Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2003. Том 44, № 6

УДК 517.55

О ВОЗМОЖНОСТИ ГОЛОМОРФНОГО ПРОДОЛЖЕНИЯ В ШАР ЛИ ФУНКЦИЙ, ЗАДАННЫХ НА ЧАСТИ СФЕРЫ ЛИ

Б. А. Шаимкулов

Аннотация: Описаны области, в которые голоморфно продолжается интеграл типа Хуа Локена для шара Ли. Получен критерий голоморфной продолжимости в шар Ли функций, заданных на части сферы Ли.

Ключевые слова: шар Ли, интегральное представление, голоморфное продолжение.

Введение

Вопрос о возможности голоморфного продолжения в область функций, заданных на всей границе этой области, достаточно хорошо изучен (см., например, [1, 2]). Представляет интерес задача описания функций, заданных на части границы, которые могут быть голоморфно продолжены в фиксированную область. Различные решения этой задачи для одномерного и многомерного случаев можно найти в [3, § 27].

Цель настоящей статьи — получить критерий голоморфной продолжимости в шар Ли функций, заданных на части границы Шилова шара Ли, близкий по духу к критерию Л. А. Айзенберга и А. М. Кытманова [4].

§ 1. Интеграл типа Хуа Локена для шара Ли

Пусть $B_L = \{z \in \mathbb{C}^n : |(z,z)|^2 - 2|z|^2 + 1 > 0,\ |(z,z)| < 1\}$ — шар Ли (классическая область четвертого типа), где $(z,z) = \sum\limits_{i=1}^{n} z_i^2$, $n > 2$, $S_L = \{\zeta \in \mathbb{C}^n : \zeta = e^{i\theta}x,\ x \in \mathbb{R}^n,\ |x| = 1,\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\}$ — его остов (сфера Ли). Шар Ли B_L является полной круговой выпуклой ограниченной областью. Обозначим через $\mathscr{L}^2(S_L, d\mu)$ пространство функций f, интегрируемых с квадратом по мере Хаара $d\mu$ на S_L, а через $\mathscr{H}^2(S_L, d\mu)$ ($\mathscr{H}^2(B_L)$) — подпространство функций в $\mathscr{L}^2(S_L, d\mu)$, допускающих голоморфное продолжение в B_L, т. е. голоморфная функция f принадлежит $\mathscr{H}^2(S_L, d\mu)$, если

$$\sup_{0<r<1} \int\limits_{S_L} |f(rz)|^2\, d\mu \leqslant C.$$

При этом для любой функции $f \in \mathscr{H}^2(S_L, d\mu)$ существуют (почти всюду на S_L) радиальные граничные значения $f(\zeta) = \lim\limits_{r\to 1-0} f(r\zeta)$, $\zeta \in S_L$, $f \in \mathscr{L}^2(S_L, d\mu)$.

Для любой функции $f \in \mathscr{H}^2(S_L, d\mu)$ имеет место интегральное представление Хуа Локена (см. [5, 6])

$$f(z) = \int\limits_{S_L} \frac{f(\zeta)(\zeta, \zeta)^{\frac{n}{2}}\, d\mu}{(\zeta - z, \zeta - z)^{\frac{n}{2}}}, \quad z \in B_L. \tag{1}$$

Классическая теорема Картана (см. [5]) утверждает, что для полной круговой области D в пространстве $\mathscr{H}^2(D, d\mu)$ существует полная ортонормальная система однородных голоморфных полиномов. Эта система строится следующим образом (см. [5, 7]).

Пусть $z \in S_L$. Через $z^{[\alpha]}$ будем обозначать вектор с компонентами

$$\sqrt{\frac{\alpha!}{\alpha_1! \dots \alpha_n!}} z_1^{\alpha_1} \dots z_n^{\alpha_n}, \quad \left(\alpha = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k,\ \alpha_k \geqslant 0\right),$$

длина которого равна

$$N(\alpha) = \frac{(n + \alpha - 1)!}{\alpha!(n-1)!}.$$

Положим

$$\int\limits_{S_L} (\bar{z}^{[\alpha]})'(z^{[\alpha]})\, d\mu = H.$$

Ясно, что H — положительно определенная эрмитова матрица порядка $N(\alpha)$. Существует такая матрица Γ, что $\Gamma^* H \Gamma = I$, где Γ^* — матрица, сопряженная к транспонированной матрице Γ', I — единичная матрица порядка $N(\alpha)$.

Пусть $z_\alpha = z^{[\alpha]}\Gamma$. Через $\{\varphi_\alpha^{(k)}(z)\}$ будем обозначать компоненты вектора z_α. Система $\{\varphi_\alpha^{(k)}(z)\}$, $\alpha = 1, 2, \dots$, $k = 1, 2, \dots, N(\alpha)$, образует полную ортонормальную систему на S_L в $\mathscr{H}^2(S_L, d\mu)$ (см. [5]).

Теорема 1 [5]. *Пусть $f(\zeta)$ — интегрируемая функция и $a_\alpha^{(k)}$ — коэффициенты Фурье этой функции относительно ортонормальной системы $\{\varphi_\alpha^{(k)}(\zeta)\}$ на S_L. Тогда интеграл* (1) *представляет в B_L голоморфную функцию, разлагающуюся в B_L в ряд*

$$\sum_{\alpha, k} a_\alpha^{(k)} \varphi_\alpha^{(k)}(z). \tag{2}$$

При этом ряд (2) *сходится равномерно на каждом компакте из B_L.*

Теперь рассмотрим интеграл типа Хуа Локена

$$F(z) = \int\limits_{S_L} \frac{f(\zeta)(\zeta, \zeta)^{\frac{n}{2}}\, d\mu}{(\zeta - z, \zeta - z)^{\frac{n}{2}}}, \tag{3}$$

где $z \in \mathbb{C}^n$, $\zeta \in S_L$, при заданной интегрируемой функции $f(\zeta)$.

Лемма 1. *Интеграл* (3) *имеет смысл в каждой из двух областей*

$$B_L = B_L^+ = \{z \in \mathbb{C}^n : |(z, z)|^2 - 2|z|^2 + 1 > 0,\ |(z, z)| < 1\},$$

$$B_L^- = \{z \in \mathbb{C}^n : |(z, z)|^2 - 2|z|^2 + 1 > 0,\ |(z, z)| > 1\}.$$

Доказательство. Пусть T — ортогональное преобразование, т. е. $TT' = I$, здесь T' — транспонированное отображение, I — тождественное отображение.

Отображение T сохраняет области B_L^+, B_L^-, остов S_L и скалярное произведение $(\zeta - z, \zeta - z)$.

Действительно,

$$(zT, zT) = zT(zT)' = zTT'z = (z, z),$$

$$T\big(B_L^+\big) = \{z : |(zT, zT)|^2 - 2(zT, \bar{z}T) + 1 = |(z,z)|^2 - 2|z|^2 - 1 > 0,\\ |(zT, zT)| = |(z,z)| < 1\} = B_L^+,$$

$$T\big(B_L^-\big) = \{z : |(zT, zT)|^2 - 2(zT, zT) + 1 = |(z,z)|^2 - 2|z|^2 + 1 > 0,\\ |(zT, zT)| = |(z,z)| > 1\} = B_L^-,$$

$$((\zeta - z)T, (\zeta - z)T) = (\zeta - z, \zeta - z).$$

Так как с помощью ортогонального преобразования и поворота $e^{i\varphi}$ любую точку S_L можно преобразовать в любую точку S_L, лемму можно доказать лишь для точки вида $x = (1, 0, \dots, 0) \in S_L$.

Пусть $(x - z, x - z) = 0$, т. е. $-2z_1 + (z,z) + 1 = 0$ или $(z_1 - 1)^2 + ('z, 'z) = 0$, где $'z = (z_2, \dots, z_n)$. Тогда

$$|(z,z)|^2 - 2|z|^2 + 1 = |2z_1 - 1|^2 - 2|z|^2 + 1 = 2|z_1|^2 - 4\operatorname{Re} z_1 - 2|'z|^2 + 2\\ = 2|z_1 - 1|^2 - 2|'z|^2 = 2(|('z, 'z)| - |'z|^2) \leqslant 0.$$

Это неравенство доказывает лемму 1.

Лемма 2. *Для точек z таких, что $(z,z) \neq 0$, функция $w = \frac{z}{(z,z)}$ отображает область B_L^+ в область B_L^-, при этом точка $z \in S_L$ переходит в точку $\bar{z} \in S_L$.*

Доказательство. Пусть $z \in B_L^+$. Тогда

$$|(w,w)| = \left|\left(\frac{z}{(z,z)}, \frac{z}{(z,z)}\right)\right| = \frac{|(z,z)|}{|(z,z)|^2} = \frac{1}{|(z,z)|} > 1,$$

$$|(w,w)|^2 - 2|w|^2 + 1 = \frac{1}{|(z,z)|^2} - 2\frac{|z|^2}{|(z,z)|^2} + 1 = \frac{|(z,z)|^2 - 2|z|^2 + 1}{|(z,z)|^2} > 0.$$

Пусть теперь $z \in S_L$. Тогда

$$w = \frac{e^{i\varphi}x}{(e^{i\varphi}x, e^{i\varphi}x)} = e^{-i\varphi}x.$$

Лемма 2 доказана.

Обозначим через $F^+(z)$ значение интеграла (3) при $z \in B_L^+$, а через $F^-(z)$ — значение интеграла (3) при $z \in B_L^-$.

Для изучения $F^\pm(z)$ нужно расширить определение функций $\varphi_\alpha^{(k)}(\zeta)$. Положим

$$\varphi_{-\alpha-n}^{(k)}(\zeta) = \varphi_\alpha^{(k)}(\bar{\zeta})(\zeta,\zeta)^{-\frac{n}{2}}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, N(\alpha), \quad \zeta \in S_L.$$

Ясно, что система $\big\{\varphi_{-\alpha-n}^{(k)}(\zeta)\big\}$ является ортонормальной на S_L. Кроме того, системы $\big\{\varphi_\alpha^{(k)}(\zeta)\big\}$ и $\big\{\varphi_{-\beta-n}^{(l)}(\zeta)\big\}$ ортогональны друг другу. Действительно, так как меру $d\mu$ можно записать в виде $d\mu = d\theta d\sigma$ ($d\sigma$ — мера Лебега на сфере $S^n = \{x \in \mathbb{R}^n : xx' = 1\}$), имеем

$$\int\limits_{S_L} \varphi^{(l)}_{-\beta-n}(\zeta)\overline{\varphi^{(k)}_{\alpha}(\zeta)}\,d\mu = \int\limits_{S_L} \varphi^{(l)}_{\beta}(\bar\zeta)e^{-in\theta}\overline{\varphi^{(k)}_{\alpha}(\zeta)}\,d\mu$$
$$= \int\limits_0^{2\pi} e^{-in\theta}d\theta \int\limits_{S^n} \varphi^{(l)}_{\beta}(e^{-i\theta}x)\overline{\varphi^{(k)}_{\alpha}(e^{i\theta}x)}\,d\sigma$$
$$= \int\limits_0^{2\pi} e^{-i(n+\beta+\alpha)\theta}\,d\theta \int\limits_{S^n} \varphi^{(l)}_{\beta}(x)\varphi^{(k)}_{\alpha}(x)\,d\sigma = 0.$$

Дополним системы этих функций до полной ортонормальной системы $\mathscr{L}$ в $\mathscr{L}^2(S_L, d\mu)$. Пусть ряд Фурье для $f(\zeta)$ имеет вид

$$f(\zeta) = \sum_{\alpha,k} a^{(k)}_{\alpha}\varphi^{(k)}_{\alpha}(\zeta).$$

Тогда в силу теоремы 1 при всех $z \in B^+_L$ будет

$$F^+(z) = \sum_{\alpha,k} a^{(k)}_{\alpha}\varphi^{(k)}_{\alpha}(z). \tag{4}$$

При этом если $f(\zeta) \in \mathscr{H}^2(S_L,\, d\mu)$, то $F^+(z) \in \mathscr{H}^2(S_L,\, d\mu)$ [8].

Теорема 2. *Пусть $f(\zeta) \in \mathscr{L}^2(S, d\mu)$ и $z \in B^-_L$. Тогда интеграл (3) представляет голоморфную функцию $F^-(z)$, имеющую разложение*

$$F^-(z) = \sum_{\alpha,k} a^{(k)}_{-\alpha-n}\varphi^{(k)}_{-\alpha-n}\left(\frac{z}{(z,z)}\right), \tag{5}$$

где

$$a^{(k)}_{-\alpha-n} = \int\limits_{S_L} f(\zeta)\overline{\varphi^{(k)}_{-\alpha-n}(\zeta)}\,d\mu.$$

Доказательство. Пусть $z \in B^-_L$. Тогда

$$F^-(z) = \int\limits_{S_L} \frac{f(\zeta)(\zeta,\zeta)^{\frac{n}{2}}\,d\mu}{(\zeta - z, \zeta - z)^{\frac{n}{2}}} = \int\limits_{S_L} \frac{f(\zeta)(\zeta,\zeta)^{\frac{n}{2}}\,d\mu}{(\zeta,\zeta)^{\frac{n}{2}}(z,z)^{\frac{n}{2}}\left(\bar\zeta - \frac{z}{(z,z)}, \bar\zeta - \frac{z}{(z,z)}\right)^{\frac{n}{2}}}.$$

Согласно лемме 2 имеем $\frac{z}{(z,z)} \in B^+_L$, следовательно,

$$\left(\bar\zeta - \frac{z}{(z,z)}, \bar\zeta - \frac{z}{(z,z)}\right)^{-\frac{n}{2}} = (\bar\zeta,\bar\zeta)^{-\frac{n}{2}} \sum_{\alpha,k} \overline{\varphi^{(k)}_{\alpha}(\bar\zeta)}\varphi^{(k)}_{\alpha}\left(\frac{z}{(z,z)}\right)$$
$$= \sum_{\alpha,k} \overline{\varphi^{(k)}_{-\alpha-n}(\zeta)}\varphi^{(k)}_{\alpha}\left(\frac{z}{(z,z)}\right).$$

Умножая последнее выражение на $f(\zeta)$ и интегрируя почленно, получаем

$$F^-(z) = \frac{1}{(z,z)^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{S_L} f(\zeta) \sum_{\alpha,k} \overline{\varphi^{(k)}_{-\alpha-n}(\zeta)}\varphi^{(k)}_{\alpha}\left(\frac{z}{(z,z)}\right)\,d\mu$$
$$= \sum_{\alpha,k} a^{(k)}_{-\alpha-n}\varphi^{(k)}_{-\alpha-n}\left(\frac{z}{(z,z)}\right).$$

Следовательно, в области B^-_L интеграл (3) представляет голоморфную функцию от $\frac{z}{(z,z)}$, имеющую разложение (5).

§ 2. Голоморфное продолжение с части сферы Ли

Обозначим через $\{\varphi\}$ систему функций из $\mathscr{L}$, не входящую в разложения (4) и (5).

Теорема 3. *Если $f \in \mathscr{L}^2(S_L)$ и f ортогональна на S_L системе функций $\{\varphi\}$, то функции $F^+(z) \in \mathscr{H}^2(B_L^+)$, $F^-(z) \in \mathscr{H}^2(B_L^-)$ имеют почти всюду на S_L радиальные пределы и*

$$F^+(z)|_{S_L} + F^-(z)|_{S_L} = f(z)$$

почти для всех точек $z \in S_L$.

Доказательство. Пусть $0 < r < 1$. Тогда при всех $z \in B_L^+$ имеем

$$F^+(rz) = \sum_{\alpha,k} a_\alpha^{(k)} \varphi_\alpha^{(k)}(z) r^\alpha$$

и этот ряд сходится равномерно на $\overline{B_L^+}$.

Так как $f \in \mathscr{L}^2(S_L)$, то $F^+(z) \in \mathscr{H}^2(B_L^+)$. Тогда функция $F^+(z)$ почти всюду имеет радиальные пределы (при $r \to 1-0$) на S_L и $F^+(z)|_{S_L} \in \mathscr{L}^2(S_L)$ [8].

Теперь при $z \in B_L^-$ рассмотрим

$$F^-\left(\frac{1}{r}z\right) = \sum_{\alpha,k} a_{-\alpha-n}^{(k)} \varphi_{-\alpha-n}^{(k)} \left(\frac{z}{(z,z)}\right) r^{\alpha+n}.$$

Этот ряд равномерно сходится на любом компакте из B_L^-. Поскольку $f \in \mathscr{L}^2(S_L)$, получаем, что $F^-(z) \in \mathscr{H}^2(B_L^-)$. Тогда функция $F^-(z)$ почти всюду имеет радиальные пределы на S_L и $F^-(z)|_{S_L} \in \mathscr{L}^2(S_L)$. Следовательно,

$$F^+(z)|_{S_L} + F^-(z)|_{S_L} = \sum_{\alpha,k} a_\alpha^{(k)} \varphi_\alpha^{(k)}(z) + \sum_{\alpha,k} a_{-\alpha-n}^{(k)} \varphi_{-\alpha-n}^{(k)}(\bar{z}) = f(z)$$

почти всюду.

С помощью теоремы Ерикке [9] о свойствах интегралов типа Хуа Локена аналогично доказывается следующая

Теорема 4. *Если $f \in \mathscr{C}^\alpha(S_L)$, $\alpha > \frac{n}{2} - 1 > 0$ и f ортогональна на S_L системе функций $\{\varphi\}$, то функции $F^+(z)$ и $F^-(z)$ непрерывно продолжаются на S_L до функций из класса $\mathscr{C}^{\alpha-\frac{n}{2}+1-\varepsilon}(S_L)$ для всех $\varepsilon > 0$ и*

$$F^+(z)|_{S_L} + F^-(z)|_{S_L} = f(z).$$

Отметим, что в этой теореме оценка неулучшаема в шкале гёльдеровских норм.

Теорема 5. *Пусть $f \in \mathscr{L}^2(S_L)$. Для того чтобы существовала функция $F \in \mathscr{H}^2(B_L^+)$, радиальные граничные значения которой почти всюду на S_L совпадают с f, необходимо и достаточно, чтобы f была ортогональной на S_L системе $\{\varphi\}$ и $F^-(z) = 0$ в B_L^-.*

Доказательство. Необходимость. Пусть f продолжается до функции из класса $\mathscr{H}^2(B_L^+)$.

Рассмотрим интеграл

$$\int_{S_L} \frac{f(\zeta)(\zeta,\zeta)^{\frac{n}{2}}\, d\mu}{(\zeta - z, \zeta - z)^{\frac{n}{2}}} = \begin{cases} F^+(z), & z \in B_L^+, \\ F^-(z), & z \in B_L^-. \end{cases}$$

Тогда (по формуле Хуа Локена)

$$F^+(z) = \sum_{\alpha,k} a_\alpha^{(k)} \varphi_\alpha^{(k)}(z)$$

и ее радиальные граничные значения на S_L совпадают с f. Поэтому остальные коэффициенты Фурье для системы $\mathscr{L}$ равны 0. Отсюда следует, что f ортогональна к функциям семейства $\{\varphi\}$. По теореме 2

$$F^-(z) = \sum_{\alpha,k} a_{-\alpha-n}^{(k)} \varphi_{-\alpha-n}^{(k)} \left(\frac{z}{(z,z)} \right).$$

Значит, $F^-(z) = 0$ в B_L^-.

Достаточность. Пусть f ортогональна системе $\{\varphi\}$ и $F^-(z) = 0$ в B_L^-. Тогда по теореме 3 справедливо почти всюду равенство $F^+(z)|_{S_L} + F^-(z)|_{S_L} = f(z)$. Следовательно, $F^+(z)|_{S_L} = f(z)$. Таким образом, $F^+(z) \in \mathscr{H}^2\big(B_L^+\big)$ дает голоморфное продолжение для f.

Теорема 6. *Пусть $\Gamma \subset S_L$ — открытое множество, и пусть $f \in \mathscr{L}^2(\Gamma)$ ортогональна системе $\{\varphi\}$ на Γ. Тогда для того чтобы f голоморфно продолжалась в B_L^+, необходимо и достаточно, чтобы $F^-(z)$ голоморфно продолжалась из B_L^- через Γ в область B_L^+.*

Доказательство. Необходимость. Пусть f голоморфно продолжается в B_L^+, т. е. существует голоморфная функция $F(z)$ в B_L^+ такая, что $F|_\Gamma = f$.

Рассмотрим интеграл типа Хуа Локена

$$\int\limits_\Gamma \frac{f(\zeta)(\zeta,\zeta)^{\frac{n}{2}}\, d\mu}{(\zeta - z, \zeta - z)^{\frac{n}{2}}}, \quad z \in B_L^\pm.$$

В силу теоремы 3 (теорема 3 применяется к продолжению функции f с Γ на $S_L \setminus \Gamma$ нулем)

$$F^+ \in \mathscr{H}^2\big(B_L^+\big), \quad F^- \in \mathscr{H}^2\big(B_L^-\big)$$

и

$$F^+(z)|_\Gamma + F^-(z)|_\Gamma = f(z).$$

Отсюда имеем

$$F^-(z)|_\Gamma = [F(z) - F^+(z)]|_\Gamma.$$

Поскольку S_L является порождающим многообразием, по теореме об острие клина из [10] функция

$$\Phi(z) = \begin{cases} F^-(z), & z \in B_L^-, \\ F(z) - F^+(z), & z \in B_L, \end{cases}$$

голоморфна на множестве $B_L^+ \cup \Gamma \cup B_L^-$. Поэтому $F^-(z)$ голоморфно продолжается в B_L^+.

Достаточность. Пусть $F^-(z)$ продолжается до голоморфной функции $g(z)$ в $B_L^- \cup \Gamma \cup B_L^+$. Тогда по теореме 3 функция $h(z) = g(z) + F^+(z)$ голоморфна в B_L^+ и $h(z)|_\Gamma = f$.

Теорема полностью доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Привалов И. И.* Граничные свойства аналитических функций. М.: Гостехиздат, 1950.
2. *Хенкин Г. М., Чирка Е. М.* Граничные свойства голоморфных функций нескольких комплексных переменных // Современные проблемы математики. М.: ВИНИТИ, 1975. Т. 4. С. 13–142. (Итоги науки и техники).
3. *Айзенберг Л. А* Формулы Карлемана в комплексном анализе. Первые приложения. Новосибирск: Наука, 1990.
4. *Айзенберг Л. А., Кытманов А. М.* О возможности голоморфного продолжения в область функций, заданных на связном куске ее границы // Мат. сб. 1991. Т. 182, № 4. С. 490–508.
5. *Хуа Локен.* Гармонический анализ функций многих комплексных переменных. М.: Мир, 1959.
6. *Хенкин Г. М.* Методы интегральных представлений в комплексном анализе // Современные проблемы математики. М.: ВИНИТИ, 1985. Т. 7. С. 23–124. (Итоги науки и техники).
7. *Айзенберг Л. А., Даутов Ш. А.* Дифференциальные формы, ортогональные голоморфным функциям или формам, и их свойства. Новосибирск: Наука, 1975.
8. *Koranyi A.* The Poisson integral for generalized half-planes and bounded symmetric domains // Ann. Math. 1965. V. 82, N 5. P. 332–350.
9. *Ерикке Б.* Непрерывность проектора Коши в гёльдеровских нормах для классических областей // Math. Nachr. 1983. V. 113. P. 227–244.
10. *Пинчук С. И.* Теорема Боголюбова об «острие клина» для порождающих многообразий // Мат. сб. 1974. Т. 94. С. 468–486.

Статья поступила 21 октября 2002 г.

Шаимкулов Баходир Аллабердиевич
Национальный университет Узбекистана, механико-математический факультет
Вузгородок, Ташкент 700174, Узбекистан
davlat@tps.uz