Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2003. Том 44, № 5

УДК 517.955.4+517.986.7

УСЛОВИЯ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ КОНЕЧНОМЕРНОСТИ C_0–ПОЛУГРУППЫ

Э. Ю. Емельянов

Аннотация: Исследован класс ограниченных C_0-полугрупп $\mathscr{T} = (T_t)_{t\geq 0}$ на банаховом пространстве X, удовлетворяющих условию асимптотической конечномерности $\operatorname{codim} X_0(\mathscr{T}) < \infty$, где $X_0(\mathscr{T}) := \{x \in X : \lim\limits_{t\to\infty} \|T_t x\| = 0\}$. Доказана теорема, дающая ряд необходимых и достаточных условий для асимптотической конечномерности.

Ключевые слова: C_0-полугруппа, инвариантное подпространство полугруппы, почти периодическая полугруппа.

Пусть $X = (X, \|\cdot\|)$ — банахово пространство над вещественным или комплексным полем. Для всякого непустого $A \subseteq X$ будем обозначать через $\chi_{\|\cdot\|}(A)$ его меру некомпактности Хаусдорфа:

$$\chi_{\|\cdot\|}(A) := \inf\left\{\alpha \in \mathbb{R}_+ : A \subseteq \bigcup_{i=1}^{p} B_X(x_i, \alpha);\ p \in \mathbb{N},\ \overline{x_1, x_p} \in X\right\},$$

где $B_X(x_i, \alpha)$ — замкнутый шар с центром x_i и радиусом α. Отметим, что мера некомпактности Хаусдорфа зависит от выбора нормы $\|\cdot\|$ и что эта мера равна нулю на любом компактном множестве.

Пусть $T = (T_t)_{t\geq 0}$ — C_0-полугруппа в X. C_0-полугруппы возникают при изучении абстрактной задачи Коши

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = Au(t), & t \geq 0, \\ u(0) = f \in X, \end{cases}$$

где оператор A становится генератором некоторой C_0-полугруппы $(T_t)_{t\geq 0}$, удовлетворяющей равенству $u(t) = T_t f$ при всех $t \geq 0$. Одним из важных вопросов, касающихся C_0-полугрупп, является вопрос об их устойчивости:

$$\lim_{t\to\infty} \|T_t x\| = 0 \quad (\forall x \in X).$$

Очевидно, что при выполнении этого условия полугруппа T ограничена, т. е. $\sup\limits_t \|T_t\| < \infty$.

В настоящей работе изучается обобщение устойчивых полугрупп, а именно ограниченные C_0-полугруппы T, для которых

$$\operatorname{codim} X_0(T) < \infty,$$

где $X_0(T) := \{x \in X : \lim\limits_{t\to\infty} \|T_t x\| = 0\}$. Такие полугруппы будем называть *асимптотически конечномерными*. Отметим, что ограниченность T влечет замкнутость подпространства $X_0(T)$. Напомним также, что полугруппа T называется *слабо почти периодичной*, если ее орбиты $Tx = \{T_t x\}_{t\geq 0}$ слабо предкомпактны для всякого $x \in X$.

Теорема 1. *Для ограниченной C_0-полугруппы T на банаховом пространстве X равносильны следующие условия:*

(i) *полугруппа T асимптотически конечномерна;*

(ii) *для любого $\varepsilon > 0$ найдутся эквивалентная норма $\|\cdot\|_\varepsilon$ на X и подмножество $A \subseteq X$ такие, что $\chi_{\|\cdot\|_\varepsilon}(A) = \varepsilon$ и*

$$\lim_{t\to\infty} \operatorname{dist}(T_t x, A) = 0 \quad (\forall x \in X,\ \|x\|_\varepsilon \le 1);$$

(iii) *найдутся эквивалентная норма $\|\cdot\|_1$ на X и подмножество $A \subseteq X$ такие, что $\chi_{\|\cdot\|_1}(A) < 1$ и*

$$\lim_{t\to\infty} \operatorname{dist}(T_t x, A) = 0 \quad (\forall x \in X,\ \|x\|_1 \le 1);$$

(iv) *для любых вещественных $\varepsilon > 0$ и $0 \le \alpha < \infty$ найдутся конечномерное подпространство Z такое, что $X = X_0(T) \oplus Z$ и*

$$\operatorname{dist}(T_t z, Z) \le \varepsilon \|T_t z\| \quad (\forall z \in Z,\ 0 \le t \le \alpha).$$

Кроме того, если полугруппа T слабо почти периодична, то перечисленные условия равносильны следующему:

(v) *найдется T-инвариантное подпространство Z такое, что $\dim(Z) < \infty$ и $X = X_0(T) \oplus Z$.*

Доказательство теоремы 1 будет проведено ниже с использованием нестандартного анализа. Отметим, что его можно было бы провести, адресуя читателя к некоторым результатам работ [1, 2], однако мы предпочтем здесь более прямой путь. Прежде чем перейти к доказательству теоремы, установим два ее важных следствия.

Следствие 1. *Для всякой асимптотически конечномерной C_0-полугруппы T на рефлексивном банаховом пространстве X найдется T-инвариантное подпространство Z такое, что $X = X_0(T) \oplus Z$.*

Доказательство. Поскольку орбиты $Tx = \{T_t x\}_{t\ge 0}$ всякого $x \in X$ ограничены, они слабо предкомпактны в силу рефлексивности X. Тем самым полугруппа T слабо почти периодична и утверждение следует из теоремы 1. $\square$

Следующий простой пример показывает, что условие рефлексивности пространства X в следствии 1 существенно.

Пример. Пусть $X = C[0,1]$ — пространство непрерывных функций на отрезке $[0,1]$ с sup-нормой. Возьмем какую-нибудь непрерывную функцию $\psi : [0,1] \to \mathbb{C}$, для которой $\sup\limits_{x\in[0,1]} |\psi(x)| = 1$ и значение $|\psi(x)| = 1$ достигается лишь на конечном множестве $x_1, \dots x_m$ точек отрезка $[0,1]$. Тогда полугруппа T:

$$T_t f(x) := \psi^t(x) f(x) \quad (f \in C[0,1]),$$

на $C[0,1]$ асимптотически конечномерна, так как $\operatorname{codim} X_0(T) = m$, однако подпространство $X_0(T)$, очевидно, не имеет T-инвариантного дополнения.

Вторым следствием теоремы 1 является теорема Фонга — Сайна (см. [3] или [4]). Ее доказательство обычно основано на использовании достаточно нетривиального результата — теоремы де Лю — Гликсберга об отщеплении граничного спектра (см., например, [5, с. 98]). Следует отметить, что теорема де Лю — Гликсберга не используется нами в доказательстве теоремы 1.

Следствие 2. *Пусть T — C_0-полугруппа, для которой найдется компактное подмножество $K \in X$ такое, что*

$$\lim_{t\to\infty} \operatorname{dist}(T_t x, K) = 0 \quad (\forall x \in X,\ \|x\| \le 1).$$

Тогда найдется конечномерное T-инвариантное подпространство Z такое, что $X = X_0(T) \oplus Z$.

Доказательство. Достаточно заметить, что полугруппа T, удовлетворяющая условию следствия слабо (и даже сильно), почти периодична, и применить теорему 1. □

Доказательство теоремы 1. Начнем с импликации (i)⇒(ii). Возьмем какую-либо непрерывную проекцию Q пространства X на $X_0(T)$. Такая проекция всегда существует, поскольку $X_0(T)$ замкнуто и $\operatorname{codim} X_0(T) < \infty$. Пусть $P := I - Q$ и $M := \|Q\| \sup\limits_{t\ge 0} \|T_t\|$. Легко видеть, что

$$\|x\|_\varepsilon := \|Px\| + \varepsilon M^{-1}\|Qx\| \quad (x \in X)$$

является нормой на X, эквивалентной норме $\|\cdot\|$. Пусть $x \in X$, $\|x\|_\varepsilon \le 1$. Тогда $PT_tPx \in PT_t(B_X) \subseteq MP(B_X)$ для всех $t \in \mathbb{R}_+$, где B_X — замкнутый единичный шар пространства X в исходной норме $\|\cdot\|$, и

$$\begin{aligned}\varlimsup_{t\to\infty} \operatorname{dist}_{\|\cdot\|_\varepsilon}(T_t x, MP(B_X)) &\le \varlimsup_{t\to\infty} \|T_t x - PT_tPx\|_\varepsilon = \varlimsup_{t\to\infty} \|T_tPx - PT_tPx\|_\varepsilon \\ &= \varlimsup_{t\to\infty} \|QT_tPx\|_\varepsilon = \varepsilon M^{-1} \varlimsup_{t\to\infty} \|QT_tPx\| \le \alpha\|Px\| \le \alpha\|x\|_\varepsilon \le \varepsilon.\end{aligned}$$

Множество $MP(B_X)$ компактно, поскольку $\dim(P(X)) < \infty$. Поэтому $A := MP(B_X) + \{x \in X : \|x\|_\varepsilon \le \varepsilon\}$ имеет меру некомпактности $\chi_{\|\cdot\|_\varepsilon}(A) = \varepsilon$ и удовлетворяет условию

$$\lim_{t\to\infty} \operatorname{dist}(T_t x, A) = 0 \quad (\forall x \in X,\ \|x\|_\varepsilon \le 1).$$

Тем самым импликация (i)⇒(ii) доказана.

Импликации (ii)⇒(iii) и (iv)⇒(i) очевидны.

Для завершения доказательства теоремы 1 необходимо проделать некоторую вспомогательную работу.

Прежде всего напомним теорему Крейна — Красносельского — Мильмана о растворе двух подпространств [6] (см. также [7]), а точнее ее небольшое обобщение, фактически доказанное, хотя и не сформулированное в явном виде в [7, теорема 1.1]. Обозначим через $\rho(x, Y)$ расстояние от элемента $x \in X$ до подпространства $Y \subseteq X$, т. е.

$$\rho(x, Y) = \inf_{y\in Y} \|x - y\|.$$

Назовем *раствором подпространства $Z \subseteq X$ по направлению к подпространству $Y \subseteq X$* число, определяемое равенством

$$\vartheta(Z, Y) = \sup\{\rho(z, Y) : z \in Z,\ \|z\| = 1\}.$$

Теорема (М. Г. Крейн; М. А. Красносельский; Д. П. Мильман). *Пусть* $Y, Z \subseteq X$ *— подпространства* X, *причем* $\vartheta(Z, Y) < 1$. *Тогда* $\dim Z \leq \dim Y$, *где* $\dim L := \infty$ *для любого пространства* L, *не являющегося конечномерным.*

В качестве другой важной составляющей в доказательстве теоремы 1 используется понятие нестандартной оболочки внутреннего подпространства банахова пространства и внутреннего линейного оператора, действующего на нем. Эти понятия, равно как и другие необходимые факты, касающиеся нестандартного анализа, содержатся в первых трех главах [8] (см. также [9]). Напомним, что нестандартная оболочка внутреннего подпространства $Y \subseteq X$, обозначаемая в дальнейшем через $\overline{Y}$, определяется как фактор-пространство:

$$\overline{Y} := \mathrm{Fin}(Y)/\mu(Y), \quad \|[y]\| := \mathrm{st}(y) \quad ([y] \in \overline{Y}),$$

где $\mathrm{Fin}(Y) := \{y \in Y : \|y\| < \infty\}$ и $\mu(Y) := \{y \in Y : \|y\| \approx 0\}$. Пространство X будет отождествляться со своим образом при каноническом вложении $X \hookrightarrow \overline{X}$. Отметим также, что нестандартная оболочка $\overline{Y}$ является банаховым пространством (см., например, [8, предложение 2.2.1]). Далее, нестандартная оболочка $\overline{T}$ линейного ограниченного оператора T на X определяется следующим образом:

$$\overline{T}[x] := [{}^*Tx] \quad ([x] \in \overline{X}).$$

Ясно, что $\overline{T}$ является линейным ограниченным оператором в $\overline{X}$.

Обратимся к доказательству импликации (iii)$\Rightarrow$(i). При этом без ограничения общности можно считать, что $\|\cdot\| = \|\cdot\|_1$. Фиксируем некоторое гиперконечное $\nu \in {}^*\mathbb{R}_+$, рассмотрим линейный оператор $\overline{T}_\nu : X \to \overline{X}$ и положим $Z := \overline{T}_\nu(X)$. Возьмем вещественные $\alpha < 1$, $\delta > 0$ такие, что

$$(1 + \delta)\alpha < 1, \quad \chi_{\|\cdot\|}(A) < \alpha,$$

и выберем множество $\{a_i\}_{i=1}^p \subseteq X$, удовлетворяющее соотношению

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^p B(a_i, \alpha).$$

Пусть $x = \overline{T}_\nu y \in B_Z$, где $y \in X$. Тогда $\|T_\nu y\| < 1 + \delta/2$. По принципу переноса (см., например, [8, с. 24]) найдется стандартное $\tau \in \mathbb{R}_+$, для которого также верно $\|T_\tau y\| < 1 + \delta/2$. А поскольку

$$\lim_{t\to\infty} \mathrm{dist}\left(T_t T_\tau y, \bigcup_{i=1}^p B(b_i, (1 + \delta/2)\alpha)\right) = 0,$$

где $b_i := (1 + \delta/2)a_i$, найдется $i_x \in \overline{1, p}$, для которого

$$\|x - b_{i_x}\| = \|\overline{T}_\nu y - b_{i_x}\| = \|\overline{T}_{\nu-\tau} T_\tau y - b_{i_x}\| \leq (1 + \delta)\alpha.$$

Следовательно,

$$B_Z \subseteq \bigcup_{i=1}^p B_{\overline{X}}(b_i, (1 + \delta)\alpha)),$$

и раствор подпространства $Z \subseteq \overline{X}$ по направлению к линейной оболочке Y векторов $\{b_i\}_{i=1}^p$ не превосходит $(1+\delta)\alpha < 1$. Теорема Крейна — Красносельского — Мильмана влечет, что $\dim Z < \infty$.

В силу ограниченности полугруппы T, очевидно, выполняется равенство $X_0(T) = \ker \overline{T}_\nu$ и, значит, $\operatorname{codim} X_0(T) = \dim Z < \infty$. Импликация (iii)⇒(i) доказана.

Для доказательства импликации (i)⇒(iv) возьмем некоторое алгебраическое дополнение Y к $X_0(T)$ в X. Пусть $\nu \in {}^*\mathbb{R}_+$ — произвольное гиперконечное число. Рассмотрим оператор $\overline{T}_\nu$. Тогда

$$\overline{T}_t\overline{T}_\nu T_t(X) = \overline{T}_\nu T_t(X) \subseteq \overline{T}_\nu(X) \quad (\forall t \in \mathbb{R}_+).$$

Другими словами, пространство $\overline{T}_\nu(Y) = \overline{T}_\nu(X)$ является $\overline{T}_t$-инвариантным при всех $t \in \mathbb{R}_+$. Пусть $\varepsilon > 0$ и $0 \le \alpha < \infty$ — стандартные вещественные числа. Тогда $\overline{T}_t$-инвариантность пространства $\overline{T}_\nu(Y)$ влечет, что для любых $y \in Y$, $t \in \mathbb{R}_+$, $t \le \alpha$, справедливо неравенство

$$\operatorname{dist}({}^*T_t T_\nu y, T_\nu({}^*Y)) \le \varepsilon \|{}^*T_t T_\nu y\|.$$

Применяя принцип переноса, получаем, что найдется стандартное $\tau \in \mathbb{R}_+$, для которого

$$\operatorname{dist}(T_t T_\tau y, T_\tau(Y)) \le \varepsilon \|T_t T_\tau y\|$$

при всех стандартных $y \in Y$, $t \le \alpha$. Полагая $Z := T_\tau(Y)$, завершаем доказательство импликации (i)⇒(iv).

Пусть теперь полугруппа T слабо почти периодична. Поскольку импликация (v)⇒(i) очевидна, для завершения доказательства теоремы достаточно проверить импликацию (ii)⇒(v).

Без ограничения общности можем считать, что исходная норма совпадает с нормой $\|\cdot\|_{1/3}$, удовлетворяющей условию (ii) при $\varepsilon = 1/3$. Пусть $\nu \in {}^*\mathbb{R}_+$ гиперконечно. Рассмотрим $\overline{T}_\nu$ и обозначим $L := \overline{T}_\nu(X)$. Как установлено выше, L является $\overline{{}^*T_t}$-инвариантным пространством при всех $t \in \mathbb{R}_+$, причем $\dim L = \operatorname{codim} X_0(T)$. В силу слабой почти периодичности T всякий элемент $y \in T_\nu({}^*X)$, $\operatorname{st}(\|y\|) < \infty$, является w-околостандартным (см., например, [8, предложение 2.1.6]). Пусть Z — множество всех w-стандартных частей $\operatorname{st}(x)$ элементов x пространства $T_\nu({}^*X)$. Легко видеть, что Z является линейным T-инвариантным подпространством в X, удовлетворяющим равенству $Z \cap X_0(T) = \{0\}$, и что Z является образом линейного оператора $\theta : L \to X$, действующего по правилу

$$\theta([x]) := w\text{-}\operatorname{st}(x) \quad (\forall x \in \operatorname{Fin} T_\nu({}^*X)).$$

Допустим, что $\dim Z < \dim L$. Тогда найдется $x \in T_\nu({}^*X)$, $\|x\| = 1$, такой, что $\theta([x]) = w\text{-}\operatorname{st}(x) = 0$. Согласно условию (ii) существует $y \in X$, для которого $\|x - y\| < 1/2$. Таким образом,

$$1/2 < \|y\| = \|w\text{-}\operatorname{st}(y)\| \le \|w\text{-}\operatorname{st}(x-y)\| + \|w\text{-}\operatorname{st}(x)\| \le 1/2.$$

Полученное противоречие показывает, что $\dim Z = \dim L = \operatorname{codim} X_0(T)$ и, следовательно, $X = X_0(T) \oplus Z$.

Теорема полностью доказана. □

ЛИТЕРАТУРА

1. *Emel'yanov E. Yu., Wolff M. P. H.* Quasi constricted linear operators on Banach spaces // Studia Math. 2001. V. 144, N 2. P. 169–179.
2. *Emel'yanov E. Yu., Wolff M. P. H.* Quasi constricted linear representations of abelian semigroups on Banach spaces // Math. Nachr. 2002. V. 233–234. P. 103–110.

3. *Ву Куок Фонг* Асимптотическая почти периодичность и компактифицирующие представления полугрупп // Укр. мат. журн. 1986. Т. 38. С. 576–579.

4. *Sine R.* Constricted systems // Rocky Mountain J. Math. 1991. V. 21. P. 1373–1383.

5. *Любич М. Ю.* Введение в теорию банаховых представлений групп. Харьков: Вища шк. Изд-во при Харьк. ун-те, 1985.

6. *Крейн М. Г., Красносельский М. А., Мильман Д. П.* О дефектных числах линейных операторов в банаховом пространстве и о некоторых геометрических вопросах // Сб. тр. ин-та математики АН УССР. 1948. Т. 11. С. 97–112.

7. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Основные положения о дефектных числах, корневых числах и индексах линейных операторов // Успехи мат. наук. 1957. Т. 3, № 1. С. 43–118.

8. *Альбеверио С., Фенстад Й., Хеэг-Крон Р., Линдстрем Т.* Нестандартные методы в стохастическом анализе и математической физике. М.: Мир, 1990.

9. *Henson C. W., Moore L. C. Jr.* Nonstandard analysis and the theory of Banach spaces // Nonstansard Analysis. Recent Developments. Berlin etc.: Springer-Verl., 1983. P. 27–112. (Lecture Notes in Math.; 983).

Статья поступила 24 августа 2002 г.

Емельянов Эдуард Юрьевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
emelanov@math.nsc.ru