Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2004. Том 45, № 3

УДК 519.4

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ РЕГУЛЯРНЫЕ КОЛЬЦА. II

Ю. Л. Ершов

Аннотация: Известный результат Барриса и Вернера о существовании определяющих последовательностей для элементарных произведений моделей распространяется на любые обогащения булевых алгебр (получен полный аналог теоремы Фефермана — Вота). Это позволяет установить разрешимость элементарной теории классического объекта теории чисел — кольца адéлей.

Ключевые слова: элементарное произведение, определяющая последовательность, элементарное регулярное кольцо, кольцо адéлей.

В работе будут расширены результаты об элементарных регулярных кольцах, полученные в [1]. В первой части известный результат об элементарных произведениях моделей [2, теорема 4.1] распространяется (полная форма теоремы Фефермана — Вота из [3]) на произвольные обогащения булевой алгебры (на примере элементарных регулярных колец). Во второй части получены нужные для применения результаты об элементарной эквивалентности обогащенных булевых алгебр. В последней части основным результатом является доказательство разрешимости элементарной теории классического объекта теории чисел — кольца адéлей.

1. Напомним ряд основных определений.

Пусть X — булево пространство, т. е. компактное хаусдорфово вполне несвязное топологическое пространство; $\mathfrak{M}_\xi$, $\xi \in X$, — семейство алгебраических систем некоторой фиксированной сигнатуры σ.

Через $B(X)$ будем обозначать булеву алгебру открыто-замкнутых подмножеств X.

Подпрямое произведение $\mathfrak{M} \leq \prod\limits_{\xi\in X} \mathfrak{M}_\xi$ называется *элементарным* (*булевым*), если выполнены следующие два условия:

1) для любых $f, g \in |\mathfrak{M}|$ и любого открыто-замкнутого подмножества $Y \subseteq X$ в $|\mathfrak{M}|$ существует элемент h такой, что $h \upharpoonright Y = f \upharpoonright Y$ и $h \upharpoonright (X \setminus Y) = g \upharpoonright (X \setminus Y)$;

2) для любой (бескванторной) формулы $\varphi(x_0, \dots, x_{n-1})$ сигнатуры σ и любых $f_0, \dots, f_{n-1} \in |\mathfrak{M}|$ множество

$$[\![\varphi(f_0, \dots, f_{n-1})]\!]_X \rightleftharpoons \{\xi | \mathfrak{M}_\xi \models \varphi(f_0(\xi), \dots, f_{n-1}(\xi)),\ \xi \in X\}$$

является открыто-замкнутым, т. е. $[\![\varphi(\bar{f})]\!]_X \in B(X)$.

В дальнейшем индекс X в обозначении $[\![\varphi(\bar{f})]\!]_X$ будет опускаться.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 99–01–0600), Совета по грантам Президента РФ и государственной поддержки ведущих научных школ (грант №00–15–96184) и программы «Университеты России — фундаментальные исследования».

Пусть R — регулярное (коммутативное) кольцо. Тогда через $B(R)$ будем обозначать булеву алгебру идемпотентов кольца R, а через X_R — стоуновское пространство булевой алгебры $B(R)$. Тогда R вкладывается как булево произведение в прямое произведение $\prod\limits_{\xi\in X_R} R_\xi$, где $R_\xi \rightleftharpoons R/(\xi)$ — фактор-поле кольца R по максимальному идеалу (ξ), порожденному семейством идемпотентов $\xi \subseteq B(R) \subseteq R$ (ξ — максимальный идеал булевой алгебры $B(R)$).

Элементарным регулярным кольцом является всякое (регулярное) кольцо, изоморфное элементарному произведению полей. Класс $\mathscr{E}$ всех таких колец изучался в [1].

Пример. Любое прямое произведение $R = \prod\limits_{i\in I} F_i$ полей является регулярным элементарным кольцом, и $B(R) \cong \mathscr{P}(I)$ — булева алгебра всех подмножеств множества индексов I.

В работе [1] в доказательстве теоремы 2 указано, как по любой формуле $\varphi(\bar{x})$ сигнатуры теории колец можно эффективно построить формулу $E_\varphi(\bar{x}; y)$ такую, что для любого элементарного регулярного кольца R ($R \in \mathscr{E}$) и любого набора элементов $\bar{a}, e \in R$ справедлива следующая эквивалентность:

$$R \models E_\varphi(\bar{a}; e) \Longleftrightarrow e = [\![\varphi(\bar{a})]\!].$$

Более того, система предложений $A_\varphi \rightleftharpoons \forall\bar{x}\exists y E_\varphi(\bar{x}; y)$, $\varphi(\bar{x})$ — формула языка теории колец (вместе с аксиомой регулярности коммутативного кольца с единицей), и является системой аксиом для класса $\mathscr{E}$ [1, теорема 3].

Отмеченная выше форма теоремы Фефермана — Вота [1, предложение 1] имеет в качестве одного из интересных следствий в применении к кольцам из $\mathscr{E}$ следующее.

Пусть $R \in \mathscr{E}$, $B(R) \subseteq R$ — булева алгебра идемпотентов R; для любого предложения φ сигнатуры теории колец обозначим через τ_φ^R тот единственный элемент e из $B(R)$, для которого выполнено $R \models E_\varphi(e)$. Введя в языке булевых алгебр константы τ_φ для любого предложения ϕ, получаем соответствующее обогащение $\mathscr{B}(R) = \langle B(R),\ \tau_\varphi^R \mid \varphi$ — предложение сигнатуры теории колец$\rangle$, которое формульно определимо в R.

Замечание. Иногда полезно и бóльшее обогащение; а именно, для любой формулы $\varphi(x_0 \dots x_{n-1})$ языка сигнатуры теории колец σ_R и любого набора элементов $r_0, \dots, r_{n-1} \in R$ вводится константа $\tau_{\varphi,\bar{r}}^R$, значением которой является тот элемент e из $B(R)$, для которого справедливо $R \models E_\varphi(\bar{a}; e)$ ($e = [\![\varphi(\bar{a})]\!]$).

Следствие 1. (а) *Пусть $R, R' \in \mathscr{E}$; тогда справедлива следующая эквивалентность:*

$$R \equiv R' \Longleftrightarrow \mathscr{B}(R) \equiv \mathscr{B}(R').$$

(б) *Пусть $R \in \mathscr{E}$; теория $\mathrm{Th}(R)$ кольца R разрешима тогда и только тогда, когда теория $\mathrm{Th}(\mathscr{B}(R))$ обогащенной булевой алгебры $\mathscr{B}(R)$ разрешима.*

(в) *Пусть $R, R' \in \mathscr{E}$, $R \leq R'$, $\mathscr{B}'(R) \rightleftharpoons \langle B(R), \tau_{\varphi,\bar{r}}^R \mid \varphi$ — формула сигнатуры σ_R, $\bar{r} \in R)$; $\mathscr{B}'(R') \rightleftharpoons \langle B(R'), \tau_{\varphi,\bar{r}}^{R'} \mid \varphi$ — формула сигнатуры σ_R, $\bar{r} \in R\rangle$, тогда $R \preceq R' \Longleftrightarrow \mathscr{B}'(R) \preceq \mathscr{B}'(R')$.* $\square$

Замечание. Для приложений к вопросам разрешимости элементарных теорий это следствие полезно тем, что вопросы элементарной эквивалентности для (обогащенных) булевых алгебр решаются часто проще.

Цель настоящего раздела — показать, что для колец R из $\mathscr{E}$ и произвольных обогащений $\mathscr{B}' = \langle B(R), P, \dots \rangle$ булевой алгебры $B(R)$ идемпотентов возможно эффективное построение определяющей последовательности с сохранением справедливости теоремы Фефермана — Вота.

Для примера рассмотрим простейший случай, когда на $B(R)$ задан одноместный предикат P; так как $B(R) \subseteq R$, то P задан и на R. Для наглядности будем использовать два вида переменных: переменные $x, x_0, x_1, \dots$ для элементов из R и переменные $e, e', e_0, e'_0, e_1, e', \dots$ для элементов из $B(R)$.

Предложение 1. *Пусть $\varphi(\bar{x}; \bar{e})$ — формула языка сигнатуры $\sigma_R \cup \langle P^1 \rangle$ (с двумя сортами переменных). Тогда можно эффективно построить определяющую последовательность $\langle \Sigma(e'_0, \dots, e'_m; \bar{e});\ \psi_0(\bar{x}), \dots, \psi_m(\bar{x}) \rangle$, где Σ — формула языка $\sigma_B \cup \langle P \rangle$; $\psi_0, \dots, \psi_m$ — формулы языка σ_R, так что для любых $\bar{r} \in R$, $\bar{\alpha} \in B(R)$ выполнена следующая эквивалентность:*

$$\langle R, P \rangle \models \varphi(\bar{r}; \bar{\alpha}) \Longleftrightarrow \langle B(R), P \rangle \models \Sigma\big(\tau^R_{\psi_0, \bar{r}}, \dots, \tau^R_{\psi_m, \bar{r}}; \bar{\alpha}\big).$$

Не уменьшая общности, можно считать, что элементарные подформулы формулы $\varphi(\bar{x}; \bar{e})$ имеют вид $x_0 + x_1 = x_2$, $x_0 \cdot x_1 = x_2$, $x = 0$, $x = 1$, $P(e)$, $x = e$. Этого можно добиться, используя следующие эквивалентности: $P(x) \longleftrightarrow \exists e(P(e) \wedge x = e)$; $(e + x_0 = x_1) \longleftrightarrow \exists x(x + x_0 = x_1 \wedge e = x)$ и т. п.

Определяющие последовательности для элементарных формул, содержащих переменную (вида) e, строятся так:

для $P(e)$ — $\langle \Sigma(e) \rangle$, где $\Sigma(e) \rightleftharpoons P(e)$;

для $x = e$ — $\langle \Sigma(e'_0, e'_1, e'_2; e);\ \psi_0(x), \psi_1(x), \psi_2(x) \rangle$,

где

$$\Sigma(e'_0, e'_1, e'_2; e) \rightleftharpoons (e'_0 = 1 \wedge e'_1 \geq e \wedge e'_2 \geq c(e));$$
$$\psi_0(x) \rightleftharpoons (x = x), \quad \psi_1(x) \rightleftharpoons (x = 1), \quad \psi_2(x) \rightleftharpoons (x = 0).$$

Определяющие последовательности для элементарных формул, не содержащих переменных вида e, строятся, как обычно.

Далее определяющие последовательности можно построить по индукции в точности так же, как обычно. Нужно лишь указать, как строить такую последовательность для формул вида $\varphi(\bar{x}, \bar{e}) = \exists e \varphi_0(\bar{x}; e, \bar{e})$.

Пусть $\langle \Sigma_0(\bar{x}; e, \bar{e});\ \psi_0(\bar{x}), \dots, \psi_m(\bar{x}) \rangle$ — определяющая последовательность для формулы $\varphi_0(\bar{x}; e, \bar{e})$, тогда определяющей последовательностью для $\varphi(\bar{x}, \bar{e})$ будет $\langle \exists e \Sigma_0(\bar{x}; e, \bar{e});\ \psi_0(\bar{x}), \dots, \psi_m(\bar{x}) \rangle$. Проверим, что это действительно определяющая последовательность для $\varphi(\bar{x}, \bar{e})$.

Пусть $\bar{r} \in R$, $\bar{\alpha} \in B(R)$ таковы, что $\langle R, P \rangle \models \varphi(\bar{r}; \bar{\alpha}) (= \exists e \varphi_0(\bar{r}; e, \bar{\alpha}))$; пусть $\alpha \in B(R)$ такой, что $\langle R, P \rangle \models \varphi_0(\bar{r}; \alpha, \bar{\alpha})$; тогда

$$\langle B(R), P \rangle \models \Sigma_0\big(\tau^R_{\psi_0, \bar{r}}, \dots, \tau^R_{\psi_m, \bar{r}}; \alpha, \bar{\alpha}\big);$$

следовательно, $\langle B(R), P \rangle \models \exists e \Sigma_0\big(\tau^R_{\psi_0, \bar{r}}, \dots; e, \bar{\alpha}\big)$.

Обратно, пусть

$$\langle B(R), P \rangle \models \exists e \Sigma_0\big(\tau^R_{\psi_0, \bar{r}}, \dots, \tau^R_{\psi_m, \bar{r}}; e, \bar{\alpha}\big),$$

и пусть $\alpha \in B(R)$ такой, что

$$\langle B(R), P \rangle \models \Sigma_0\big(\tau^R_{\psi_0, \bar{r}}, \dots, \tau^R_{\psi_m, \bar{r}}; \alpha, \bar{\alpha}\big);$$

но тогда

$$\langle R, P \rangle \models \varphi_0(\bar{r}; \alpha, \bar{\alpha}),\ \langle R, P \rangle \models \varphi(\bar{r}; \bar{\alpha})\ (= \exists e \varphi_0(\bar{r}; e, \bar{\alpha})).$$

Предложение доказано. $\square$

Следствие. (а) *Пусть* $R, R' \in \mathscr{E}$, $P \subseteq B(R)$, $P' \subseteq B(R')$; *тогда имеет место эквивалентность* $\langle R, P\rangle \equiv \langle R', P'\rangle \iff \langle \mathscr{B}(R), P\rangle = \langle B(R), P; \tau_\psi^R \mid \psi$ — *предложение сигнатуры* $\sigma_R\rangle \equiv \langle \mathscr{B}(R'), P'\rangle = \big\langle B(R'), P';\ \tau_\psi^{R'} \mid \psi$ — *предложение сигнатуры* $\sigma_R\big\rangle$.

(б) *Пусть* $R \in \mathscr{E}$, $P \subseteq B(R)$; *элементарная теория* $\mathrm{Th}(R, P)$ *разрешима тогда и только тогда, когда разрешима элементарная теория* $\mathrm{Th}(\mathscr{B}(R), P)$. $\square$

Замечание. Нетрудно видеть, что предложение и следствия (а), (б) справедливы для любого обогащения $B(R)$ (следствие (б) справедливо для обогащения вычислимой сигнатуры).

2. В этом разделе рассмотрим элементарные теории некоторых обогащений булевых алгебр.

Пусть B_0 — фиксированная булева алгебра; пусть $\sigma = \sigma_B \cup \langle I^1, \tau_b \mid b \in B_0\rangle$ — расширение сигнатуры $\sigma_B = \langle \cup, \cap, c, 0, 1\rangle$ булевых алгебр одноместным предикатным символом I и семейством констант τ_b, $b \in B_0$.

Нас будут интересовать системы $\mathscr{B} = \big\langle B, I^B, \tau_b^B | b \in B_0\big\rangle$ сигнатуры σ, удовлетворяющие следующим условиям:

1) B — булева алгебра;

2) $I^B \subseteq B$ — идеал булевой алгебры;

3) $\tau_0^B = 0^B$, $\tau_1^B = 1^B$; $\tau_{b_0 \cup b_1}^B = \tau_{b_0}^B \cup \tau_{b_1}^B$, $\tau_{b_0 \cap b_1}^B = \tau_{b_0}^B \cap \tau_{b_1}^B$, $\tau_{c(b)}^B = c\big(\tau_b^B\big)$ для любых $b_0, b_1, b \in B_0$.

Класс $\mathscr{B}B$ таких систем аксиоматизируем в сигнатуре σ_B.

Имеет место следующий аналог предложения 1 из [4].

Предложение 2. *Пусть* $\mathscr{B}$ *и* $\mathscr{B}' = \big\langle B', I^{B'}, \tau_b^{B'} \mid b \in B_0\big\rangle$ — *системы из* $\mathscr{B}B$. *Эти системы элементарно эквивалентны* ($\mathscr{B} \equiv \mathscr{B}'$) *тогда и только тогда, когда для любого* $b \in B_0$ *элементарно эквивалентны булевы алгебры с идеалами* $\big\langle \widehat{\tau_b^B}, I \cap \widehat{\tau_b^B}\big\rangle$ *и* $\big\langle \widehat{\tau_b^{B'}}, I \cap \widehat{\tau_b^{B'}}\big\rangle$.

Доказательство аналогично доказательству предложения 1 в [4]. Нужно использовать легко проверяемый факт: для любого $b \in B$

$$\langle B, I\rangle \backsimeq \langle \hat{b}, I \cap \hat{b}\rangle \times \langle \widehat{c(b)}, I \cap \widehat{c(b)}\rangle. \quad \square$$

Определим последовательность отношений эквивалентности на классе булевых алгебр с выделенным идеалом:

$$\langle B, I\rangle \sim_0 \langle B', I'\rangle \rightleftharpoons (1^B = 0^B \iff 1^{B'} = 0^{B'}) \wedge (1^B \in I \iff 1^{B'} \in I').$$

Далее по индукции. Пусть отношение $\sim_n$ уже определено, тогда

$$\begin{aligned}\langle B, I\rangle \sim_{n+1} \langle B', I'\rangle \rightleftharpoons {} & \forall b \in B \exists\, b' \in B' (\langle \hat{b}, I \cap \hat{b}\rangle \sim_n \langle \hat{b}', I \cap \hat{b}'\rangle \\ & \wedge \langle \widehat{c(b)}, I \cap \widehat{c(b)}\rangle \sim_n \langle \widehat{c(b')}, I \cap \widehat{c(b')}\rangle) \wedge \forall b' \in B' \exists\, b \in B (\langle \hat{b}, I \cap \hat{b}\rangle \sim_n \langle \hat{b}', I \cap \hat{b}'\rangle \\ & \wedge \langle \widehat{c(b)}, I \cap \widehat{c(b)}\rangle \sim_n \langle \widehat{c(b')}, I \cap \widehat{c(b')}\rangle)).\end{aligned}$$

Нетрудно установить (ср. доказательство в [5]) следующий критерий элементарной эквивалентности.

Предложение 3. *Пусть* $\langle B, I\rangle$, $\langle B', I'\rangle$ — *булевы алгебры с выделенными идеалами. Тогда* $\langle B, I\rangle$ *элементарно эквивалентно* $\langle B', I'\rangle$ *в том и только в том случае, когда для любого* $n \in \omega$ *имеет место* $\langle B, I\rangle \sim_n \langle B', I'\rangle$. $\square$

Применим предложение 3 для доказательства следующего частного факта.

Предложение 4. *Пусть $\langle B, I\rangle$, $\langle B', I'\rangle$ — булевы алгебры с выделенными идеалами такие, что выполнены условия: B и B' — атомные булевы алгебры; $A(B) \subseteq I$, $A(B') \subseteq I'$* (здесь $A(B)$ $(A(B'))$ *— множество всех атомов алгебры $B(B')$); фактор-алгебры B/I и B'/I' — безатомные* (бесконечные) *булевы алгебры. Тогда $\langle B, I\rangle$ и $\langle B', I'\rangle$ элементарно эквивалентны.*

Для элемента b атомной булевой алгебры B пусть $|b| = \omega$, если под b имеется бесконечно много атомов, и $|b| = n$ $(\in \omega)$, если b — объединение точно n атомов $(|b| = 0 \Longleftrightarrow b = 0^B)$.

Покажем, что для любого $n \in \omega$ имеет место эквивалентность $\langle B, I\rangle \sim_n \langle B', I'\rangle$. Для $n = 0$ это очевидно.

Покажем, что $\langle B, I\rangle \sim_{n+1} \langle B', I'\rangle$. Предположим, что уже установлена n-эквивалентность любых алгебр с выделенными идеалами, удовлетворяющими условиям предложения.

Пусть $b \in B$; если $|b| = m < \omega$, то из условий следует, что $b \in I$; выберем $b' \in B'$ таким, что $|b'| = m$; тогда $(b' \in I')$, очевидно, что $\langle \hat{b}, I \cap \hat{b}\rangle \simeq \langle \hat{b}', I' \cap \hat{b}'\rangle$, а $\langle \widehat{c(b)}, I \cap \widehat{c(b)}\rangle \sim_n \langle \widehat{c(b')}, I \cap \widehat{c(b')}\rangle$. Тем самым эти булевы алгебры с выделенными идеалами удовлетворяют условиям предложения.

Если $|c(b)| = m < \omega$, то поступаем аналогично. Пусть $|b| = \omega$ и $|c(b)| = \omega$; если $b \notin I$ и $c(b) \notin I$, то находим $b' \in \mathscr{B}'$ такой, что $b' \notin I'$ и $c(b') \notin I'$ (это возможно сделать, так как B'/I' — безатомная булева алгебра). В этом случае все булевы алгебры с выделенными идеалами $\langle \hat{b}, I \cap \hat{b}\rangle$, $\langle \widehat{c(b)}, I \cap \widehat{c(b)}\rangle$, $\langle \hat{b}', I' \cap \hat{b}'\rangle$, $\langle \widehat{c(b')}, I' \cap \widehat{c(b')}\rangle$ удовлетворяют условиям предложения и тогда

$$\langle \hat{b}, I \cap \hat{b}\rangle \sim_n \langle \hat{b}', I' \cap \hat{b}'\rangle, \quad \langle \widehat{c(b)}, I \cap \widehat{c(b)}\rangle \sim_n \langle \widehat{c(b')}, I \cap \widehat{c(b')}\rangle.$$

Остается случай $|b| = \omega$, $|c(b)| = \omega$ и $b \in I$ (или $c(b) \in I$); тогда $c(b) \notin I$ $(b \notin I)$. Если в B' найдется элемент b' такой, что $|b'| = \omega$, $b' \in I'$, то все в порядке. Однако может оказаться, что для любого $b' \in I'$ имеет место $|b'| < \omega$.

Лемма 1. *Пусть B и B' — атомарные булевы алгебры. Если число атомов B и число атомов B' больше или равно 2^n, то $B \sim_n B'$.*

Доказательство проводится индукцией по n. Для $n = 0$ очевидно. Пусть лемма справедлива для n, и пусть число атомов в B и в B' не менее чем 2^{n+1}. Пусть $b \in B$; если $|b| \leq 2^n$, то выбираем $b' \in B'$ таким, что $|b'| = |b|$. Заметим, что тогда число атомов в алгебрах $\widehat{c(b)}$, $\widehat{c(b')}$ будет $\geq 2^{n+1} - |b| \geq 2^n$. Поэтому $\hat{b} \simeq \hat{b}'$ и $\widehat{c(b)} \sim_n \widehat{c(b')}$. Если $|b| > 2^n$ и $|c(b)| > 2^n$, то в качестве b' нужно взять такой элемент, что $|b'| = 2^n$, тогда $|c(b')| \geq 2^{n+1} - 2^n = 2^n$ и $\langle b\rangle \sim_n \langle b'\rangle$, $\langle c(\sigma)\rangle \sim_n \langle c(\sigma')\rangle$. $\square$

Возвращаемся к доказательству предложения. Выбираем в качестве b' такой элемент из B', что $|b'| = 2^n$. Тогда $\langle \hat{b}, I \cap \hat{b}\rangle \sim_n \langle \hat{b}', I' \cap \hat{b}'\rangle$ (заметим, что $I \cap \hat{b} = \hat{b}$, $I' \cap \hat{b}' = \hat{b}'$ и можно воспользоваться леммой) и $\langle \widehat{c(b)}, I \cap \widehat{c(b)}\rangle \sim_n \langle \widehat{c(b')}, I' \cap \widehat{c(b')}\rangle$ по индукционному предположению.

Итак, для любого $b \in B$ можно найти $b' \in B'$ такой, что $\langle \hat{b}, I \cap \hat{b}\rangle \sim_n \langle \hat{b}', I' \cap \hat{b}'\rangle$ и $\langle \widehat{c(b)}, I \cap \widehat{c(b)}\rangle \sim_n \langle \widehat{c(b')}, I' \cap \widehat{c(b')}\rangle$. Симметрично для любого $b' \in B'$ можно найти $b \in B$ такой, что выполнены те же n-эквивалентности. Следовательно, $\langle B, I\rangle \sim_{n+1} \langle B', I'\rangle$. Предложение 3 влечет, что $\langle B, I\rangle \equiv \langle B', I'\rangle$. $\square$

Следствие. *Теория атомарных булевых алгебр B с выделенным идеалом I таким, что B/I — безатомная булева алгебра, полна и, следовательно, разрешима.* $\square$

Примером такой системы является $\langle P(I), P_\omega(I)\rangle$, где $P(I)$ — булева алгебра всех подмножеств бесконечного множества I, а $P_\omega(I)$ — идеал всех конечных подмножеств I.

3. В этом разделе применим рассмотрения, проведенные в предыдущих разделах, для доказательства основного результата.

Теорема. *Элементарная теория кольца аде́лей $A(\mathbb{Q})$ поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$ разрешима.*

Напомним (см. [6]), что кольцо $A(\mathbb{Q})$ определяется как подкольцо прямого произведения $\mathbb{R}\times\prod\limits_{p\in\mathscr{P}}\mathbb{Q}_p$ поля вещественных чисел $\mathbb{R}$ и всех полей p-адических чисел $\mathbb{Q}_p$ ($\mathscr{P}$ — множество всех простых чисел), состоящее из всех элементов f из $\mathbb{R}\times\prod\limits_{p\in\mathscr{P}}\mathbb{Q}_p$ таких, что $\{p \mid f(p)\notin\mathbb{Z}_p\}$ конечно; здесь $\mathbb{Z}_p\leq\mathbb{Q}_p$ — кольцо целых p-адических чисел. Заметим, что $A(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}\times A_0(\mathbb{Q})$, где $A_0(\mathbb{Q})$ — подкольцо кольца $\prod\limits_{p\in\mathscr{P}}\mathbb{Q}_p$, состоящее из элементов $f\in\prod\limits_{p\in\mathscr{P}}\mathbb{Q}_p$ таких, что $\{p \mid f(p)\notin\mathbb{Z}_p\}$ конечно. Так как поле $\mathbb{R}$ имеет разрешимую теорию, по известным свойствам сохранения разрешимости для прямых произведений (см. [5]) достаточно установить разрешимость теории кольца $A_0(\mathbb{Q})$.

Доказывать разрешимость теории кольца $A_0(\mathbb{Q})$ будем следующим образом. В булевой алгебре $B(\prod\limits_{p\in\mathscr{P}}\mathbb{Q}_p)\simeq P(\mathscr{P})$ выделим идеал $I\simeq P_\omega(\mathscr{P})\leq P(\mathscr{P})$, соответствующий идеалу конечных подмножеств $\mathscr{P}$. Используя результаты из предыдущих разделов, докажем разрешимость обогащенного кольца $\langle\mathscr{R}, I\rangle$, где $\mathscr{R}\rightleftharpoons\prod\limits_{p\in\mathscr{P}}\mathbb{Q}_p$. Остается заметить, что кольцо $A_0(\mathbb{Q})$ формульно в $\langle\mathscr{R}, I\rangle$.

Для доказательства разрешимости обогащенного кольца $\langle\mathscr{R}, I\rangle$ нужно знать следующие факты.

1. *Теория* $\mathrm{Th}(\{\mathbb{Q}_p|p\in\mathscr{P}\})$ *класса всех полей p-адических чисел разрешима.*

На самом деле вопрос о разрешимости этой теории эффективно сводится к вопросу о разрешимости теории T_π класса $\{F_p \mid p\in\mathscr{P}\}$ всех конечных простых полей, которая установлена в работе [7].

2. *По любому предложению Φ языка теории полей (сигнатуры σ_R) можно эффективно (алгоритмически) построить предложение Φ^* языка теории полей такое, что для любого простого числа $p\in\mathscr{P}$ справедлива эквивалентность* $\mathbb{Q}_p\models\Phi\Longleftrightarrow F_p\models\Phi^*$.

См., например, предложение 2 и замечание после него в [4]. $\square$

3. *Для любого предложения Φ языка теории полей можно эффективно (алгоритмически) узнать, будет ли множество $\{p \mid p\in\mathscr{P},\ F_p\models\Phi\}$ конечным или бесконечным.*

Это вытекает из разрешимости теории $T_{\pi0}$ класса всех псевдоконечных полей характеристики 0, потому что множество $\{p \mid p\in\mathscr{P},\ F_p\models\Phi\}$ бесконечно тогда и только тогда, когда предложение Φ совместно с теорией $T_{\pi0}$.

Разрешимость же теории $T_{\pi0}$ легко следует из эффективной аксиоматизации этой теории и следующего факта [7, теорема 4]: если $F, F'\models T_{\pi0}$, то $F\equiv F'\Longleftrightarrow \mathrm{Abs}\,F\simeq\mathrm{Abs}\,F'$. Этот факт позволяет эффективно выписать все предложения, совместные с теорией $T_{\pi0}$.

А именно, пусть F — псевдоконечное поле характеристики 0; для любого конечного расширения Галуа $L \geq \mathbb{Q}$ поля $\mathbb{Q}$ существует автоморфизм $\sigma \in G(L/\mathbb{Q})$ такой, что $L^\sigma = L \cap F$. Пусть $\alpha, \beta \in L$ такие элементы, что $L = \mathbb{Q}(\alpha)$; $L^\sigma = \mathbb{Q}(\beta)$; пусть f_α, f_β — минимальные многочлены для α и β над $\mathbb{Q}$; пусть $f_\alpha = \prod\limits_{i<k} f_i^\beta$ — разложение f_α над L^σ $\left(f_i^\beta \in \mathbb{Q}(\beta)[x],\ i < k\right)$ на неприводимые множители. Тогда можно записать предложение $\Phi_{L,\sigma}$, которое утверждает, что существует корень y многочлена f_β, а многочлены f_i^y неприводимы (f_i^y получается подстановкой y вместо β в коэффициенты f_i^β). В поле F предложение $\Phi_{L,\sigma}$ истинно. Если собрать все такие предложения $\Phi_{L,\sigma}$ и добавить к теории $T_{\pi 0}$, то это и будет система аксиом для $\mathrm{Th}(F)$. В частности, если предложение Φ истинно в F, то найдутся конечное расширение Галуа $L \geq \mathbb{Q}$ и $\sigma \in G(L/\mathbb{Q})$ такие, что $F \cap L = L^\sigma$ и $T_{\pi 0} \cup \{\Phi_{L,\sigma}\} \vdash \Phi$.

4. *Для любого предложения Φ языка теории полей такого, что $\{p \mid F_p \models \Phi, p \in \mathscr{P}\}$ конечно, можно эффективно найти это конечное множество.*

Разрешимость теории F_p и конечность множества $\{p \mid p \in \mathscr{P},\ F_p \models \Phi\}$ позволяют эффективно найти верхнюю границу $N \in \omega$ такую, что $p \in \mathscr{P}$, $p > N \Longrightarrow F_p \models \neg\Phi$, и, далее, для любого $p \in \mathscr{P}$, $p \leq N$, проверить, будет ли справедливо $F_p \models \Phi$. $\square$

Пусть $V(x)$ — формула теории полей, которая утверждает, что множество $\{y \mid \exists z(y(1+xz^2) = z)\}$ является собственным кольцом нормирования. Нетрудно проверить, что $\mathbb{Q}_p \models V(p)$, $p \in \mathscr{P}$, и $\exists x V(x) \in \mathrm{Th}(\{\mathbb{Q}_p \mid p \in \mathscr{P}\})$.

Опишем теперь систему аксиом для обогащенной булевой алгебры $\langle B(\mathscr{R}), I, \tau_\Phi^{\mathscr{R}} | \Phi$ — предложение сигнатуры $\sigma_B\rangle$; $B(\mathscr{R}) = P(\mathscr{P})$, $I = P_\omega(\mathscr{P})$.

Группа аксиом I:

$B(\mathscr{R})$ — атомная булева алгебра, $B(\mathscr{R})/I$ — безатомная булева алгебра.

Группа аксиом II:

$\tau_\Phi = 1$ для всех $\Phi \in \mathrm{Th}(\{\mathbb{Q}_p | p \in \mathscr{P}\})$, $\tau_{\Phi_0 \wedge \Phi_1} = \tau_{\Phi_0} \cap \tau_{\Phi_1}$, $\tau_{\Phi_0 \vee \Phi_1} = \tau_{\Phi_0} \cup \tau_{\Phi_1}$, $\tau_{\neg\Phi} = c(\tau_\Phi)$.

Группа аксиом III:

$\tau_{V(p)}$ является атомом, $p \in \mathscr{P}$,

$\tau_\Phi = \tau_{V(p_0)} \cup \dots \cup \tau_{V(p_n)}$, если $\{p \mid p \in \mathscr{P},\ \mathbb{Q}_p \models \Phi\} = \{p_0, \dots, p_n\}$;

$\neg I(\tau_\Phi)$, если множество $\{p \mid p \in \mathscr{P},\ \mathbb{Q}_p \models \Phi\}$ бесконечно.

Изложенные выше факты показывают, что эта система аксиом является эффективной (вычислимой), а из предложений 2 и 4 легко следует, что она является полной. Отсюда вытекает, что теория обогащенной булевой алгебры $\langle B(\mathscr{R}), I, \tau_\Phi^B \mid \Phi$ — предложение сигнатуры $\sigma_B\rangle$ является разрешимой. Тогда по следствию (б) предложения 1 и обогащенное кольцо $\langle \mathscr{R}, I\rangle$ имеет разрешимую теорию.

Для доказательства теоремы осталось установить формульность кольца $A_0(\mathbb{Q})$ в $\langle \mathscr{R}, I\rangle$. Пусть $Z(y) \rightleftharpoons \exists x(V(x) \wedge \exists z(y(1+xz^2) = z))$ — формула языка теории полей; эта формула выделяет в каждом поле $\mathbb{Q}_p$ кольцо целых $\mathbb{Z}_p$ (т. е. для $a \in \mathbb{Q}_p$ ($\mathbb{Q}_p \models Z(a) \Longleftrightarrow a \in \mathbb{Z}_p$).

Пусть $\Phi_0(x) \rightleftharpoons \exists y(E_{\neg Z(x)}(x,y) \wedge I(y))$; напомним, что формула $E_{\neg Z(x)}$ справедлива на элементах $r, e \in \mathscr{R}$ тогда и только тогда, когда $e \in B(\mathscr{R})$ и $e \approx \{p \mid \mathbb{Q}_p \not\models Z(r(p)), p \in \mathscr{P}\}$. Тогда $A_0(\mathbb{Q}) = \{r \mid \langle \mathscr{R}, I\rangle \models \Phi_0(r)\}$, т. е. $A_0(\mathbb{Q})$ определима формулой $\Phi_0(x)$ в $\langle \mathscr{R}, I\rangle$.

Теорема доказана. $\square$

Для любого поля алгебраических чисел L (т. е. L — конечное расширение поля $\mathbb{Q}$) кольцо аделей $A(L)$ может быть определено так: имеется естественное (диагональное) вложение $\mathbb{Q}$ в $A(\mathbb{Q})$; таким образом, $A(\mathbb{Q})$ является $\mathbb{Q}$-алгеброй, и тогда $A(L) \rightleftharpoons A(\mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} L$ — тензорное произведение $A(\mathbb{Q})$ и L над $\mathbb{Q}$. Из этого представления можно получить

Следствие. *Для любого поля алгебраических чисел L его кольцо аделей $A(L)$ имеет разрешимую теорию.* $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ершов Ю. Л.* Элементарные регулярные кольца // Алгебра и логика. 1993. Т. 32, № 4. С. 387–401.
2. *Burris S., Werner H.* Sheaf constructions and their elementary properties // Trans. Amer. Math. Soc. 1979. V. 248, N 2. P. 268–309.
3. *Feferman S., Vaught R. L.* The first order properties of products of algebraic systems // Fund. Math. 1959. V. 47. P. 57–103.
4. *Ершов Ю. Л.* Хорошие локально-глобальные поля. IV // Сиб. мат. журн. 2002. Т. 43, № 3. С. 526–538.
5. *Ершов Ю. Л.* Проблемы разрешимости и конструктивные модели. М.: Наука, 1980.
6. *Алгебраическая теория* чисел / Под ред. Дж. Касселса, А. Фрелиха. М.: Мир, 1969.
7. *Ax J.* The elementary theory of finite fields // Ann. Math. 1968. V. 88. P. 239–271.

Статья поступила 6 февраля 2004 г.

Ершов Юрий Леонидович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
ershov@math.nsc.ru