Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2003. Том 44, № 6

УДК 517.95

МЕТОД ФИКТИВНЫХ ОБЛАСТЕЙ В ЗАДАЧЕ СИНЬОРИНИ

В. Д. Степанов, А. М. Хлуднев

Аннотация: В работе дается обоснование метода фиктивных областей для эллиптического уравнения с нелинейными краевыми условиями Синьорини. Метод позволяет строить семейство вспомогательных задач, определенных в более широкой области и обладающих тем свойством, что их решения сходятся в подходящем смысле к решению исходной задачи.

Ключевые слова: краевые условия Синьорини, фиктивная область, эллиптическая краевая задача.

Работа посвящена обоснованию метода фиктивных областей для эллиптических краевых задач с нелинейными краевыми условиями. Суть метода состоит в том, что в более широкой области находятся решения семейства вспомогательных краевых задач, сходящиеся к решению исходной задачи. Фактически предлагается несколько эквивалентных формулировок вспомогательных задач, определенных в более широкой области. Первая формулировка соответствует минимуму функционала энергии на множестве всех допустимых перемещений. При этом краевые условия, содержащие компоненты вектора напряжений, являются следствием этой формулировки. Вторая формулировка, которую называют смешанной, предполагает, что на компоненты вектора напряжений налагаются ограничения типа неравенств. Все другие краевые условия являются естественными при такой формулировке и могут быть непосредственно найдены из уравнений и неравенств краевой задачи. Важно отметить, что две указанные формулировки определяют решение в более широкой по сравнению с исходной области, которая содержит разрез (если речь идет о двумерных задачах). Наконец, третья эквивалентная формулировка вспомогательного семейства краевых задач вытекает из первых двух, и при этом решения находятся в гладкой области без разрезов. Ограничения на компоненты вектора напряжений в этом случае налагаются на подмножествах области определения решения. Возникаемые при этом задачи имеют прямую аналогию с контактными задачами теории упругости при наличии ограничений, заданных на множествах малых размерностей.

Важно подчеркнуть, что все краевые задачи, рассматриваемые в работе, включая задачу Синьорини, относятся к классу задач со свободной границей. Это означает, что конкретное краевое условие в данной точке определяется лишь после решения всей задачи в целом.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 03–01–00017, 03–01–00124) и гранта Корейского института передовых технологий и науки (проект GJ00610).

Отметим, что формулировки вспомогательных краевых задач аналогичны формулировкам нелинейных задач теории трещин с краевыми условиями взаимного непроникания берегов, активно разрабатываемых в последнее время [1]. Интересно заметить, что если заменить краевые условия Синьорини в исходной задаче линейными краевыми условиями Неймана, то метод фиктивных областей, предлагаемый в работе, приведет к краевым задачам, аналогичным линейным задачам теории трещин. Как линейные, так и нелинейные задачи теории трещин характеризуются областями с негладкими границами. Качественные свойства решений линейных краевых задач, рассматриваемых в негладких областях, исследовались во многих работах. В этой связи можно отметить [2–4]. Прикладные аспекты теории излагаются в [5–7]. Широкий класс задач теории упругости с ограничениями, заданными на подмножествах области определения решения, представлен в [8]. С методом фиктивных областей в задаче Дирихле можно познакомиться, например, в [9]. Что касается приложений этого метода, то можно обратиться к [10]. Численные проблемы, возникающие при реализации метода фиктивных областей, обсуждаются в [11]. В данной работе мы ограничиваемся рассмотрением двумерного случая фактически лишь для наглядности изложения. Метод с успехом может использоваться и в случае произвольной размерности для задач с краевыми условиями типа неравенств.

1. Задача Синьорини

Пусть $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^2$ — ограниченная односвязная область с гладкой границей Γ_1, $\Gamma_1 = \Gamma_c \cup \Gamma_0$, $\Gamma_c \cap \Gamma_0 = \varnothing$, $\operatorname{meas}\Gamma_0 > 0$. Для простоты предполагаем, что Γ_c — гладкая кривая, не содержащая своих концевых точек. Обозначим через ν вектор внутренней нормали к Γ_1. В области Ω_1 будем решать задачу Синьорини. Именно, требуется найти функцию u такую, что

$$-\operatorname{div}(a\nabla u) = f \quad \text{в } \Omega_1, \tag{1}$$

$$u = 0 \quad \text{на } \Gamma_0, \tag{2}$$

$$u \ge 0, \quad a\frac{\partial u}{\partial \nu} \le 0, \quad u \cdot a\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{на } \Gamma_c. \tag{3}$$

Здесь $a \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$, $f \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$ — заданные функции, $a \ge c_0$, $c_0 = \mathrm{const} > 0$.

Задача (1)–(3) допускает вариационную постановку. Именно, пусть

$$H^1_{\Gamma_0}(\Omega_1) = \{v \in H^1(\Omega_1) \mid v = 0 \text{ на } \Gamma_0\},$$

где $H^1(\Omega_1)$ — пространство Соболева функций, суммируемых с квадратом вместе с первыми производными в Ω_1. Введем в рассмотрение выпуклое замкнутое множество допустимых перемещений

$$K_c = \big\{v \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega_1) \mid v \ge 0 \text{ п. в. на } \Gamma_c\big\}. \tag{4}$$

Тогда задача (1)–(3) эквивалентна минимизации функционала энергии

$$E(v) = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_1} a|\nabla v|^2 - \int\limits_{\Omega_1} fv$$

на множестве K_c и может быть записана в виде следующего вариационного неравенства:

$$u \in K_c, \quad \int\limits_{\Omega_1} a\nabla u(\nabla v - \nabla u) \ge \int\limits_{\Omega_1} f(v-u) \quad \forall v \in K_c. \tag{5}$$

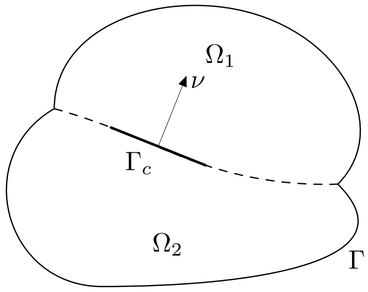

Рис. 1.

Очевидно, вариационное неравенство (5) имеет (единственное) решение, поскольку функционал обладает свойствами коэрцитивности и слабой полунепрерывности снизу. При этом соотношения (1)–(3) допускают точную интерпретацию в терминах соответствующих пространств. Мы не будем здесь на этом останавливаться, так как в дальнейшем необходимые пояснения будут даны в более сложной ситуации.

2. Вспомогательные задачи в области с разрезом

Оказывается, задачу (5) можно рассматривать как предельную для некоторого семейства вспомогательных задач с параметром, определенных в более широкой по сравнению с Ω_1 области. Ниже проводятся соответствующие построения и формулируется семейство вспомогательных задач. Расширим область Ω_1 до области Ω_c, добавляя фиктивную область Ω_2 так, как указано на рис. 1. Пусть Γ_2 — граница области Ω_2, которую будем считать достаточно гладкой. Внешнюю границу к области Ω_c обозначим через Γ, т. е. $\Gamma = \partial\Omega_c \setminus \left(\Gamma_c^+ \cup \Gamma_c^-\right)$, где берега $\Gamma_c^\pm$ определяются по отношению к нормали ν. Пусть $\Sigma_0 = \Gamma_1 \cap \Gamma_2$, $\Sigma = \Sigma_0 \setminus \Gamma$. Тогда $\Omega_c = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup (\Sigma \setminus \overline{\Gamma}_c)$. Таким образом, область Ω_c содержит разрез $\overline{\Gamma}_c$.

Положим

$$a^\varepsilon = \begin{cases} a & \text{в } \Omega_1, \\ a\varepsilon^{-1} & \text{в } \Omega_2, \end{cases}$$

где ε — положительный параметр, который впоследствии будет стремиться к нулю. В области Ω_c будем решать следующую задачу. Найти функцию u^ε такую, что

$$-\operatorname{div}(a^\varepsilon \nabla u^\varepsilon) = f \quad \text{в } \Omega_c, \tag{6}$$

$$u^\varepsilon = 0 \quad \text{на } \Gamma, \tag{7}$$

$$[u^\varepsilon] \ge 0, \quad \left[a^\varepsilon \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \nu}\right] = 0, \quad a^\varepsilon \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \nu} \le 0, \quad [u^\varepsilon] \cdot a^\varepsilon \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \nu} = 0 \quad \text{на } \Gamma_c. \tag{8}$$

Здесь и ниже $[v] = v^+ - v^-$ — скачок функции v на Γ_c, где $v^\pm$ определяются на $\Gamma_c^\pm$ в соответствии с выбранным направлением нормали ν на Γ_c. Для каждого $\varepsilon > 0$ задача (6)–(8) имеет единственное решение и допускает вариационную формулировку. Именно, пусть

$$H^1_\Gamma(\Omega_c) = \{v \in H^1(\Omega_c) \mid v = 0 \text{ на } \Gamma\},$$

$$K = \left\{v \in H^1_\Gamma(\Omega_c) \mid [v] \ge 0 \text{ п. в. на } \Gamma_c\right\}.$$

Тогда задача (6)–(8) соответствует минимуму функционала

$$E_\varepsilon(v) = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_c} a^\varepsilon |\nabla v|^2 - \int\limits_{\Omega_c} fv$$

на множестве K и может быть записана в виде вариационного неравенства

$$u^\varepsilon \in K, \quad \int\limits_{\Omega_c} a^\varepsilon \nabla u^\varepsilon (\nabla v - \nabla u^\varepsilon) \geq \int\limits_{\Omega_c} f(v - u^\varepsilon) \quad \forall v \in K. \tag{9}$$

Здесь следует заметить, что граница Γ может быть и негладкой в точках $\Sigma_0 \setminus \Sigma$. Тем не менее неравенство Пуанкаре справедливо для всех функций из пространства $H^1_\Gamma(\Omega_c)$, что обеспечивает коэрцитивность (и, как следствие, слабую полунепрерывность снизу) функционала $E_\varepsilon(v)$ на $H^1_\Gamma(\Omega_c)$. Таким образом, при каждом фиксированном $\varepsilon > 0$ мы можем найти из (9) решение задачи (6)–(8). Отметим, что это решение определено в более широкой области по сравнению с Ω_1 и, более того, при $\varepsilon \to 0$ найдется $u \in H^1_\Gamma(\Omega_c)$ такая, что

$$\begin{gathered} u^\varepsilon \to u \text{ слабо в } H^1_\Gamma(\Omega_c), \quad u^\varepsilon \to 0 \text{ сильно в } H^1(\Omega_2), \\ u^\varepsilon \to u \text{ сильно в } H^1(\Omega_1). \end{gathered} \tag{10}$$

Как оказывается, сужение предельной функции u из (10) на область Ω_1 есть решение задачи Синьорини (1)–(3). Следовательно, задачу Синьорини (1)–(3) в определенном смысле можно рассматривать как предельную для семейства задач (6)–(8).

Цель следующих ниже рассуждений — исследование решений задачи (9) и, в частности, обоснование сходимости (10).

Подставляя $v = 0$, $v = 2u^\varepsilon$ в (9) в качестве тестовых функций, находим

$$\int\limits_{\Omega_c} a^\varepsilon |\nabla u^\varepsilon|^2 = \int\limits_{\Omega_c} fu^\varepsilon. \tag{11}$$

Отсюда следует, что

$$\int\limits_{\Omega_1} a|\nabla u^\varepsilon|^2 + \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\Omega_2} a|\nabla u^\varepsilon|^2 = \int\limits_{\Omega_1} fu^\varepsilon + \int\limits_{\Omega_2} fu^\varepsilon. \tag{12}$$

Справедливы неравенства Пуанкаре с постоянными $c_i > 0$,

$$\int\limits_{\Omega_i} |\nabla v|^2 \geq c_i \int\limits_{\Omega_i} v^2 \quad \forall v \in H^1(\Omega_i), \quad v = 0 \text{ на } \Gamma \cap \Gamma_i, \quad i = 1, 2.$$

В данном случае мы предполагаем, что $\mathrm{meas}(\Gamma \cap \Gamma_1) > 0$ (см. рис. 1; по поводу других возможных способов выбора фиктивной области Ω_2 см. заключительный раздел работы). Следовательно, из (12) вытекает оценка

$$\|u^\varepsilon\|^2_{H^1(\Omega_1)} + \frac{1}{\varepsilon}\|u^\varepsilon\|^2_{H^1(\Omega_2)} \leq c_3.$$

Постоянная c_3 зависит от констант из упомянутых неравенств Пуанкаре, $\|f\|_{L^2(\Omega_c)}$, c_0 и ε. Можно считать, что c_3 ограничена равномерно по ε при $\varepsilon \leq \varepsilon_0$. Таким образом, имеют место оценки

$$\|u^\varepsilon\|^2_{H^1(\Omega_1)} \leq c_4, \quad \|u^\varepsilon\|^2_{H^1(\Omega_2)} \leq c_5\varepsilon \tag{13}$$

с постоянными c_4, c_5, не зависящими от ε. В силу (11) с учетом неравенства $a^\varepsilon \geq c_0 > 0$, справедливого при малых ε, можно также предполагать, что имеет место равномерная по ε оценка

$$\|u^\varepsilon\|^2_{H^1_\Gamma(\Omega_c)} \leq c. \tag{14}$$

Выбирая подпоследовательность, для которой будем сохранять прежнее обозначение, считаем, что при $\varepsilon \to 0$

$$u^\varepsilon \to u \quad \text{слабо в } H^1_\Gamma(\Omega_c). \tag{15}$$

Согласно (13) имеем также сходимость

$$u^\varepsilon \to 0 \quad \text{сильно в } H^1(\Omega_2). \tag{16}$$

В частности, предельная функция u равна нулю на $\Sigma \setminus \Gamma_c$.

Теперь осуществим переход к пределу в вариационном неравенстве (9). Выберем $v \in K$ таким образом, чтобы $v \equiv 0$ в Ω_2 (при этом $v \geq 0$ на Γ_c^+) и подставим эту функцию в (9). Получим

$$\int\limits_{\Omega_1} a\nabla u^\varepsilon \nabla v \geq \int\limits_{\Omega_1} a|\nabla u^\varepsilon|^2 + \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\Omega_2} a|\nabla u^\varepsilon|^2 - \int\limits_{\Omega_2} fu^\varepsilon + \int\limits_{\Omega_1} f(v - u^\varepsilon). \tag{17}$$

Переходя к нижнему пределу в обеих частях (17) с учетом (15), (16), будем иметь

$$\int\limits_{\Omega_1} a\nabla u \nabla v \geq \int\limits_{\Omega_1} a|\nabla u|^2 + \int\limits_{\Omega_1} f(v - u). \tag{18}$$

Здесь мы принимаем во внимание очевидное неравенство

$$\liminf_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\Omega_2} a|\nabla u^\varepsilon|^2 \geq 0.$$

Поскольку $u^\varepsilon \in K$, заключаем, что ограничение предельной функции u на область Ω_1 принадлежит множеству K_c, где K_c определено в (4). Таким образом, соотношение (18) может быть записано в виде вариационного неравенства

$$\int\limits_{\Omega_1} a\nabla u(\nabla v - \nabla u) \geq \int\limits_{\Omega_1} f(v - u) \quad \forall v \in K_c,$$

в точности совпадающего с (5). Это и означает, что сужение предельной функции u на область Ω_1 является решением задачи Синьорини (1)–(3).

Оказывается, при $\varepsilon \to 0$ имеет место сходимость

$$\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\Omega_2} a|\nabla u^\varepsilon|^2 \to 0. \tag{19}$$

В самом деле, из (12) следует, что

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\Omega_2} a|\nabla u^\varepsilon|^2 = \limsup_{\varepsilon\to 0}\left\{\int\limits_{\Omega_1} fu^\varepsilon + \int\limits_{\Omega_2} fu^\varepsilon - \int\limits_{\Omega_1} a|\nabla u^\varepsilon|^2\right\}$$

$$\leq \limsup_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\Omega_1} fu^\varepsilon + \limsup_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\Omega_2} fu^\varepsilon + \limsup_{\varepsilon\to 0}\left\{-\int\limits_{\Omega_1} a|\nabla u^\varepsilon|^2\right\} \leq \int\limits_{\Omega_1} fu - \int\limits_{\Omega_1} a|\nabla u|^2.$$

Однако из (5) вытекает равенство

$$\int\limits_{\Omega_1} fu = \int\limits_{\Omega_1} a|\nabla u|^2.$$

Следовательно, из предыдущего имеем соотношения

$$0 \le \liminf_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\Omega_2} a|\nabla u^\varepsilon|^2 \le \limsup_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\Omega_2} a|\nabla u^\varepsilon|^2 \le 0.$$

Это и доказывает справедливость (19). Таким образом, согласно (19) сходимость (16) можно уточнить, а именно при $\varepsilon \to 0$

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} u^\varepsilon \to 0 \quad \text{сильно в } H^1(\Omega_2). \tag{20}$$

Теперь докажем более сильную по сравнению с (15) сходимость u^ε в области Ω_1. Именно, мы покажем, что при $\varepsilon \to 0$

$$u^\varepsilon \to u \quad \text{сильно в } H^1(\Omega_1). \tag{21}$$

Поскольку слабая сходимость u^ε к u в $H^1(\Omega_1)$ уже установлена, то для доказательства (21) достаточно показать, что

$$\int\limits_{\Omega_1} a|\nabla u^\varepsilon|^2 \to \int\limits_{\Omega_1} a|\nabla u|^2. \tag{22}$$

Из (12) имеем равенство

$$\int\limits_{\Omega_1} a|\nabla u^\varepsilon|^2 = \int\limits_{\Omega_2} fu^\varepsilon + \int\limits_{\Omega_1} fu^\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\Omega_2} a|\nabla u^\varepsilon|^2.$$

Согласно (15), (19) правая часть здесь имеет предел, равный $\int\limits_{\Omega_1} fu$, поэтому

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\Omega_1} a|\nabla u^\varepsilon|^2 = \int\limits_{\Omega_1} fu.$$

В то же время, как мы знаем, справедливо равенство

$$\int\limits_{\Omega_1} fu = \int\limits_{\Omega_1} a|\nabla u|^2,$$

что и доказывает сходимость (22). Как уже отмечалось, из (22) следует (21).

Вернемся теперь к дифференциальной постановке задачи (9), т. е. к краевой задаче (6)–(8), и дадим точную интерпретацию краевых условий на Γ_c. Прежде всего отметим, что из (9) вытекает справедливость уравнения (6) в смысле обобщенных функций. В частности,

$$-\operatorname{div}(a\nabla u^\varepsilon) = f \quad \text{в } \Omega_1, \quad -\operatorname{div}\left(\frac{a}{\varepsilon}\nabla u^\varepsilon\right) = f \quad \text{в } \Omega_2. \tag{23}$$

Возьмем $\varphi \in H_0^1(\Omega)$, где $\Omega = \Omega_c \cup \overline{\Gamma}_c$, а

$$H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) \mid v = 0 \text{ на } \Gamma\}.$$

Тогда $v = u^\varepsilon \pm \varphi \in K$ и после подстановки v в (9) в качестве пробной функции получим

$$\int\limits_{\Omega_c} a^\varepsilon \nabla u^\varepsilon \nabla \varphi = \int\limits_{\Omega_c} f\varphi.$$

Из этого соотношения следует равенство

$$\int\limits_{\Omega_1} a\nabla u^\varepsilon \nabla\varphi + \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\Omega_2} a\nabla u^\varepsilon\nabla\varphi = \int\limits_{\Omega_1} f\varphi + \int\limits_{\Omega_2} f\varphi. \tag{24}$$

Воспользуемся известной формулой Грина для областей Ω_1, Ω_2 с липшицевыми границами Γ_1, Γ_2 (см. [12]):

$$-\int\limits_{\Omega_i} v\cdot \operatorname{div}(a^\varepsilon\nabla w) = \int\limits_{\Omega_i} a^\varepsilon \nabla w\nabla v - \left\langle a^\varepsilon \frac{\partial w}{\partial n}, v\right\rangle_{1/2,\Gamma_i}, \quad i = 1,2, \tag{25}$$

справедливой для всех $w \in H^1(\Omega_i)$, $\operatorname{div}(a^\varepsilon\nabla w) \in L^2(\Omega_i)$, $v \in H^1(\Omega_i)$, где n — внешняя нормаль к Γ_i, а скобки $\langle\cdot,\cdot\rangle_{1/2,\Gamma_i}$ обозначают двойственность между сопряженными пространствами $H^{-1/2}(\Gamma_i)$ и $H^{1/2}(\Gamma_i)$. При этом $a^\varepsilon\frac{\partial w}{\partial n} \in H^{-1/2}(\Gamma_i)$. Добавим, что через $H^{1/2}(\Gamma_i)$, $i = 1,2$, обозначены пространства функций с нормами

$$\|v\|^2_{1/2,\Gamma_i} = \|v\|^2_{L^2(\Gamma_i)} + \int\limits_{\Gamma_i}\int\limits_{\Gamma_i} \frac{|v(x)-v(y)|^2}{|x-y|^2}\,dxdy.$$

Введем также пространство функций $H^{1/2}_{00}(\Sigma)$ с нормой

$$\|v\|^{00}_{1/2,\Sigma} = \left(\|v\|^2_{1/2,\Sigma} + \int\limits_\Sigma \frac{v^2}{\rho}\right)^{1/2},$$

где $\rho(x) = \operatorname{dist}(x,\partial\Sigma)$. Через $H^{-1/2}_{00}(\Sigma)$ будем обозначать пространство, сопряженное к $H^{1/2}_{00}(\Sigma)$. Для функции v, заданной на Σ, обозначим через $\bar v$ ее продолжение нулем вне Σ, т. е.

$$\bar v = \begin{cases} v & \text{на } \Sigma,\\ 0 & \text{на } \Gamma_i\setminus\Sigma, \quad i = 1,2.\end{cases}$$

В этом случае $\bar v \in H^{1/2}(\Gamma_i)$ тогда и только тогда когда $v \in H^{1/2}_{00}(\Sigma)$ (см. [1]). Отметим также, что если $v \in H^{-1/2}(\Gamma_i)$, то можно считать $v \in H^{-1/2}_{00}(\Sigma)$. Итак, из уравнений (24) с учетом формул Грина (25) и уравнений (23) получаем

$$-\left\langle a\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial\nu}, \varphi\right\rangle_{1/2,\Gamma_1} + \left\langle \frac{a}{\varepsilon}\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \nu},\varphi\right\rangle_{1/2,\Gamma_2} = 0.$$

В данном соотношении нормаль ν определена на границах Γ_1, Γ_2. Предполагается, что на границе Γ_2 эта нормаль выбирается таким образом, чтобы на Γ_c она совпадала с ранее выбранной. Заметим, что $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma_i)$, $i = 1,2$. Так как $\varphi = 0$ на $\Gamma\cap\Gamma_1$ и $\Gamma\cap\Gamma_2$, то $\varphi \in H^{1/2}_{00}(\Sigma)$. Тогда предыдущее соотношение можно переписать в виде

$$\left\langle \left(\frac{a}{\varepsilon}\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial\nu}\right)^- - \left(a\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \nu}\right)^+, \varphi\right\rangle^{00}_{1/2,\Sigma} = 0, \tag{26}$$

где скобки $\langle\cdot,\cdot\rangle_{1/2,\Sigma}^{00}$ обозначают двойственность между пространствами $H_{00}^{-1/2}(\Sigma)$ и $H_{00}^{1/2}(\Sigma)$. Заметим, что в (26) в качестве φ можно выбирать любой элемент из пространства $H_{00}^{1/2}(\Sigma)$. Действительно, пусть $\varphi \in H_{00}^{1/2}(\Sigma)$ — произвольная функция. Продолжим ее нулем на границы Γ_1, Γ_2. Получим функции на Γ_1 и Γ_2 из пространств $H^{1/2}(\Gamma_1)$, $H^{1/2}(\Gamma_2)$ соответственно. Их, в свою очередь, можно продолжить в области Ω_1, Ω_2 как функции из пространств $H^1(\Omega_1)$, $H^1(\Omega_2)$. В результате в области Ω построена функция из пространства $H_0^1(\Omega)$ такая, что ее значение на Σ совпадает с выбранной выше функцией $\varphi \in H_{00}^{1/2}(\Sigma)$, что и требовалось. Итак, (26) выполняется для всех $\varphi \in H_{00}^{1/2}(\Sigma)$. Это означает, что

$$\left(\frac{a}{\varepsilon}\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \nu}\right)^- = \left(a\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \nu}\right)^+ \tag{27}$$

в смысле элементов из пространства $H_{00}^{-1/2}(\Sigma)$. Отсюда следует, что (27) выполнено и в смысле элементов из пространства $H_{00}^{-1/2}(\Gamma_c)$. Полагая $a^\varepsilon \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \nu} = \left(\frac{a}{\varepsilon}\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \nu}\right)^-$, получим точную интерпретацию второго условия (8).

Далее, выясним, в каком смысле понимается третье условие (8). Пусть $\varphi \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_c)$, $\varphi \geq 0$. Продолжая эту функцию нулем на границу Γ_1, а затем продолжая полученную функцию в область Ω_1 как функцию из пространства $H^1(\Omega_1)$, найдем функцию $\Phi \in H^1(\Omega_1)$ такую, что след Φ на Γ_c совпадает с φ. Введем обозначение

$$\tilde{v} = \begin{cases} \Phi & \text{в } \Omega_1, \\ 0 & \text{в } \Omega_2. \end{cases}$$

Тогда $\tilde{v} \in K$. Возьмем $v = u^\varepsilon + \tilde{v}$ в качестве пробной функции в неравенстве (9). Получим соотношение

$$\int\limits_{\Omega_1} a\nabla u^\varepsilon \nabla \tilde{v} + \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\Omega_2} a\nabla u^\varepsilon \nabla \tilde{v} \geq \int\limits_{\Omega_1} f\tilde{v} + \int\limits_{\Omega_2} f\tilde{v}.$$

Интегралы по Ω_2 здесь обращаются в нуль в силу выбора функции $\tilde{v}$. Снова применяя формулу Грина вида (25), с учетом (23) найдем

$$\left\langle a\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \nu}, \varphi\right\rangle_{1/2,\Gamma_1} \leq 0 \quad \forall\varphi \in H^{1/2}(\Gamma_1), \quad \varphi \geq 0,\ \varphi = 0 \text{ на } \Gamma_1 \setminus \Gamma_c.$$

Это неравенство означает, что

$$\left(a\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \nu}\right)^+ \leq 0$$

в смысле функций из пространства $H_{00}^{-1/2}(\Gamma_c)$. Таким образом, ввиду (27) точная интерпретация третьего условия (8) имеет вид

$$\left\langle a^\varepsilon\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \nu}, \varphi\right\rangle_{1/2,\Gamma_c}^{00} \leq 0 \quad \forall\varphi \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_c), \quad \varphi \geq 0. \tag{28}$$

Наконец, дадим точную интерпретацию последнего условия (8). Вернемся к (12) и в силу (23), (25) осуществим интегрирование по частям. Получим

$$-\left\langle a\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \nu}, u^\varepsilon\right\rangle_{1/2,\Gamma_1} + \left\langle \frac{a}{\varepsilon}\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \nu}, u^\varepsilon\right\rangle_{1/2,\Gamma_2} = 0.$$

Из этого соотношения следует равенство

$$-\left\langle \left(a\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \nu}\right)^+, (u^\varepsilon)^+ \right\rangle_{1/2,\Sigma}^{00} + \left\langle \left(\frac{a}{\varepsilon}\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \nu}\right)^-, (u^\varepsilon)^- \right\rangle_{1/2,\Sigma}^{00} = 0.$$

В силу (27) его можно переписать в виде

$$\left\langle a^\varepsilon \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \nu}, [u^\varepsilon] \right\rangle_{1/2,\Sigma}^{00} = 0,$$

откуда, в частности, будем иметь

$$\left\langle a^\varepsilon \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \nu}, [u^\varepsilon] \right\rangle_{1/2,\Gamma_c}^{00} = 0. \tag{29}$$

Здесь мы используем очевидное равенство $[u^\varepsilon] = 0$ на $\Sigma \setminus \overline{\Gamma}_c$. Соотношение (29) дает точную интерпретацию последнего краевого условия (8).

3. Вспомогательные задачи в гладкой области

В этом разделе мы приведем эквивалентную формулировку краевой задачи (6)–(8), при которой решение будет определено в гладкой области Ω, не содержащей разрезов. Напомним, что $\Omega = \Omega_c \cup \overline{\Gamma}_c$. Фактически на первом этапе мы дадим еще одну эквивалентную формулировку задачи (6)–(8), которая по современной терминологии будет называться смешанной [13]. Решение при этом будет определяться в области с разрезом в более широком пространстве функций. Таким образом, метод фиктивных областей будет допускать три эквивалентные формулировки, относящиеся как к области Ω_c, так и области Ω.

Введем пространство функций

$$M_c = \{p = (p_1, p_2) \mid p \in L^2(\Omega_c), \operatorname{div} p \in L^2(\Omega_c)\}$$

с нормой

$$\|p\|_{M_c}^2 = \|p\|_{L^2(\Omega_c)}^2 + \|\operatorname{div} p\|_{L^2(\Omega_c)}^2$$

и определим выпуклое множество допустимых векторов напряжений

$$N_c = \left\{p \in M_c \mid [p\nu] = 0 \text{ на } \Gamma_c;\ p\nu \le 0 \text{ на } \Gamma_c^\pm\right\}.$$

Формулу Грина (25) при $\theta = a^\varepsilon \nabla w$ можно переписать в виде

$$-\int\limits_{\Omega_i} \operatorname{div} \theta \cdot v = \int\limits_{\Omega_i} \theta \cdot \nabla v - \langle \theta n, v\rangle_{1/2,\Gamma_i}, \quad i = 1, 2,$$

причем она будет справедлива для всех θ, $\operatorname{div}\theta \in L^2(\Omega_i)$, $v \in H^1(\Omega_i)$, при этом $\theta n \in H^{-1/2}(\Gamma_i)$, $i = 1, 2$. В частности, для функций $p \in M_c$ можно определить значения $p\nu$ на Γ_i как элементы пространства $H^{-1/2}(\Gamma_i)$. Тогда $p\nu = (p\nu)^\pm \in H_{00}^{-1/2}(\Sigma)$. Здесь функционал $(p\nu)^+$ получается как ограничение функционала $p\nu \in H^{-1/2}(\Gamma_1)$ на Σ, а $(p\nu)^-$ — как ограничение функционала $p\nu \in H^{-1/2}(\Gamma_2)$ на Σ. Граничные условия $[p\nu] = 0$ на Γ_c, $p\nu \le 0$ на $\Gamma_c^\pm$ в определении множества N_c понимаются следующим образом:

$$(p\nu)^+ = (p\nu)^- \quad \text{в смысле } H_{00}^{-1/2}(\Sigma), \tag{30}$$

$$p\nu = (p\nu)^{\pm} \leq 0 \quad \text{в смысле } H_{00}^{-1/2}(\Gamma_c). \tag{31}$$

Введем обозначение

$$b^{\varepsilon} = (a^{\varepsilon})^{-1} = \begin{cases} a^{-1} & \text{в } \Omega_1, \\ \varepsilon a^{-1} & \text{в } \Omega_2. \end{cases}$$

Теперь мы в состоянии привести так называемую смешанную формулировку краевой задачи (6)–(8). Пусть $p^{\varepsilon} = a^{\varepsilon}\nabla u^{\varepsilon}$. Тогда задачу (6)–(8) можно переписать в следующем виде:

$$-\operatorname{div} p^{\varepsilon} = f \quad \text{в } \Omega_c, \tag{32}$$

$$b^{\varepsilon} p^{\varepsilon} = \nabla u^{\varepsilon} \quad \text{в } \Omega_c, \tag{33}$$

$$u^{\varepsilon} = 0 \quad \text{на } \Gamma, \tag{34}$$

$$[u^{\varepsilon}] \geq 0,\ [p^{\varepsilon}\nu] = 0,\ p^{\varepsilon}\nu \leq 0,\ [u^{\varepsilon}] \cdot p^{\varepsilon}\nu = 0 \quad \text{на } \Gamma_c. \tag{35}$$

Задача (32)–(35) допускает формулировку в виде вариационного неравенства. При этом в отличие от формулировки (9) ограничения типа неравенства на границе будут налагаться лишь на p^{ε}. В этом случае краевые условия, содержащие u^{ε}, будут являться следствием указанного вариационного неравенства. А именно, требуется найти функции u^{ε}, $p^{\varepsilon} = \left(p_1^{\varepsilon}, p_2^{\varepsilon}\right)$ такие, что

$$u^{\varepsilon} \in L^2(\Omega_c), \quad p^{\varepsilon} \in N_c, \tag{36}$$

$$-\operatorname{div} p^{\varepsilon} = f \quad \text{в } \Omega_c, \tag{37}$$

$$\int\limits_{\Omega_c} b^{\varepsilon} p^{\varepsilon}(\bar{p} - p^{\varepsilon}) + \int\limits_{\Omega_c} u^{\varepsilon}(\operatorname{div}\bar{p} - \operatorname{div} p^{\varepsilon}) \geq 0 \quad \forall \bar{p} \in N_c. \tag{38}$$

Формулировки (32)–(35) и (36)–(38) являются формально эквивалентными. Из (38) немедленно вытекает (33), если выбрать $\bar{p} = p^{\varepsilon} \pm \tilde{p}$, $\tilde{p} \in C_0^{\infty}(\Omega_c)$. Краевые условия для u^{ε} получим из (37)–(38) после применения формулы Грина вида

$$\int\limits_{\Omega_c} w \cdot \operatorname{div}\tilde{p} = -\int\limits_{\Omega_c} \nabla w \cdot \tilde{p} + \int\limits_{\Gamma} w \cdot \tilde{p}n + \int\limits_{\Gamma_c^-} w \cdot \tilde{p}\nu - \int\limits_{\Gamma_c^+} w \cdot \tilde{p}\nu. \tag{39}$$

Здесь n — внешняя нормаль к Γ. С другой стороны, соотношения (36)–(38) следуют из (32)–(35) после умножения (33) на $\bar{p} - p^{\varepsilon}$ и интегрирования по Ω_c с использованием формулы Грина вида (39).

Можно доказать, что существует решение задачи (36)–(38) при каждом фиксированном $\varepsilon > 0$. Сделать это можно, например, с помощью рассмотрения регуляризованной задачи с положительным параметром δ, получения априорных оценок, равномерных по δ, и перехода к пределу при $\delta \to 0$. Регуляризованная задача отличается от (36)–(38) тем, что уравнение (37) заменяется на

$$\delta u^{\varepsilon} - \operatorname{div} p^{\varepsilon} = f \quad \text{в } \Omega_c. \tag{40}$$

Мы опустим подробности, отсылая читателя к [14], где можно найти соответствующие рассуждения в близкой ситуации.

Заметим теперь, что, в силу (37) и краевого условия $[p^{\varepsilon}\nu] = 0$ на Γ_c, выполненного в смысле (30), уравнение (37) будет выполнено в смысле обобщенных функций и в гладкой области Ω. Действительно, во-первых, заметим, что согласно (37) справедливы уравнения

$$-\operatorname{div} p^{\varepsilon} = f \quad \text{в } \Omega_i, \quad i = 1, 2.$$

Доопределяя произвольным образом функцию p^ε на Γ_c, рассмотрим распределение $\operatorname{div} p^\varepsilon + f$ в Ω. Скобками $\langle \cdot, \varphi \rangle$ будем обозначать действие распределения на элементе $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Итак, пусть $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ — произвольная функция. Имеем

$$\langle \operatorname{div} p^\varepsilon + f, \varphi \rangle = -\int\limits_{\Omega_1} p^\varepsilon \nabla \varphi - \int\limits_{\Omega_2} p^\varepsilon \nabla \varphi + \int\limits_{\Omega} f\varphi$$
$$= \langle [p^\varepsilon \nu], \varphi \rangle^{00}_{1/2,\Sigma} + \int\limits_{\Omega_1} (\operatorname{div} p^\varepsilon + f)\varphi + \int\limits_{\Omega_2} (\operatorname{div} p^\varepsilon + f)\varphi = 0,$$

что и требовалось.

Теперь мы можем сформулировать задачу (36)–(38) в эквивалентном виде, при котором решение ищется в гладкой области Ω. Введем обозначения

$$\mathscr{M} = \{p = (p_1, p_2) \mid p \in L^2(\Omega),\ \operatorname{div} p \in L^2(\Omega)\},$$
$$\mathscr{N}_c = \{p \in \mathscr{M} \mid p\nu \le 0 \text{ на } \Gamma_c\}.$$

Норма в пространстве $\mathscr{M}$ определена формулой

$$\|p\|^2_{\mathscr{M}} = \|p\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\operatorname{div} p\|^2_{L^2(\Omega)},$$

а краевое условие в определении множества $\mathscr{N}_c$ понимается следующим образом:

$$p\nu \in H_{00}^{-1/2}(\Gamma_c), \quad \langle p\nu, \varphi \rangle^{00}_{1/2,\Gamma_c} \le 0 \ \forall \varphi \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_c), \quad \varphi \ge 0.$$

Итак, задачу (36)–(38) можно записать в таком виде. Найти функции u^ε, $p^\varepsilon = \big(p_1^\varepsilon, p_2^\varepsilon\big)$ такие, что

$$u^\varepsilon \in L^2(\Omega), \quad p^\varepsilon \in \mathscr{N}_c, \tag{41}$$
$$-\operatorname{div} p^\varepsilon = f \quad \text{в } \Omega, \tag{42}$$
$$\int\limits_{\Omega} b^\varepsilon p^\varepsilon (\bar{p} - p^\varepsilon) + \int\limits_{\Omega} u^\varepsilon (\operatorname{div} \bar{p} - \operatorname{div} p^\varepsilon) \ge 0 \quad \forall \bar{p} \in \mathscr{N}_c. \tag{43}$$

Разрешимость краевой задачи (41)–(43) можно доказать так же, как и разрешимость задачи (36)–(38) с помощью регуляризации вида (40).

Таким образом, в гладкой области Ω построена краевая задача (41)–(43), которую можно рассматривать как аппроксимацию задачи Синьорини (1)–(3), заданной в области Ω_1, $\Omega_1 \subset \Omega$.

Как и в случае задачи (6)–(8), можно показать, что решение u^ε, p^ε задачи (41)–(43) будет сходиться в подходящем смысле к решению задачи Синьорини. Обоснуем это утверждение. Выберем произвольную функцию $\tilde{p}$ такую, что

$$\tilde{p} \in \mathscr{N}_c, \quad -\operatorname{div} \tilde{p} = f \quad \text{в } \Omega.$$

Умножим (42) на u^ε и проинтегрируем по Ω. Одновременно выберем $\bar{p} = \tilde{p}$ в (43). После сложения полученных таким образом соотношений найдем

$$\int\limits_{\Omega} b^\varepsilon p^\varepsilon \cdot p^\varepsilon \le \int\limits_{\Omega} b^\varepsilon p^\varepsilon \cdot \tilde{p},$$

откуда следует равномерная по ε оценка

$$\|\sqrt{b^\varepsilon} p^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \le c. \tag{44}$$

В то же время, выбирая $\bar{p} = p^\varepsilon \pm \tilde{p}$, $\tilde{p} \in C_0^\infty(\Omega_c)$, из (43) получаем, что в смысле распределений выполнено соотношение

$$b^\varepsilon p^\varepsilon = \nabla u^\varepsilon \quad \text{в } \Omega_c. \tag{45}$$

Так как $u^\varepsilon \in L^2(\Omega)$, из (44), (45) заключаем, что $u^\varepsilon \in H^1(\Omega_c)$. С другой стороны, из (43) вытекает равенство

$$u^\varepsilon = 0 \quad \text{на } \Gamma,$$

что, в свою очередь, из (44), (45) с учетом неравенства Пуанкаре влечет оценку

$$\|u^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_c)} \le c \tag{46}$$

с постоянной c, не зависящей от ε. Более того, из (45) получаем соотношение

$$\varepsilon a^{-1} p^\varepsilon = \nabla u^\varepsilon \quad \text{в } \Omega_2, \tag{47}$$

так что согласно (44), (46), (47) можно считать, что при $\varepsilon \to 0$

$$\begin{gathered} u^\varepsilon \to u \text{ сильно в } L^2(\Omega_c), \text{ слабо в } H^1(\Omega_c), \\ u^\varepsilon \to 0 \quad \text{сильно в } H^1(\Omega_2), \\ p^\varepsilon \to p \quad \text{слабо в } L^2(\Omega_1), \\ \varepsilon p^\varepsilon \to 0 \quad \text{сильно в } L^2(\Omega_2). \end{gathered} \tag{48}$$

На основе (48) перейдем к пределу при $\varepsilon \to 0$ в (41)–(43) с выбранной фиксированной функцией $\bar{p} \in \mathscr{N}_c$ такой, что $\bar{p} \equiv 0$ в Ω_2. Получим

$$u \in L^2(\Omega_1), \quad p \in Z, \tag{49}$$

$$-\operatorname{div} p = f \quad \text{в } \Omega_1, \tag{50}$$

$$\int\limits_{\Omega_1} a^{-1} p(\bar{p} - p) + \int\limits_{\Omega_1} u(\operatorname{div} \bar{p} - \operatorname{div} p) \ge 0 \quad \forall \bar{p} \in Z. \tag{51}$$

Здесь

$$Z = \{p = (p_1, p_2) \mid p,\ \operatorname{div} p \in L^2(\Omega_1),\ p\nu \le 0 \text{ на } \Gamma_c\}. \tag{52}$$

Таким образом, задача (49)–(51) является предельной для (41)–(43). В то же время задача (49)–(51) в точности соответствует смешанной формулировке краевой задачи Синьорини. Действительно, обозначив $p = a\nabla u$, перепишем (1)–(3) в следующем виде:

$$-\operatorname{div} p = f \quad \text{в } \Omega_1, \tag{53}$$

$$a^{-1} p = \nabla u \quad \text{в } \Omega_1, \tag{54}$$

$$u = 0 \quad \text{на } \Gamma_0, \tag{55}$$

$$u \ge 0, \quad p\nu \le 0, \quad u \cdot p\nu = 0 \quad \text{на } \Gamma_c. \tag{56}$$

Выбирая $\bar{p} \in Z$ и умножая (54) на $\bar{p} - p$ с последующим интегрированием по Ω_1, с учетом (55)–(56) получим в точности (51).

Отметим также, что аналогично задаче (41)–(43) в (36)–(38) также можно осуществить предельный переход при $\varepsilon \to 0$. Предельная задача по-прежнему будет совпадать с (49)–(51).

Замечание. Не останавливаясь на деталях, приведем формулы для случая, когда на Γ_c вместо нелинейных краевых условий (3) рассматривается линейное краевое условие Неймана. Это означает, что вместо задачи Синьорини (1)–(3) мы решаем линейную задачу со смешанными краевыми условиями

$$-\operatorname{div}(a\nabla u) = f \quad \text{в } \Omega_1, \tag{57}$$

$$u = 0 \quad \text{на } \Gamma_0, \tag{58}$$

$$a\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{на } \Gamma_c. \tag{59}$$

В этом случае вместо задачи (6)–(8) в расширенной области Ω_c с разрезом $\overline{\Gamma}_c$ получим следующую краевую задачу для нахождения функций u^ε,

$$-\operatorname{div}(a^\varepsilon\nabla u^\varepsilon) = f \quad \text{в } \Omega_c, \tag{60}$$

$$u^\varepsilon = 0 \quad \text{на } \Gamma, \tag{61}$$

$$a^\varepsilon\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \nu} = 0 \quad \text{на } \Gamma_c^\pm, \tag{62}$$

решение которой определяется из тождества

$$u \in H^1_\Gamma(\Omega_c), \quad \int\limits_{\Omega_c} a^\varepsilon \nabla u^\varepsilon \nabla v = \int\limits_{\Omega_c} fv \quad \forall v \in H^1_\Gamma(\Omega_c). \tag{63}$$

Смешанная формулировка задачи (60)–(62) в области Ω_c имеет вид (ср. с (36)–(38))

$$u^\varepsilon \in L^2(\Omega_c), \quad p^\varepsilon = \left(p_1^\varepsilon, p_2^\varepsilon\right) \in M, \tag{64}$$

$$-\operatorname{div} p^\varepsilon = f \quad \text{в } \Omega_c, \tag{65}$$

$$\int\limits_{\Omega_c} b^\varepsilon p^\varepsilon \cdot \bar{p} + \int\limits_{\Omega_c} u^\varepsilon \cdot \operatorname{div}\bar{p} = 0 \quad \forall \bar{p} \in M. \tag{66}$$

Здесь

$$M = \left\{p = (p_1, p_2) \mid p,\ \operatorname{div} p \in L^2(\Omega_c),\ p\nu = 0 \text{ на } \Gamma_c^\pm\right\}.$$

Наконец, от задачи (64)–(66) можно перейти к эквивалентной формулировке задачи в гладкой области Ω. А именно, в этом случае требуется найти функции u^ε, $p = (p_1^\varepsilon, p_2^\varepsilon)$ такие, что (ср. с (41)–(43))

$$u^\varepsilon \in L^2(\Omega), \quad p^\varepsilon \in \mathscr{M}_c, \tag{67}$$

$$-\operatorname{div} p^\varepsilon = f \quad \text{в } \Omega, \tag{68}$$

$$\int\limits_{\Omega} b^\varepsilon p^\varepsilon \cdot \bar{p} + \int\limits_{\Omega} u^\varepsilon \cdot \operatorname{div}\bar{p} = 0 \quad \forall \bar{p} \in \mathscr{M}_c, \tag{69}$$

где

$$\mathscr{M}_c = \{p = (p_1, p_2) \mid p,\ \operatorname{div} p \in L^2(\Omega),\ p\nu = 0 \text{ на } \Gamma_c\}.$$

Так же, как и в задаче (36)–(38), в задаче (64)–(66) можно перейти к пределу при $\varepsilon \to 0$ и получить для предельных функций u, p соотношения

$$u \in L^2(\Omega_1), \quad p \in Z_0, \tag{70}$$

$$-\operatorname{div} p = f \quad \text{в } \Omega_1, \tag{71}$$

$$\int\limits_{\Omega_1} a^{-1} p \cdot \bar{p} + \int\limits_{\Omega_1} u \cdot \operatorname{div}\bar{p} = 0 \quad \forall \bar{p} \in Z_0, \tag{72}$$

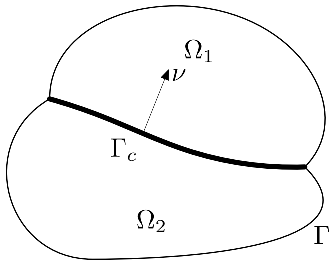

Рис. 2.

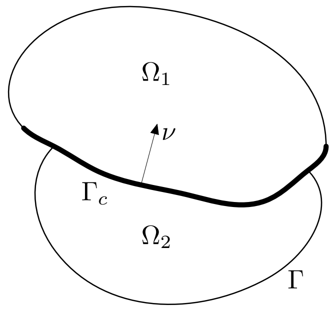

Рис. 3.

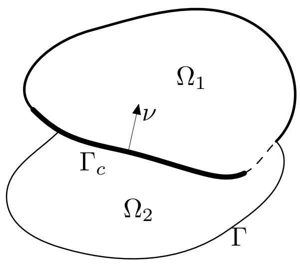

Рис. 4.

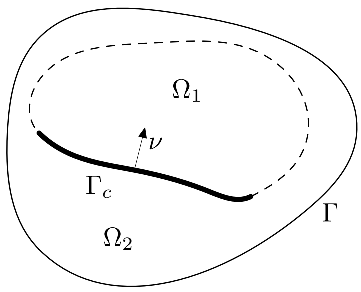

Рис. 5.

где

$$Z_0 = \{p = (p_1, p_2) \mid p,\ \operatorname{div} p \in L^2(\Omega_1),\ p\nu = 0 \text{ на } \Gamma_c\}.$$

Таким образом, мы видим, что предельная при $\varepsilon \to 0$ задача для (64–(66) имеет вид (70)–(72). В свою очередь, задача (70)–(72) есть не что иное, как смешанная формулировка краевой задачи (57)–(59). Аналогично можно осуществить переход к пределу при $\varepsilon \to 0$ в (67)–(69). Предельная задача будет по-прежнему иметь вид (70)–(72).

В заключение отметим, что предлагаемый в работе метод фиктивных областей для задачи Синьорини может принимать различные формы в зависимости от выбора фиктивной области Ω_2. Важным является то, что наряду с выбором области Ω_2, указанным на рис. 1, аналогичные утверждения имеют место и для других случаев выбора Ω_2 таких, как указано на рис. 2–5. Ясно, что в случае рис. 2 вспомогательная задача с параметром ε, рассматриваемая на множестве $\Omega_c = \Omega_1 \cup \Omega_2$, будет контактной задачей с краевыми условиями вида (8) на $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$. В случае рис. 3, рис. 4 во вспомогательной задаче, рассматриваемой в Ω_c, на внешней границе Γ задаются как условия Дирихле $u = 0$, так и условия Синьорини вида (3). Наконец, в случае рис. 5 внешняя граница области Ω_c совпадает с внешней границей области Ω_2, где задаются краевые условия Дирихле.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Khludnev A. M., Kovtunenko V. A.* Analysis of cracks in solids. Southampton-Boston: WIT Press, 2000.

2. *Назаров С. А., Пламеневский Б. А.* Эллиптические задачи в областях с кусочно гладкой границей. М.: Наука, 1991.

3. *Grisvard P.* Elliptic problems in nonsmooth domains. Boston; London; Melbourne: Pitman, 1985.

4. *Ohtsuka K.* Mathematics of brittle fracture // Theoretical studies on fracture mechanics in Japan / Ed. K.Ohtsuka. Hiroshima-Denki Institute of Technology. Hiroshima, 1995. P. 99–172.
5. *Черепанов Г. П.* Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974.
6. *Морозов Н. Ф.* Математические вопросы теории трещин. М.: Наука, 1984.
7. *Партон В. З., Морозов Е. М.* Механика упругопластического разрушения. М.: Наука, 1985.
8. *Khludnev A. M., Sokolowski J.* Modelling and control in solid mechanics. Basel; Boston; Berlin: Birkhauser, 1997.
9. *Копченов В. Д.* Приближение решения задачи Дирихле методом фиктивных областей // Дифференц. уравнения. 1968. Т. 4, № 1. С. 151–164.
10. *Коновалов А. Н.* Метод фиктивных областей в задачах кручения // Численные методы механики сплошной среды. 1973. Т. 4, № 2. С. 109–115.
11. *Брусникин М. Б.* Об эффективных алгоритмах решения задач метода фиктивных областей в многосвязном случае // Докл. РАН. 2002. Т. 387, № 2. С. 151–155.
12. *Темам Р.* Математические задачи теории пластичности. М.: Наука, 1991.
13. *Brezzi F., Fortin M.* Mixed and hybrid finite element methods. New York: Springer-Verl., 1991. V. .
14. *Хлуднев А. М.* Метод гладких областей в задаче о равновесии пластины с трещиной // Сиб. мат. журн. 2002. Т. 43, № 6. С. 1388–1400.

Статья поступила 24 апреля 2003 г.

Хлуднев Александр Михайлович
Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,
пр. Академика М. А. Лаврентьева, 15, Новосибирск 630090
khlud@hydro.nsc.ru

Степанов Владимир Дмитриевич
Вычислительный центр ДВО РАН, ул. Тихоокеанская, 153, Хабаровск 680042
Current address: Korea Advanced Institute of Science and Technology
373-1 Kusong-dong, Yusong-gu, Taejon 305-701, Republic of Korea
stepanov@as.khb.ru, vstep@math.kaist.ac.kr