Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2004. Том 45, № 1

УДК 517.51

ОБОБЩЕНИЕ ВЕСОВОГО НЕРАВЕНСТВА ХАРДИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

А. А. Калыбай

Аннотация: Рассматривается задача об отыскании необходимых и достаточных условий наличия оценки функции через некоторую дифференциальную операцию, содержащую весовую функцию и называемую в статье *ρ-весовой производной*.

Ключевые слова: оценка типа Харди, весовая функция, интегральный оператор.

1. Введение. Пусть $I = (0, \infty)$, k — натуральное число, $u(\cdot)$, $v(\cdot)$ и $\rho(\cdot)$ — весовые функции на I, т. е. неотрицательные измеримые функции на этом промежутке.

Для функции g определим дифференциальную операцию

$$D_\rho^i g(t) = \begin{cases} \frac{d^i g(t)}{dt^i}, & i = 0, 1, \dots, m-1, \\ \frac{d^{i-m}}{dt^{i-m}}\left(\rho(t)\frac{d^m g(t)}{dt^m}\right), & i = m, m+1, \dots, n, \end{cases}$$

где $n + m = k$ и каждая производная понимается в обобщенном смысле [1].

Назовем эту дифференциальную операцию *ρ-весовой производной функции g соответствующего порядка* $i = 0, 1, \dots, k$.

Рассмотрим неравенство

$$\|g\|_{q,u} \le C\left\|D_\rho^k g\right\|_{p,v}, \tag{1}$$

где $1 < p$, $q < \infty$, $\|\cdot\|_{p,u}$ — обычная норма пространства $L_{p,u}(0, \infty)$:

$$\|g\|_{p,u} = \left(\int_0^\infty |u(t)g(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Введем обозначения:

$$\lim_{t\to 0} D_\rho^i g(t) = D_\rho^i g(0), \quad i = 0, 1, \dots, k-1,$$

$$\lim_{t\to \infty} D_\rho^i g(t) = D_\rho^i g(\infty), \quad i = 0, 1, \dots, k-1.$$

В работе решается задача об отыскании необходимых и достаточных условий на веса u, v и ρ для того, чтобы имело место неравенство (1) для всех функций g, удовлетворяющих «краевым условиям»

$$D_\rho^i g(0) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, l-1, \tag{2}$$

$$D_\rho^j g(\infty) = 0, \quad j = l, l+1, \dots, k-1, \tag{3}$$

при $1 < p \le q < \infty$.

Неравенство (1) в случае $\rho(t) \equiv 1$ является весовым неравенством Харди, исследованию которого посвящен ряд работ. Так, в работе В. Д. Степанова [2] получен критерий выполнения весового неравенства Харди в случае, когда «краевые условия» задаются только в одном из концов интервала. Дальнейшее развитие задача получила в работе А. Куфнера и Г. П. Хейнига [3], где «краевые условия» ставятся аналогично рассматриваемому случаю. Случай, когда классы индексов соответствующих «краевых условий» удовлетворяют условию Пойа [4], был изучен в работах А. Куфнера и А. Ваннебо [5], А. Куфнера [6], Г. Синнамона [7]. В работах П. Гурка [8] при $k = 1$ и М. Насыровой и В. Д. Степанова [9–10] были найдены необходимые и достаточные условия выполнения весового неравенства Харди для функций, «исчезающих» на обоих концах, т. е. при $g(0) = g'(0) = \dots = g^{(k-1)}(0) = g(\infty) = g'(\infty) = \dots = g^{(k-1)}(\infty) = 0$.

Здесь и далее $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, а символ $X \approx Y$ означает наличие оценки $aX \le Y \le bX$ с некоторыми постоянными a и b.

В ходе доказательства основных результатов нам понадобятся следующие утверждения.

Теорема A (В. Д. Степанов [2]). *Пусть $1 < p \le q < \infty$, $r \ge 1$. Тогда неравенство*

$$\|I_r f\|_{q,u} \le C\|f\|_{p,v}$$

для интеграла Римана — Лиувилля

$$I_r f(t) = \frac{1}{\Gamma(r)} \int_0^t (t-s)^{r-1} f(s)\, ds, \quad t > 0,$$

имеет место с константой $C > 0$, не зависящей от f, в том и только в том случае, если

$$\sup_{t>0} \left(\int_t^\infty (s-t)^{q(r-1)} u^q(s)\, ds \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^t v^{-p'}(s)\, ds \right)^{\frac{1}{p'}} < \infty,$$

$$\sup_{t>0} \left(\int_t^\infty u^q(s)\, ds \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^t (t-s)^{p'(r-1)} v^{-p'}(s)\, ds \right)^{\frac{1}{p'}} < \infty.$$

Теорема B (Б. Л. Байдельдинов, Р. Ойнаров [11]). *Пусть $1 < p \le q < \infty$. Пусть ядро $K(t,s)$ интегрального оператора*

$$Kf(t) = \int_0^t K(t,s) f(s)\, ds, \quad t > 0,$$

принадлежит классу H^n, $n \ge 0$, который определяется следующим образом.

Класс H^0 полагаем состоящим из одной единственной функции $K_0(t,s) \equiv 1$, т. е. $H^0 = \{K_0\}$. Считая уже определенными классы H^i при $i = 1, 2, \dots, n-1$, полагаем класс H^n состоящим из функций $K_n(t,s)$ (определенных и неотрицательных на любой паре переменных $(t,s) : 0 < s \le t < \infty$), для каждой из которых можно указать систему функций $\{K_{i,n}(t,s)\}_{i=1}^{n-1}$ (также определенных и неотрицательных на любой вышеуказанной паре (t,s)) и систему функций

$\{K_i(t,s) : K_i \in H^i,\ i = 1, 2, \dots, n-1\}$, *связанных между собой и с функцией* $K_n(t,s)$ *условиями:*

(a) *существует константа* $d_n \geq 1$ *такая, что для любых* s, τ, t *таких, что* $0 < s \leq \tau \leq t < \infty$, *выполнено неравенство*

$$d_n^{-1} K_n(t,s) \leq \sum_{i=0}^{n} K_i(\tau,s) K_{i,n}(t,\tau) \leq d_n K_n(t,s),$$

в котором $K_{0,n}(\cdot,\cdot) \equiv K_n(\cdot,\cdot)$, $K_{n,n}(\cdot,\cdot) \equiv K_0(\cdot,\cdot) \equiv 1$;

(b) *для любого* $m \in \mathbb{N}$ *такого, что* $1 \leq m < n$, *существует* $d_{n,m} > 0$ *такое, что* $0 < s \leq \tau \leq t \leq z < \infty$ *и для любого индекса* j, $m \leq j < n$, *справедлива оценка*

$$K_{m,j}(\tau,s) K_{j,n}(t,\tau) \leq d_{n,m} K_{m,n}(z,s),$$

где $\{K_{m,j}\}_{m=1}^{j-1}$ — *система функций, связанная с функцией* $K_j \in H^j$ *согласно определению класса* H^j.

Тогда неравенство

$$\|Kf\|_{q,u} \leq C \|f\|_{p,v}$$

имеет место с константой $C > 0$, *не зависящей от* f, *в том и только в том случае, если*

$$\sup_{t>0} \left(\int_t^\infty K_{i,n}^q(s,t) u^q(s)\, ds \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^t K_i^{p'}(t,s) v^{-p'}(s)\, ds \right)^{\frac{1}{p'}} < \infty, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

2. Основные результаты. Исследование рассматриваемой задачи разобьется на три случая: 1) $m < l$; 2) $m > l$; 3) $m = l$.

Теорема 1. *Пусть* $1 < p \leq q < \infty$, $k \geq 3$, $1 \leq m < l < k$. *Пусть функция* g *удовлетворяет условиям* (2), (3). *Тогда неравенство* (1) *имеет место с константой* $C > 0$, *не зависящей от* g, *в том и только в том случае, если*

$$\sup_{t>0} \left(\int_t^\infty u^q(y) \left(\int_0^t v^{-p'}(s) \left(\int_0^y \rho^{-1}(x)(y-x)^{m-1} \varphi(s,x)\, dx \right)^{p'} ds \right)^{\frac{q}{p'}} dy \right)^{\frac{1}{q}} < \infty, \tag{4}$$

где $\varphi(s,x) = \begin{cases} x^{l-m} s^{k-l-1}, & x \leq s, \\ x^{l-m-1} s^{k-l}, & x > s; \end{cases}$

$$\sup_{t>0} \left(\int_0^t u^q(s) \left(\int_0^s \rho^{-1}(x) x^{l-m} (s-x)^{m-1}\, dx \right)^q ds \right)^{\frac{1}{q}} \times \left(\int_t^\infty v^{-p'}(y) y^{p'(k-l-1)}\, dy \right)^{\frac{1}{p'}} < \infty. \tag{5}$$

Доказательство. Пусть $D_\rho^k g(t) = F(t)$. Применяя условия (2) и (3), получим

$$g(t) = B \int_0^t \int_\tau^\infty F(s)(s-\tau)^{k-l-1} \int_\tau^t \rho^{-1}(x)(x-\tau)^{l-m-1}(t-x)^{m-1}\, dx ds d\tau,$$

где $B = (-1)^{k-l}/(k-l-1)!(l-m-1)!(m-1)!$.

Разбивая с учетом $0 < \tau \le t < \infty$ второй интеграл полученного выражения на два, по теореме Фубини имеем

$$g(t) = B\Bigg(\int_0^t F(s)\int_0^s (s-\tau)^{k-l-1}\int_\tau^t \rho^{-1}(x)(x-\tau)^{l-m-1}(t-x)^{m-1}\,dxd\tau ds + \int_t^\infty F(s)\int_0^t (s-\tau)^{k-l-1}\int_\tau^t \rho^{-1}(x)(x-\tau)^{l-m-1}(t-x)^{m-1}\,dxd\tau ds\Bigg).$$

Вновь разбивая в силу $0 < \tau \le s \le t < \infty$ третий интеграл первого слагаемого и переставляя порядок интегрирования, приходим к равенству

$$g(t) = B\Bigg(\int_0^t F(s)\int_0^s \rho^{-1}(x)(t-x)^{m-1}\int_0^x (s-\tau)^{k-l-1}(x-\tau)^{l-m-1}\,d\tau dxds + \int_0^t F(s)\int_s^t \rho^{-1}(x)(t-x)^{m-1}\int_0^s (s-\tau)^{k-l-1}(x-\tau)^{l-m-1}\,d\tau dxds + \int_t^\infty F(s)\int_0^t \rho^{-1}(x)(t-x)^{m-1}\int_0^x (s-\tau)^{k-l-1}(x-\tau)^{l-m-1}\,d\tau dxds\Bigg).$$

Легко показать, что

$$\int_0^x (s-\tau)^{k-l-1}(x-\tau)^{l-m-1}\,d\tau \approx s^{k-l-1}x^{l-m}, \quad 0 < x \le s < \infty, \tag{6}$$

$$\int_0^s (s-\tau)^{k-l-1}(x-\tau)^{l-m-1}\,d\tau \approx s^{k-l}x^{l-m-1}, \quad 0 < s \le x < \infty. \tag{7}$$

Поскольку $0 < t \le s \le x < \infty$, первое слагаемое g можно разделить на два слагаемых. Значит, на основании (6) и (7) функция g эквивалентна следующему выражению:

$$g(t) \approx \int_0^t F(s)\int_0^s \rho^{-1}(x)(t-s)^{m-1}s^{k-l-1}x^{l-m}\,dxds + \int_0^t F(s)\int_0^s \rho^{-1}(x)(s-x)^{m-1}s^{k-l-1}x^{l-m}\,dxds + \int_0^t F(s)\int_s^t \rho^{-1}(x)(t-x)^{m-1}s^{k-l}x^{l-m-1}\,dxds + \int_t^\infty F(s)\int_0^t \rho^{-1}(x)(t-x)^{m-1}s^{k-l-1}x^{l-m}\,dxds.$$

Обозначим

$$\mathbf{K}_1F(t)=\int\limits_0^t F(s)\int\limits_0^s \rho^{-1}(x)(t-s)^{m-1}s^{k-l-1}x^{l-m}\,dxds,$$

$$\mathbf{K}_2F(t)=\int\limits_0^t F(s)\int\limits_0^s \rho^{-1}(x)(s-x)^{m-1}s^{k-l-1}x^{l-m}\,dxds,$$

$$\mathbf{K}_3F(t)=\int\limits_0^t F(s)\int\limits_s^t \rho^{-1}(x)(t-x)^{m-1}s^{k-l}x^{l-m-1}\,dxds,$$

$$\mathbf{K}_4F(t)=\int\limits_t^\infty F(s)\int\limits_0^t \rho^{-1}(x)(t-x)^{m-1}s^{k-l-1}x^{l-m}\,dxds.$$

Следовательно, выполнение неравенства (1) равносильно выполнению следующих неравенств:

$$\|\mathbf{K}_1F\|_{q,u}\le C_1\|F\|_{p,v}, \tag{8}$$

$$\|\mathbf{K}_2F\|_{q,u}\le C_2\|F\|_{p,v}, \tag{9}$$

$$\|\mathbf{K}_3F\|_{q,u}\le C_3\|F\|_{p,v}, \tag{10}$$

$$\|\mathbf{K}_4F\|_{q,u}\le C_4\|F\|_{p,v}. \tag{11}$$

Исследуем каждую из полученных оценок (8)–(11) отдельно.

Начнем с неравенства (8). Положим

$$s^{k-l-1}F(s)\int\limits_0^s \rho^{-1}(x)x^{l-m}\,dx=\Phi(s).$$

Тогда (8) перепишется так:

$$\left(\int\limits_0^\infty\left(u(t)\int\limits_0^t (t-s)^{m-1}\Phi(s)\,ds\right)^q dt\right)^{\frac1q}$$
$$\le C_1\left(\int\limits_0^\infty\left(\Phi(s)\left[v(s)s^{l-k+1}\left(\int\limits_0^s \rho^{-1}(x)x^{l-m}\,dx\right)^{-1}\right]\right)^p ds\right)^{\frac1p}. \tag{8$'$}$$

Очевидно, что в силу теоремы A неравенство (8$'$) (или (8)) имеет место тогда и только тогда, когда

$$A_1=\sup_{t>0}\left(\int\limits_t^\infty u^q(s)(s-t)^{q(m-1)}\,ds\right)^{\frac1q}$$
$$\times\left(\int\limits_0^t v^{-p'}(s)s^{p'(k-l-1)}\left(\int\limits_0^s \rho^{-1}(x)x^{l-m}\,dx\right)^{p'} ds\right)^{\frac1{p'}}<\infty,$$

$$A_2 = \sup_{t>0} \left(\int_t^\infty u^q(s)\,ds \right)^{\frac{1}{q}}$$
$$\times \left(\int_0^t v^{-p'}(s) s^{p'(k-l-1)} (t-s)^{p'(m-1)} \left(\int_0^s \rho^{-1}(x) x^{l-m}\,dx \right)^{p'} ds \right)^{\frac{1}{p'}} < \infty.$$

Переходим к оценке (9). Положим

$$s^{k-l-1} F(s) \int_0^s \rho^{-1}(x)(s-x)^{m-1} x^{l-m}\,dx = \Psi(s).$$

Тогда неравенство (9) будет иметь вид

$$\left(\int_0^\infty \left(u(t) \int_0^t \Psi(s)\,ds \right)^q dt \right)^{\frac{1}{q}}$$
$$\le C_2 \left(\int_0^\infty \left(\Psi(s) \left[v(s) s^{l-k+1} \left(\int_0^s \rho^{-1}(x)(s-x)^{m-1} x^{l-m}\,dx \right)^{-1} \right] \right)^p ds \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (9')$$

Неравенство (9′) является простым неравенством Харди, для выполнения которого необходимо и достаточно соотношение (см., например, [12])

$$A_3 = \sup_{t>0} \left(\int_t^\infty u^q(s)\,ds \right)^{\frac{1}{q}}$$
$$\left(\int_0^t v^{-p'}(s) s^{p'(k-l-1)} \left(\int_0^s \rho^{-1}(x) x^{l-m} (s-x)^{m-1}\,dx \right)^{p'} ds \right)^{\frac{1}{p'}} < \infty.$$

Рассмотрим неравенство (10). Для нахождения необходимых и достаточных условий справедливости (10) покажем, что ядро

$$K_2(t,s) = \int_s^t \rho^{-1}(x)(t-x)^{m-1} x^{l-m-1}\,dx$$

принадлежит классу H^2, определенному в теореме B:

$$K_2(t,s) = \int_s^t \rho^{-1}(x)(t-x)^{m-1} x^{l-m-1}\,dx$$
$$= \int_s^\tau \rho^{-1}(x)(t-x)^{m-1} x^{l-m-1}\,dx + \int_\tau^t \rho^{-1}(x)(t-x)^{m-1} x^{l-m-1}\,dx$$
$$= K_2(t,\tau) + \int_s^\tau \rho^{-1}(x)(t-\tau+\tau-x)^{m-1} x^{l-m-1}\,dx$$

$$\approx K_2(t,\tau) + (t-\tau)^{m-1} \int\limits_s^\tau \rho^{-1}(x) x^{l-m-1}\,dx + \int\limits_s^\tau \rho^{-1}(x)(\tau - x)^{m-1} x^{l-m-1}\,dx$$

$$= K_2(t,\tau) + (t-\tau)^{m-1} \int\limits_s^\tau \rho^{-1}(x) x^{l-m-1}\,dx + K_2(\tau, s).$$

Положим для этого случая

$$K_1(\tau,s) = \int\limits_s^\tau \rho^{-1}(x) x^{l-m-1}\,dx, \quad K_{1,2}(t,\tau) = (t-\tau)^{m-1}.$$

Так как для $0 < s \le y \le \tau < \infty$ имеем $K_1(\tau,s) = K_1(\tau,y) + K_1(y,s)$, то $K_1(\tau,s) \in H_1$, значит, последнее преобразование и принятые для него обозначения показывают выполнение условия (a) теоремы B.

Условие (b) теоремы B в данном случае — это справедливость неравенства

$$K_{1,2}(t,\tau) \le d_{2,1} K_{1,2}(z,s),$$

которое с учетом $0 < s \le \tau \le t \le z < \infty$ очевидно.

Таким образом, $K_2(t,s) \in H^2$, из чего следует, что неравенство (10) имеет место тогда и только тогда, когда

$$A_4 = \sup_{t>0} \left(\int\limits_t^\infty u^q(s) \left(\int\limits_t^s \rho^{-1}(x) x^{l-m-1} (s-x)^{m-1}\,dx \right)^q ds \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int\limits_0^t v^{-p'}(s) s^{p'(k-l)}\,ds \right)^{\frac{1}{p'}} < \infty,$$

$$A_5 = \sup_{t>0} \left(\int\limits_t^\infty u^q(s)(s-t)^{q(m-1)}\,ds \right)^{\frac{1}{q}} \times \left(\int\limits_0^t v^{-p'}(s) s^{p'(k-l)} \left(\int\limits_s^t \rho^{-1}(x) x^{l-m-1}\,dx \right)^{p'} ds \right)^{\frac{1}{p'}} < \infty,$$

$$A_6 = \sup_{t>0} \left(\int\limits_t^\infty u^q(s)\,ds \right)^{\frac{1}{q}} \times \left(\int\limits_0^t v^{-p'}(s) s^{p'(k-l)} \left(\int\limits_s^t \rho^{-1}(x) x^{l-m-1} (t-x)^{m-1}\,dx \right)^{p'} ds \right)^{\frac{1}{p'}} < \infty.$$

Объединяя A_1–A_6, получим выражение, конечность которого требуется в условии (4), т. е. для выполнения неравенств (8)–(10) необходимо и достаточно выполнение условия (4).

Неравенство (11) является простым неравенством Харди, для выполнения которого необходимо и достаточно условие (5) (см., например, [12]). Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Пусть $1 < p \le q < \infty$, $k \ge 3$, $1 \le l < m < k$. Пусть функция g удовлетворяет условиям* (2), (3). *Тогда неравенство* (1) *имеет место с константой $C > 0$, не зависящей от g, в том и только в том случае, если*

$$\sup_{t>0}\left(\int_t^\infty v^{-p'}(y)\left(\int_0^t u^q(s)\left(\int_0^y \rho^{-1}(x)(y-x)^{n-1}\varphi(s,x)\,dx\right)^q ds\right)^{\frac{p'}{q}} dy\right)^{\frac{1}{p'}} < \infty, \tag{12}$$

где $\varphi(s,x) = \begin{cases} x^{m-l}s^{l-1}, & x \le s, \\ x^{m-l-1}s^l, & x > s, \end{cases}$

$$\sup_{t>0}\left(\int_t^\infty u^q(y)y^{q(l-1)}\,dy\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_0^t v^{-p'}(s)\left(\int_0^s \rho^{-1}(x)x^{m-l}(s-x)^{n-1}\,dx\right)^{p'} ds\right)^{\frac{1}{p'}} < \infty. \tag{13}$$

Доказательство. Пусть $D_\rho^k g(t) = F(t)$. Тогда в силу условий (2) и (3) имеем

$$g(t) = B\int_0^t (t-s)^{l-1}\int_s^\infty \rho^{-1}(x)(x-s)^{m-l-1}\int_x^\infty (\tau-x)^{n-1}F(\tau)\,d\tau dx ds,$$

где $B = (-1)^{k-l}/(n-1)!(m-l-1)!(l-1)!$.

Рассуждая, как и в доказательстве теоремы 1, получим, что функция g эквивалентна следующему выражению:

$$\begin{aligned} g(t) \approx t^{l-1}\int_0^t F(\tau)\int_0^\tau \rho^{-1}(x)(\tau-x)^{n-1}x^{m-l}\,dxd\tau \\ + t^{l-1}\int_t^\infty F(\tau)\int_0^t \rho^{-1}(x)(\tau-t)^{n-1}x^{m-l}\,dxd\tau \\ + t^{l-1}\int_t^\infty F(\tau)\int_0^t \rho^{-1}(x)(t-x)^{n-1}x^{m-l}\,dxd\tau \\ + t^l\int_t^\infty F(\tau)\int_t^\tau \rho^{-1}(x)(\tau-x)^{n-1}x^{m-l-1}\,dxd\tau. \end{aligned}$$

Подставив это выражение вместо функции g в неравенство (1), получим четыре неравенства, одновременное выполнение которых равносильно выполнению (1).

Первое из неравенств является неравенством Харди, для выполнения которого необходимо и достаточно условие (13) (см., например, [12]).

Второе неравенство в силу теоремы А справедливо тогда и только тогда, когда

$$A_1 = \sup_{t>0}\left(\int_0^t u^q(s)s^{q(l-1)}\left(\int_0^s \rho^{-1}(x)x^{m-l}\,dx\right)^q (t-s)^{q(n-1)}\,ds\right)^{\frac{1}{q}} \times \left(\int_t^\infty v^{-p'}(s)\,ds\right)^{\frac{1}{p'}} < \infty,$$

$$A_2 = \sup_{t>0} \left(\int\limits_0^t u^q(s) s^{q(l-1)} \left(\int\limits_0^s \rho^{-1}(x) x^{m-l}\, dx \right)^q ds \right)^{\frac{1}{q}} \times \left(\int\limits_t^\infty v^{-p'}(s)(s-t)^{p'(n-1)}\, ds \right)^{\frac{1}{p'}} < \infty.$$

Третье неравенство опять является простым неравенством Харди, которое имеет место, если и только если (см., например, [12])

$$A_3 = \sup_{t>0} \left(\int\limits_0^t u^q(s) s^{q(l-1)} \left(\int\limits_0^s \rho^{-1}(x)(s-x)^{n-1} x^{m-l}\, dx \right)^q ds \right)^{\frac{1}{q}} \times \left(\int\limits_t^\infty v^{-p'}(s)\, ds \right)^{\frac{1}{p'}} < \infty.$$

Ядро

$$K_2(\tau,t) = \int\limits_t^\tau \rho^{-1}(x)(\tau-x)^{n-1} x^{m-l-1}\, dx$$

интегрального оператора четвертого неравенства принадлежит классу H^2 из теоремы B. Следовательно, для его выполнения необходимо и достаточно, чтобы

$$A_4 = \sup_{t>0} \left(\int\limits_0^t u^q(s) s^{ql}\, ds \right)^{\frac{1}{q}} \times \left(\int\limits_t^\infty v^{-p'}(s) \left(\int\limits_t^s \rho^{-1}(x)(s-x)^{n-1} x^{m-l-1}\, dx \right)^{p'} ds \right)^{\frac{1}{p'}} < \infty,$$

$$A_5 = \sup_{t>0} \left(\int\limits_0^t u^q(s) s^{ql} \left(\int\limits_s^t \rho^{-1}(x) x^{m-l-1}\, dx \right)^q ds \right)^{\frac{1}{q}} \times \left(\int\limits_t^\infty v^{-p'}(s)(s-t)^{p'(n-1)}\, ds \right)^{\frac{1}{p'}} < \infty,$$

$$A_6 = \sup_{t>0} \left(\int\limits_0^t u^q(s) s^{ql} \left(\int\limits_s^t \rho^{-1}(x)(t-x)^{n-1} x^{m-l-1}\, dx \right)^q ds \right)^{\frac{1}{q}} \times \left(\int\limits_t^\infty v^{-p'}(s)\, ds \right)^{\frac{1}{p'}} < \infty.$$

Объединяя выражения A_1–A_6, получим выражение, конечность которого требуется в условии (12). Теорема 2 доказана.

Теорема 3. *Пусть* $1 < p \le q < \infty$, $k \ge 2$, $1 \le m = l < k$. *Пусть функция* g *удовлетворяет условиям* (2), (3). *Тогда неравенство* (1) *имеет место с константой* $C > 0$, *не зависящей от* g, *в том и только в том случае, если*

$$\sup_{t>0}\left(\int_t^\infty u^q(y)\left(\int_0^t v^{-p'}(s)\left(\int_0^s \rho^{-1}(\tau)(y-\tau)^{m-1}(s-\tau)^{n-1}\,d\tau\right)^{p'} ds\right)^{\frac{q}{p'}} dy\right)^{\frac{1}{q}} < \infty, \tag{14}$$

$$\sup_{t>0}\left(\int_t^\infty v^{-p'}(y)\left(\int_0^t u^q(s)\left(\int_0^s \rho^{-1}(\tau)(y-\tau)^{n-1}(s-\tau)^{m-1}\,d\tau\right)^{q} ds\right)^{\frac{p'}{q}} dy\right)^{\frac{1}{p'}} < \infty. \tag{15}$$

Доказательство. Принимая $D_\rho^k g(t) = F(t)$, из условий (2) и (3) имеем

$$g(t) = B\int_0^t (t-\tau)^{m-1}\rho^{-1}(\tau)\int_\tau^\infty (s-\tau)^{n-1}F(s)\,ds d\tau,$$

где $B = (-1)^n/(n-1)!(m-1)!$.

Рассуждая, как и в первых двух случаях, получим

$$\begin{aligned} g(t) \approx \int_0^t F(s)\int_0^s \rho^{-1}(\tau)(t-s)^{m-1}(s-\tau)^{n-1}\,d\tau ds \\ + \int_0^t F(s)\int_0^s \rho^{-1}(\tau)(s-\tau)^{k-2}\,d\tau ds \\ + \int_t^\infty F(s)\int_0^t \rho^{-1}(\tau)(t-\tau)^{m-1}(s-t)^{n-1}\,d\tau ds \\ + \int_t^\infty F(s)\int_0^t \rho^{-1}(\tau)(t-\tau)^{k-2}\,d\tau ds. \end{aligned}$$

Подстановка полученного выражения в неравенство (1) приведет к четырем неравенствам.

Теорема A позволяет выписать необходимые и достаточные условия выполнения первого и третьего неравенств (первые два условия для первого неравенства, вторые два условия для третьего неравенства):

$$A_1 = \sup_{t>0}\left(\int_t^\infty u^q(s)(s-t)^{q(m-1)}\,ds\right)^{\frac{1}{q}} \times\left(\int_0^t v^{-p'}(s)\left(\int_0^s \rho^{-1}(\tau)(s-\tau)^{n-1}\,d\tau\right)^{p'} ds\right)^{\frac{1}{p'}} < \infty,$$

$$A_2 = \sup_{t>0} \left(\int_t^\infty u^q(s)\,ds \right)^{\frac{1}{q}} \times \left(\int_0^t v^{-p'}(s)(t-s)^{p'(m-1)} \left(\int_0^s \rho^{-1}(\tau)(s-\tau)^{n-1}\,d\tau \right)^{p'} ds \right)^{\frac{1}{p'}} < \infty,$$

$$A_3 = \sup_{t>0} \left(\int_0^t u^q(s)(t-s)^{q(n-1)} \left(\int_0^s \rho^{-1}(\tau)(s-\tau)^{m-1}\,d\tau \right)^{q} ds \right)^{\frac{1}{q}} \times \left(\int_t^\infty v^{-p'}(s)\,ds \right)^{\frac{1}{p'}} < \infty,$$

$$A_4 = \sup_{t>0} \left(\int_0^t u^q(s) \left(\int_0^s \rho^{-1}(\tau)(s-\tau)^{m-1}\,d\tau \right)^{q} ds \right)^{\frac{1}{q}} \times \left(\int_t^\infty v^{-p'}(s)(s-t)^{p'(n-1)}\,ds \right)^{\frac{1}{p'}} < \infty.$$

Второе и четвертое слагаемые приводят к простым неравенствам Харди, которые соответственно имеют место тогда и только тогда, когда (см., например, [12])

$$A_5 = \sup_{t>0} \left(\int_t^\infty u^q(s)\,ds \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^t v^{-p'}(s) \left(\int_0^s \rho^{-1}(\tau)(s-\tau)^{k-2}\,d\tau \right)^{p'} ds \right)^{\frac{1}{p'}} < \infty,$$

$$A_6 = \sup_{t>0} \left(\int_0^t u^q(s) \left(\int_0^s \rho^{-1}(\tau)(s-\tau)^{k-2}\,d\tau \right)^{q} ds \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_t^\infty v^{-p'}(s)\,ds \right)^{\frac{1}{p'}} < \infty.$$

Объединяя выражения A_1, A_2 и A_5, получим выражение, конечность которого требуется в условии (14), объединяя A_3, A_4 и A_6, получим выражение, конечность которого требуется в условии (15). Теорема 3 доказана.

3. Пример. Для иллюстрации основных результатов рассмотрим неравенство (1) для $\rho(t) = t^\gamma$, $u(t) = t^\lambda$ и $v(t) = t^\mu$.

Начнем со случая, когда $m < l$. С учетом $\rho(t) = t^\gamma$ перепишем внутренний интеграл выражения (4):

$$I = \int_0^y x^{-\gamma}(y-x)^{m-1}\varphi(s,x)\,dx = s^{k-l-1} \int_0^s x^{l-m-\gamma}(y-x)^{m-1}\,dx + s^{k-l} \int_s^y x^{l-m-\gamma-1}(y-x)^{m-1}\,dx.$$

Оценим I снизу:

$$I \le s^{k-l}\int\limits_0^s \frac{x^{l-m-\gamma}}{x}(y-x)^{m-1}\,dx + s^{k-l}\int\limits_s^y x^{l-m-\gamma-1}(y-x)^{m-1}\,dx$$

$$= s^{k-l}\int\limits_0^y x^{l-m-\gamma-1}(y-x)^{m-1}\,dx.$$

Последовательно интегрируя по частям, имеем

$$\int\limits_0^y x^{l-m-\gamma-1}(y-x)^{m-1}\,dx$$

$$= (y-x)^{m-1}\frac{x^{l-m-\gamma}}{l-m-\gamma}\Big|_0^y + \frac{m-1}{l-m-\gamma}\int\limits_0^y x^{l-m-\gamma}(y-x)^{m-2}\,dx$$

$$= \dots = \frac{(m-1)!}{(l-m-\gamma)(l-m-\gamma+1)\dots(l-\gamma-2)}\int\limits_0^y x^{l-\gamma-2}\,dx = c_1\,y^{l-\gamma-1},$$

где $c_1 = (m-1)!/(l-m-\gamma)(l-m-\gamma+1)\dots(l-\gamma-1)$. Отсюда

$$I \le c_1 s^{k-l} y^{l-\gamma-1}.$$

Оценим I сверху. Интегрирование по частям дает

$$I \ge \frac{s^{k-l}}{y}\int\limits_0^s x^{l-m-\gamma}(y-x)^{m-1}\,dx + s^{k-l}\int\limits_s^y \frac{x^{l-m-\gamma}}{y}(y-x)^{m-1}\,dx$$

$$= \frac{s^{k-l}}{y}\int\limits_0^y x^{l-m-\gamma}(y-x)^{m-1}\,dx = c_2\frac{s^{k-l}}{y}y^{l-\gamma} = c_2 s^{k-l}y^{l-\gamma-1},$$

где $c_1 = (m-1)!/(l-m-\gamma)(l-m-\gamma+1)\dots(l-\gamma)$.

Таким образом,

$$I \approx s^{k-l}y^{l-\gamma-1}.$$

Тогда (4) будет иметь вид

$$\sup_{t>0}\left(\int\limits_t^\infty (y^{\lambda+l-\gamma-1})^q\,dy\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int\limits_0^t (s^{k-l-\mu})^{p'}\,ds\right)^{\frac{1}{p'}} < \infty,$$

что равносильно соотношениям

$$(\lambda+l-\gamma-1)q+1<0, \quad (k-l-\mu)p'+1>0, \quad \lambda-\gamma+k-\mu+\frac{1}{q}-\frac{1}{p}=0. \quad (16)$$

Условие (5) перепишется следующим образом:

$$\sup_{t>0}\left(\int\limits_0^t (y^{\lambda+l-\gamma})^q\,dy\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int\limits_t^\infty (s^{k-l-\mu-1})^{p'}\,ds\right)^{\frac{1}{p'}} < \infty,$$

что эквивалентно выполнению соотношений

$$(\lambda+l-\gamma)q+1>0, \quad (k-l-\mu-1)p'+1<0, \quad \lambda-\gamma+k-\mu+\frac{1}{q}-\frac{1}{p}=0. \quad (17)$$

Находя пересечение условий (16) и (17), получим

Утверждение 1. *Пусть* $1 < p \le q < \infty$, $k \ge 3$, $1 \le m < l < k$. *Пусть* $\rho(t) = t^\gamma$, $u(t) = t^\lambda$ *и* $v(t) = t^\mu$ *и функция* g *удовлетворяет условиям* (2), (3). *Тогда неравенство* (1) *имеет место с константой* $C > 0$, *не зависящей от* g, *в том и только в том случае, если*

$$\begin{gathered} -l - \frac{1}{q} + \gamma < \lambda < -l - \frac{1}{q} + \gamma + 1, \\ k - l - \frac{1}{p} < \mu < k - l - \frac{1}{p} + 1, \quad \lambda - \gamma + k - \mu + \frac{1}{q} - \frac{1}{p} = 0. \end{gathered} \tag{18}$$

Рассуждая аналогично и в случаях, когда $m > l$ и $m = l$, имеем соответственно

Утверждение 2. *Пусть* $1 < p \le q < \infty$, $k \ge 3$, $1 \le l < m < k$. *Пусть* $\rho(t) = t^\gamma$, $u(t) = t^\lambda$ *и* $v(t) = t^\mu$ *и функция* g *удовлетворяет условиям* (2), (3). *Тогда неравенство* (1) *имеет место с константой* $C > 0$, *не зависящей от* g, *в том и только в том случае, если*

$$\begin{gathered} -l - \frac{1}{q} < \lambda < -l - \frac{1}{q} + 1, \\ k - l - \frac{1}{p} - \gamma < \mu < k - l - \frac{1}{p} - \gamma + 1, \quad \lambda - \gamma + k - \mu + \frac{1}{q} - \frac{1}{p} = 0. \end{gathered} \tag{19}$$

Утверждение 3. *Пусть* $1 < p \le q < \infty$, $k \ge 2$, $1 \le m = l < k$. *Пусть* $\rho(t) = t^\gamma$, $u(t) = t^\lambda$ *и* $v(t) = t^\mu$ *и функция* g *удовлетворяет условиям* (2), (3). *Тогда неравенство* (1) *имеет место с константой* $C > 0$, *не зависящей от* g, *в том и только в том случае, если*

$$\begin{gathered} -l - \frac{1}{q} + \gamma < \lambda < -l - \frac{1}{q} + 1, \\ k - l - \frac{1}{p} < \mu < k - l - \frac{1}{p} - \gamma + 1, \quad \lambda - \gamma + k - \mu + \frac{1}{q} - \frac{1}{p} = 0. \end{gathered} \tag{20}$$

Замечание. На представленных рисунках дана иллюстрация условий (18)–(20) относительно параметров λ и μ при некоторых фиксированных γ. Первые два условия из (18)–(20) показывают области изменения λ и μ соответственно. Пересечением этих областей в каждом из трех случаев является квадрат. Третье условие из (18)–(20) дает то, что (1) справедливо тогда и только тогда, когда λ и μ лежат на диагоналях соответствующих квадратов. При $|\gamma| \ge 1$ (рис. 1 и 2) диагонали квадратов (18) и (19) не имеют общих точек. Более того, при $\gamma \ge 1$ (рис. 2) квадрата, который описывается условием (20), не существует. Если же $|\gamma| < 1$ (рис. 3 и 4), то диагонали квадратов (18)–(20) имеют общий отрезок. Отсюда вытекают следующие выводы.

1. В случае $|\gamma| \ge 1$ не существует таких λ и μ, при которых условия (18) и (19) были бы корректны одновременно, т. е. если неравенство (1) выполняется при $m < l$, то оно не выполняется при $m > l$, и наоборот. Более того, при $\gamma \ge 1$ условие (20) не имеет места ни при каких λ и μ. Это означает, что при $|\gamma| \ge 1$ место веса $\rho(t) = t^\gamma$ в дифференциальной операции $D^k_\rho g$ существенно влияет на выполнение оценки (1).

2. Если $|\gamma| < 1$, то условия (18)–(20) имеют пересечение, т. е. можно найти такие λ и μ, при которых неравенство (1) справедливо для всех трех случаев $m < l$, $m > l$ и $m = l$. Значит, при таких $|\gamma| < 1$, λ и μ место веса $\rho(t) = t^\gamma$

Рис. 1.

Рис. 2.

Рис. 3.

Рис. 4.

в дифференциальной операции $D^k_\rho g$ не влияет на выполнение оценки (1). Но существуют и такие $|\gamma| < 1$, λ и μ, при которых неравенство (1) корректно при $m > l$, но не корректно при $m < l$, и наоборот. Для таких $|\gamma| < 1$, λ и μ справедливость неравенства (1) вновь будет зависеть от того, где в дифференциальной операции $D^k_\rho g$ расположен вес $\rho(t) = t^\gamma$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1977.
2. *Степанов В. Д.* Двухвесовые оценки интегралов Римана — Лиувилля // Изв. АН СССР, сер. мат. 1990. Т. 54, № 3. С. 645–654.
3. *Куфнер А., Хейниг Г. П.* Неравенство Харди для производных высших порядков // Тр. МИАН СССР. 1990. Т. 192. С. 105–113.
4. *Polya G.* Bemerkung zur Interpolation und zur Naherungstheorie der Balkenbieng // Z. Angew. Math. Mech. 1931. Bd 11. S. 445–449.
5. *Kufner A., Wannebo A.* Some remarks to the Hardy inequality for higher order derivatives // General Inequalities 6 (Oberwolfach, 1990). Basel: Birkhauser, 1992. P. 33–48. (Internat. Ser. Numer. Math.; 103).
6. *Kufner A.* Higher order Hardy inequalities // Bayreuth. Math. Schr. 1993. V. 44. P. 105–146.
7. *Sinnamon G.* Kufner's conjecture for higher order Hardy inequalities // Real Anal. Exchange. 1995/96. V. 21, N 2. P. 590–603.

8. *Gurka P.* Generalized Hardy inequalities for functions vanishing on both ends of the interval. 1987. (Preprint).

9. *Nasyrova M., Stepanov V. D.* On weighted Hardy inequalities on semiaxis for functions vanishing at the endpoints // J. Inequal. Appl. 1997. V. 1, N 3. P. 223–238.

10. *Nasyrova M., Stepanov V. D.* On maximal overdetermined Hardy's inequality of second order on a finite interval // Math. Bohem. 1999. V. 124. P. 293–302.

11. *Baideldinov B. L., Oinarov R.* Two-weighted estimation for operator of fractional integration operators of composition type // Докл. НАН РК. 1996. Т. 4. С. 19–22.

12. *Opic B., Kufner A.* Hardy-type inequalities. Harlow: Longman Scientific and Technical, 1990. (Pitman Research Notes in Math. Series).

Статья поступила 16 июня 2003 г.

Калыбай Айгерим Айсултанкызы
Институт математики МОиН Республики Казахстан
ул. Пушкина, 125, Алма-Ата 480100, Казахстан
aigerim_k@academset.kz