w_{j,i_k+1}$, $j = 1, 2, \dots, s$, а это согласно лемме 8 и предложению 2 противоречит свойству набора $\{G_i\}$.

Так как все возможные случаи рассмотрены, теорема доказана.

В заключение автор выражает благодарность С. А. Гурченкову за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Martinez J.* Free products in varieties of lattice ordered groups // Czech. Math. J. 1972. V. 22. P. 535–553.
2. *Scrimger E. B.* A large class of small varieties of lattice ordered groups // Proc. Amer. Math. Soc. 1975. V. 51, N 2. P. 301–306.
3. *Smith J. E. A new family of ℓ-group varieties* // Houston J. Math. 1981. V. 7. P. 551–570.
4. *Fox C. D.* On the Scrimger varieties of lattice ordered groups // Algebra Univ. 1983. V. 16. P. 163–166.
5. *Гурченков С. А.* Многообразия ℓ-групп с тождеством $[x^p, y^p] = e$ конечно-базируемы // Алгебра и логика. 1984. Т. 23, № 1. С. 27–47.
6. *Holland W. C., Reilly N. R.* Structure and laws of the Scrimger varieties of lattice ordered groups // Algebra and Order: Proc. First. intern. symp. ordered algebraic structures. Berlin: Heldermann Verl., 1986. P. 71–81.
7. *Holland W. C., Mekler A., Reilly N. R.* Varieties of lattice ordered groups in which prime powers commute // Algebra Univ. 1986. V. 23. P. 196–214.
8. *Holland W. C., Reilly N. R.* Metabelian varieties of lattice ordered groups that contan only abelian o-groups // Algebra Univ. 1987. V. 24. P. 204–223.
9. *Гурченков С. А.* К теории многообразий решеточно упорядоченных групп // Алгебра и логика. 1988. Т. 27, № 3. С. 249–273.
10. *Reilly N. R.* Varieties of lattice ordered groups that contan no non-abelian o-groups are solvable // Order. 1986. V. 3. P. 287–297.

11. *Гурченков С. А.* О многообразиях ℓ-групп, в которых линейно упорядоченные группы абелевы // 10 Всесоюзн. симпоз. по теории групп, Гомель, 1986: Тез. докл. Минск: ИМ АН БССР, 1986. С. 69.
12. *Гурченков С. А.* О конечной базируемости многообразий ℓ-групп // Алгебра и логика. 1996. Т. 35, № 3. С. 268–287.
13. *Копытов В. М.* Решеточно упорядоченные группы. М.: Наука, 1984.
14. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп, 3-е изд. М.: Наука, 1982.
15. *Мальцев А. И.* Алгебраические системы. М.: Наука, 1970.

Статья поступила 16 апреля 2002 г., окончательный вариант — 18 ноября 2002 г.

Нарицын Николай Николаевич
Рубцовский индустриальный институт, технологический факультет,
ул. Тракторная, 2/6, 658206 Рубцовск Алтайского края
`nickn@ngs.ru`