Сибирский математический журнал
Июль—август, 2004. Том 45, № 4

УДК 517.988

СВОЙСТВА МНОЖЕСТВ ДОСТИЖИМОСТИ ЭВОЛЮЦИОННЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ И УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ СУБДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ТИПА

А. А. Толстоногов

Аннотация: В сепарабельном гильбертовом пространстве рассматривается эволюционное включение с многозначным возмущением и с эволюционными операторами, являющимися суперпозицией линейного оператора и субдифференциалов зависящей от времени собственной выпуклой полунепрерывной снизу функции. Наряду с исходным включением рассматривается последовательность аппроксимирующих эволюционных включений с тем же возмущением и с эволюционными операторами, которые являются суперпозицией того же линейного оператора и субдифференциалов регуляризаций Моро — Иосиды исходной функции. Показано, что множество достижимости исходного включения как многозначная функция времени является равномерным по времени пределом в метрике Хаусдорфа последовательности множеств достижимости аппроксимирующих включений. Аналогичные результаты получены и для эволюционных управляемых систем субдифференциального типа со смешанными ограничениями на управление. В качестве приложения рассмотрен пример управляемой системы с разрывными нелинейностями, под знаком которых стоят линейные функции переменных состояния системы.

Ключевые слова: субдифференциал, регуляризация Моро — Иосиды, непрерывный селектор, крайняя точка, множество достижимости, разрывная нелинейность.

§ 1. Постановка задачи

Пусть $T = [0,1]$ — отрезок числовой прямой $\mathbb{R}$ с мерой Лебега μ и с σ-алгеброй Σ μ-измеримых множеств, $\overline{\mathbb{R}} = (-\infty, +\infty]$ — расширенная числовая прямая. Рассмотрим сепарабельное гильбертово пространство H с нормой $\|\cdot\|$ и со скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Функция $\varphi : H \to \overline{\mathbb{R}}$ называется *собственной*, если она не равна тождественно $+\infty$, т. е. если ее эффективная область $\operatorname{dom}\varphi = \{x \in H; \varphi(x) < \infty\}$ непуста. Множество всех функций $\varphi : H \to \overline{\mathbb{R}}$, которые являются собственными выпуклыми и полунепрерывными снизу, будем обозначать через $\Gamma_0(H)$. *Субдифференциалом* $\partial\varphi(x)$ функции $\varphi \in \Gamma_0(H)$ в точке $x \in H$ называется множество

$$\partial\varphi(x) = \{v \in H; \langle v, y - x\rangle \le \varphi(y) - \varphi(x)\ \forall y \in H\}.$$

Известно [1], что $\partial\varphi(x)$ является максимально монотонным оператором,

$$\operatorname{dom}\partial\varphi = \{x \in H; \partial\varphi(x) \ne \varnothing\} \subset \operatorname{dom}\varphi$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 03–01–00203), INTAS (грант 2000–15), РФФИ — ГФЕН Китая (N 02–01–39006).

и $\overline{\operatorname{dom}\partial\varphi} = \overline{\operatorname{dom}\varphi}$, где черта означает замыкание в H.

Напомним, что многозначный оператор A из H в H называется *монотонным*, если для любых $x, y \in \operatorname{dom} A$ и любых $u \in Ax$, $v \in Ay$ имеет место неравенство $\langle x - y, u - v\rangle \geq 0$.

Монотонный многозначный оператор A называется *максимально монотонным*, если не существует другого монотонного многозначного оператора, график которого содержит график A как собственное подмножество.

Для каждого $\lambda > 0$ *регуляризацией Моро — Иосиды функции* $\varphi \in \Gamma_0(H)$ называется функция

$$\varphi_\lambda(x) = \inf\left\{\varphi(y) + \frac{1}{2\lambda}\|y - x\|^2;\ y \in H\right\}.$$

Функция φ_λ является конечной, непрерывной и выпуклой, $\partial\varphi_\lambda$ — однозначной функцией с $\operatorname{dom}\partial\varphi_\lambda = H$ для каждого $\lambda > 0$.

Пусть $\varphi^t \in \Gamma_0(H)$, $t \in T$, $B : H \to H$ — непрерывный линейный оператор, $y_\lambda(0)$ — непрерывная функция из $[0,1]$ в H такая, что $By_\lambda(0) \in \operatorname{dom}\varphi^0$, $\lambda \in [0,1]$.

Рассмотрим эволюционное включение

$$-\dot{x}(t) \in \partial\varphi^t(Bx(t)) + F(t, x(t)), \quad x(0) = y(0), \quad B(y(0)) \in \operatorname{dom}\varphi^0, \tag{1.1}$$

где $F : T \times H \to H$ — многозначное отображение с выпуклыми компактными значениями. Обычно функцию $F(t, x)$ называют *многозначным возмущением.*

Наряду с включением (1.1) рассмотрим включение

$$-\dot{x}_\lambda(t) \in \partial\varphi^t_\lambda(Bx_\lambda(t)) + F(t, x_\lambda(t)),$$
$$x_\lambda(0) = y_\lambda(0), \quad B(y_\lambda(0)) \in \operatorname{dom}\varphi^0, \quad \lambda \in (0,1]. \tag{1.2}$$

Под решением включения (1.1) понимается пара $(x(\cdot), f(\cdot))$ такая, что: $x : T \to H$ — абсолютно непрерывная функция, $x(0) = y(0)$, $Bx(t) \in \operatorname{dom}\partial\varphi^t$ почти всюду, $f(\cdot) \in L^2(T, H)$ и почти всюду имеют место включения

$$-\dot{x}(t) \in \partial\varphi^t(Bx(t)) + f(t), \tag{1.3}$$

$$f(t) \in F(t, x(t)). \tag{1.4}$$

Под *решением включения* (1.2) при $\lambda \in (0,1]$ понимается пара $(x_\lambda(\cdot),\ f_\lambda(\cdot))$ такая, что: $x_\lambda : T \to H$ — абсолютно непрерывная функция, $x_\lambda(0) = y_\lambda(0)$, $f_\lambda(\cdot) \in L^2(T, H)$ и почти всюду имеют место соотношения

$$-\dot{x}_\lambda(t) = \partial\varphi^t_\lambda(Bx_\lambda(t)) + f_\lambda(t), \tag{1.5}$$

$$f_\lambda(t) \in F(t, x_\lambda(t)). \tag{1.6}$$

Множества всех решений включений (1.1) и (1.2) будем обозначать через $\mathscr{R}_F(y(0))$ и $\mathscr{R}^\lambda_F(y_\lambda(0))$. Если $(x(\cdot), f(\cdot)) \in \mathscr{R}_F(y(0))$, то функция $x(\cdot)$ называется *траекторией* включения (1.1). Аналогично определяется траектория включения (1.2). Множество траекторий включений (1.1) и (1.2) будем обозначать через $\mathscr{T}r_F(y(0))$ и $\mathscr{T}r^\lambda_F(y_\lambda(0))$ соответственно.

Множеством достижимости включения (1.1) из точки $x(0) = y(0)$ в момент времени $t \in T$ называется множество

$$\mathscr{A}_F(y(0))(t) = \{x(t); x(\cdot) \in \mathscr{T}r_F(y(0))\}, \quad t \in T.$$

Аналогично определяется множество достижимости включения (1.2):

$$\mathscr{A}^\lambda_F(y_\lambda(0)) = \big\{x_\lambda(t); x_\lambda(\cdot) \in \mathscr{T}r^\lambda_F(y_\lambda(0))\big\}, \quad t \in T,\ \lambda \in (0,1].$$

Тем самым будут определены многозначные отображения

$$t \to \mathscr{A}_F(y(0))(t), \quad t \to \mathscr{A}_F^{\lambda}(y_\lambda(0))(t), \quad \lambda \in (0,1].$$

Пусть $\operatorname{ext} F(t,x)$ — совокупность всех крайних точек множества $F(t,x)$. Из теоремы Крейна — Мильмана следует, что $\operatorname{ext} F(t,x) \neq \varnothing$ и $\operatorname{ext} F(t,x) \subset F(t,x)$. Наряду с включениями (1.1), (1.2) будем рассматривать включения

$$-\dot{x}(t) \in \partial\varphi^t(x(t)) + \operatorname{ext} F(t,x(t)) \quad \text{п. в.}, \tag{1.7}$$

$$x(0) = y(0), \quad B(y(0)) \in \operatorname{dom}\varphi^0,$$

$$-\dot{x}_\lambda(t) \in \partial\varphi_\lambda^t(x_\lambda(t)) + \operatorname{ext} F(t,x_\lambda(t)) \quad \text{п. в.}, \tag{1.8}$$

$$x_\lambda(0) = y_\lambda(0), \quad B(y_\lambda(0)) \in \operatorname{dom}\varphi^0, \ \lambda \in (0,1].$$

Применительно к включениям (1.7), (1.8) используем обозначения $\mathscr{R}_{\operatorname{ext} F}(y(0))$, $\mathscr{T}r_{\operatorname{ext} F}(y(0))$, $\mathscr{A}_{\operatorname{ext} F}(y(0))$ и $\mathscr{R}^{\lambda}_{\operatorname{ext} F}(y_\lambda(0))$, $\mathscr{T}r^{\lambda}_{\operatorname{ext} F}(y_\lambda(0))$, $\mathscr{A}^{\lambda}_{\operatorname{ext} F}(y_\lambda(0))$, вкладывая в них тот же смысл, что и для включений (1.1), (1.2).

Нас будут интересовать взаимосвязи между множествами $\mathscr{T}r_{\operatorname{ext} F}(y(0))$ и $\mathscr{T}r_F(y(0))$, $\mathscr{T}r^{\lambda}_{\operatorname{ext} F}(y_\lambda(0))$ и $\mathscr{T}r^{\lambda}_F(y_\lambda(0))$ и сходимость множеств $\mathscr{T}r^{\lambda}_F(y_\lambda(0))$ к $\mathscr{T}r_F(y(0))$ при $\lambda \downarrow 0$. Как следствие будут получены взаимосвязи между множествами достижимости. При естественных предположениях мы доказываем, что при $\lambda \downarrow 0$

$$\mathscr{A}_F^{\lambda}(y_\lambda(0))(t) \to \mathscr{A}_F(y(0))(t) \tag{1.9}$$

равномерно по $t \in T$ в метрике Хаусдорфа и

$$\mathscr{A}_F^{\lambda}(y_\lambda(0))(t) = \overline{\mathscr{A}^{\lambda}_{\operatorname{ext} F}(y_\lambda(0))(t)}, \quad t \in T, \ \lambda \in (0,1], \tag{1.10}$$

где черта вверху означает замыкание в H.

Подобные вопросы будут рассматриваться и для управляемых систем субдифференциального типа со смешанными ограничениями на управления. Необходимость изучения подобных вопросов обусловлена прежде всего тем, что широкий класс управляемых систем, содержащих разрывные нелинейности вида $f(\sigma)$, где σ — линейная функция переменных состояния, может быть записан в абстрактной форме в виде включения (1.1). Для таких систем актуальной является задача численного построения множеств достижимости. Однако вычислительные процедуры для исследования разрывных систем не разработаны. С другой стороны, используя подходящие однозначные аппроксимации разрывных нелинейностей, мы можем построить аппроксимирующую последовательность управляемых систем, которые в абстрактной форме могут быть записаны в виде включения (1.2). Численное построение множеств достижимости для аппроксимирующих систем уже не встречает принципиальных трудностей и может быть произведено с использованием хорошо разработанных методов и подходов. Зная множества достижимости аппроксимирующих систем и используя (1.9), мы можем дать гарантированные оценки множеств достижимости исходной управляемой системы с разрывными нелинейностями. В свою очередь, равенство (1.10) позволяет сократить вычислительные процедуры при построении множеств достижимости аппроксимирующих систем. Подобная задача рассматривалась в [2] для случая, когда B является тождественным оператором из H в H, а возмущение $F(t,x)$ удовлетворяет более жестким, чем в данной работе, предположениям.

§ 2. Основные обозначения, определения и предварительные сведения

Пусть X — сепарабельное банахово пространство с нормой $\|\cdot\|$. Всюду в дальнейшем мы используем следующие обозначения: $\mathrm{cb}\, X$ — семейство всех непустых замкнутых ограниченных подмножеств из X, $\mathrm{comp}\, X$ — совокупность всех компактных подмножеств из X, $\mathrm{conv}\, X$ — совокупность всех выпуклых компактных подмножеств из X. Для множества $A \subset X$ через $\mathrm{co}\, A$ обозначается выпуклая оболочка A, а через $\overline{\mathrm{co}} A$ — замкнутая выпуклая оболочка A.

На множестве $\mathrm{cb}\, X$ определим метрику Хаусдорфа

$$D_X(A,B) = \max\{\sup_{a\in A}\inf_{b\in B}\|a-b\|, \sup_{b\in B}\inf_{a\in A}\|a-b\|\},$$

$A, B \in \mathrm{cb}\, X$. Всюду в дальнейшем мы считаем, что пространства $\mathrm{cb}\, X$, $\mathrm{comp}\, X$ и $\mathrm{conv}\, X$ наделены метрикой Хаусдорфа.

Многозначное отображение $F : X \to X$ называется *полунепрерывным снизу по Вьеторису*, если для любого открытого множества $U \subset X$ множество $F^{-1}(U) = \{x \in X; F(x) \cap U \neq \varnothing\}$ открыто.

Отображение $F : X \to \mathrm{cb}\, X$ называется *полунепрерывным сверху по Вьеторису*, если для любого замкнутого множества $V \subset X$ множество $F^{-1}(V)$ замкнуто.

Отображение $F : X \to \mathrm{cb}\, X$ называется *непрерывным по Вьеторису*, если оно одновременно полунепрерывно снизу и сверху по Вьеторису.

Отображение $F : X \to \mathrm{cb}\, X$ называется *непрерывным по Хаусдорфу*, если оно непрерывно в метрике Хаусдорфа на пространстве $\mathrm{cb}\, X$. Хорошо известно, что для отображения $F : X \to \mathrm{comp}\, X$ понятия непрерывности по Вьеторису и Хаусдорфу совпадают. В этом случае мы будем говорить просто о непрерывности.

Для пространства X символ ω-X означает, что пространство X наделено слабой $\sigma(X, X^*)$-топологией, где X^* — пространство, топологически сопряженное к X. Такое же обозначение используем и для подмножеств из X. Во всех остальных случаях считаем, что пространство X и его подмножества наделены сильной (нормированной) топологией.

Через $C(T, X)$ ($C(T, \omega\text{-}X)$) обозначаем пространство всех непрерывных отображений из T в X (из T в ω-X) с топологией равномерной сходимости на T.

Под $\mathscr{M}(X)$ понимаем совокупность всех измеримых функций из T в X.

Многозначное отображение $F : T \to \mathrm{cb}\, X$ называется *измеримым*, если $F^{-1}(V) = \{t \in T; F(t) \cap V \neq \varnothing\} \in \Sigma$ для любого замкнутого множества $V \subset X$.

На пространстве $L^2(T, H)$ наряду со стандартной нормой рассмотрим другую норму:

$$\|f(\cdot)\|_\omega = \sup_{0\le t\le t'\le 1}\left\|\int_t^{t'} f(t)\,dt\right\|. \tag{2.1}$$

Пространство $L^2(T, H)$ с нормой (2.1) будем обозначать через $L^2_\omega(T, H)$.

В дальнейшем нам понадобится простой факт, касающийся этой нормы.

Лемма 2.1. *Если последовательность $f_n(\cdot) \in L^2(T, H)$, $n \ge 1$, ограничена в $L^2(T, H)$ и сходится к $f(\cdot)$ в $L^2_\omega(T, H)$, то $f_n(\cdot)$ сходится к $f(\cdot)$ в ω-$L^2(T, H)$.*

Пусть $\varphi \in \Gamma_0(H)$. Поскольку $\partial\varphi$ является максимально монотонным оператором, для любого $\lambda \in (0, 1]$ будет определен однозначный оператор $J_\lambda =$

$(I+\lambda\partial\varphi)^{-1}$, где I — тождественный оператор на H. Оператор J_λ называется *резольвентой* $\partial\varphi$. Положим

$$(\partial\varphi)_\lambda = \frac{1}{\lambda}(I - J_\lambda).$$

Следующие факты хорошо известны [1, 3]:

1) функция $\varphi_\lambda(x)$, $\lambda \in (0,1]$ дифференцируема по Фреше, и ее производная по Фреше равна $\partial\varphi_\lambda$, функция $\partial\varphi_\lambda$ является липшицевой с константой Липшица, равной $\frac{1}{\lambda}$, и

$$\partial\varphi_\lambda = (\partial\varphi)_\lambda;$$

2) для любых $\lambda \in (0,1]$

$$\varphi_\lambda(x) \le \varphi(x), \quad x \in H. \tag{2.2}$$

В дальнейшем нам понадобятся следующие предположения.

Гипотезы $H(\varphi)$. *Функции* $\varphi^t \in \Gamma_0(H)$, $t \in T$, *удовлетворяют условиям:*

(i) *для каждого* $r \ge 0$ *существуют абсолютно непрерывные функции* a_r, b_r: $T \to \mathbb{R}$ *такие, что* $\dot a(\cdot) \in L^2(T,\mathbb{R})$ *для любых* $s,t \in T$, $s \le t$, *и любого* $x \in \operatorname{dom}\varphi^s$ *с* $\|x\| \le r$ *найдется элемент* $y \in \operatorname{dom}\varphi^t$, *удовлетворяющий неравенствам*

$$\|x-y\| \le |a_r(t) - a_r(s)| \cdot (|\varphi^s(x)|^{1/2} + 1), \tag{2.3}$$

$$\varphi^t(y) - \varphi^s(x) \le |b_r(t) - b_r(s)| \cdot (|\varphi^s(x)| + 1); \tag{2.4}$$

(ii) *для каждого* $t \in T$ *и* $r > 0$ *множество* $\{x \in H;\ \|x\| \le r,\ |\varphi^t(x)| \le r\}$ *относительно компактно в* H.

Гипотеза $H(B)$. $B : H \to H$ *является линейным самосопряженным и коэрцитивным оператором, т. е.*

$$c\|x\|^2 \le \langle x, Bx\rangle, \quad c > 0,\ x \in H, \tag{2.5}$$

Гипотезы $H(F)$. $F : T \times H \to \operatorname{conv} H$ *является отображением таким, что*

(1) *отображение* $t \to F(t,x)$ *измеримо для каждого* $x \in H$;

(2) *отображение* $x \to F(t,x)$ *непрерывно при почти каждом* $t \in T$, *и для каждого ограниченного множества* $C \subset H$ *множество* $F(t,C)$ *относительно компактно;*

(3) *для почти всех* $t \in T$

$$\begin{gathered} \|F(t,x)\| = \sup\{\|v\|; v \in F(t,x)\} \le a(t) + b(t)\|x\|, \\ x \in H, \quad a(\cdot), b(\cdot) \in L^2(T,\mathbb{R}^+); \end{gathered} \tag{2.6}$$

(4) *для любого* $m > 0$ *существует функция* $k_m(\cdot) \in L^1(T,\mathbb{R}^+)$ *такая, что для любых* $x,y \in H$, $\|x\| \le m$, $\|y\| \le m$, $u \in F(t,x)$ *существует* $v \in F(t,y)$, *удовлетворяющий неравенству*

$$\langle Bx - By, u - v\rangle + k_m(t)\|x-y\|^2 \ge 0. \tag{2.7}$$

Хорошо известно [4], что если линейный оператор B удовлетворяет неравенству (2.5), то он является непрерывным и имеет непрерывный обратный B^{-1}.

Всюду в дальнейшем считаем, что гипотезы $H(\varphi)$, $H(B)$, $H(F)$(1)–(3) выполняются.

Рассмотрим включение

$$-\dot{x}(t) \in \partial\varphi^t(Bx(t)) + f(t) \quad \text{п. в.}, \tag{2.8}$$
$$x(0) = y(0), \quad f(\cdot) \in L^2(T, H), \quad B(y(0)) \in \operatorname{dom}\varphi^0,$$

и уравнение

$$-\dot{x}_\lambda(t) = \partial\varphi^t_\lambda(Bx(t)) + f(t), \tag{2.9}$$
$$x_\lambda(0) = y_\lambda(0), \quad B(y_\lambda(0)) \in \operatorname{dom}\varphi^0, \quad \lambda \in (0,1], \quad f(\cdot) \in L^2(T, H).$$

Решением включения (2.8) называется абсолютно непрерывная функция $x : T \to H$ такая, что $x(0) = y(0)$, $Bx(t) \in \operatorname{dom}\partial\varphi^t$ почти всюду и также почти всюду имеет место включение (2.8).

Решением уравнения (2.9) называется абсолютно непрерывная функция $x_\lambda : T \to H$ такая, что $x_\lambda(0) = y_\lambda(0)$ и почти всюду выполняется равенство (2.9).

Так как оператор B является субдифференциалом функции $\frac{1}{2}\langle x, Bx\rangle$, воспользовавшись результатами работ [3, 5], получаем следующее утверждение.

Теорема 2.1. *Для любых $x(0) = y(0)$, $By(0) \in \operatorname{dom}\varphi^0$, $x_\lambda(0) = y_\lambda(0)$, $By_\lambda(0) \in \operatorname{dom}\varphi^0$, $\lambda \in (0,1]$, включение (2.8) и уравнение (2.9) имеют единственные решения $x(t)$, $x(0) = y(0)$, $x_\lambda(t), x_\lambda(0) = y_\lambda(0)$ такие, что $\dot{x}(\cdot), \dot{x}_\lambda(\cdot) \in L^2(T, H)$ и функция $\varphi^t(Bx(t))$ ограничена на T. Более того, если $x(0) = x_\lambda(0)$, $\lambda \in (0,1]$, $Bx(0) \in \operatorname{dom}\varphi^0$, то последовательность решений $x_\lambda(t), x_\lambda(0) = x(0)$, уравнения (2.9) сходится к решению $x(t), x(0) = y(0)$ включения (2.8) в пространстве $C(T, H)$, а последовательность $\dot{x}_\lambda(\cdot)$ сходится к $\dot{x}(\cdot)$ в пространстве ω-$L^2(T, H)$ при $\lambda \downarrow 0$.*

Приведем ряд свойств функций φ^t, φ^t_λ, $\partial\varphi^t_\lambda$, которые мы будем использовать в дальнейшем.

Лемма 2.2 [3]. *Пусть выполняется гипотеза $H(\varphi)(i)$. Тогда*

(1) существует константа $K_1 > 0$ такая, что

$$\varphi^t_\lambda(u) \geq -K_1(\|u\| + 1), \quad t \in T,\ \lambda \in (0,1],\ u \in H; \tag{2.10}$$

$$\left\|J^t_\lambda u\right\| = \|(I + \lambda\partial\varphi^t)^{-1}u\| \leq \|u\| + K_1, \quad t \in T,\ \lambda \in (0,1],\ u \in H; \tag{2.11}$$

(2) для любой функции $u(\cdot) \in L^1(T, H)$ функция $t \to \varphi^t(u(t))$ измерима;

(3) для любой функции $u(\cdot) \in L^1(T, H)$ функция $t \to \varphi^t_\lambda(u(t))$ измерима, $\lambda \in (0,1]$.

Лемма 2.3 [5]. *Пусть выполняется гипотеза $H(\varphi)(i)$, $\lambda \in (0,1]$, $u : T \to H$ — абсолютно непрерывная функция. Тогда функция $t \to \varphi^t_\lambda(u(t))$ дифференцируема почти всюду на T и ее производная интегрируема на T. Более того, имеют место следующие неравенства:*

$$\varphi^t_\lambda(u(t)) - \varphi^s_\lambda(u(s)) \leq \int_s^t \frac{d}{d\tau}\varphi^\tau_\lambda(u(\tau))\,d\tau, \quad s, t \in T,\ s \leq t, \tag{2.12}$$

$$\frac{d}{dt}\varphi^t_\lambda(u(t)) - \left\langle \partial\varphi^t_\lambda(u(t)), \dot{u}(t)\right\rangle$$
$$\leq |\dot{a}_r(t)| \cdot \left\|\partial\varphi^t_\lambda(u(t))\right\|\left(\left|\varphi^t_\lambda(u(t))\right|^{1/2} + 1\right) + |\dot{b}_r(t)|\left(\left|\varphi^t_\lambda(u(t))\right| + 1\right) \quad \text{п. в.}, \tag{2.13}$$

где

$$r \geq \sup\left\{\left\|J^t_\lambda u(t)\right\|;\ t \in T,\ 0 < \lambda \leq 1\right\} \tag{2.14}$$

и $a_r(\cdot)$, $b_r(\cdot)$ — функции из неравенств (2.3), (2.4).

§ 3. Вспомогательные результаты

Как уже отмечалось, оператор B имеет непрерывный обратный оператор B^{-1}. Ясно, что если $x_0 \in B^{-1} \operatorname{dom} \varphi^0$, то $Bx_0 \in \operatorname{dom} \varphi^0$. Поэтому согласно теореме 2.1 будет определен оператор $\mathscr{L} : [0,1] \times B^{-1} \operatorname{dom} \varphi^0 \times L^2(T,H) \to C(T,H)$, который каждым $\lambda \in (0,1]$, $x_0 \in B^{-1} \operatorname{dom} \varphi^0$, $f(\cdot) \in L^2(T,H)$ ставит в соответствие единственное решение $x_\lambda(x_0,f)$, $x_\lambda(x_0,f)(0) = x_0$ уравнения (2.9), а при $\lambda = 0$ — единственное решение $x(x_0,f)$, $x(x_0,f)(0) = x_0$ включения (2.8).

Воспользовавшись неравенством (2.5), не нарушая общности, мы можем считать, что
$$\|B\| \le \frac{1}{c}. \tag{3.1}$$

Лемма 3.1. *Для любых $\lambda \in [0,1]$, $x_0, x_1 \in B^{-1} \operatorname{dom} \varphi^0$, $f_1(\cdot), f_2(\cdot) \in L^2(T,H)$ имеет место неравенство*
$$\|\mathscr{L}(\lambda,x_0,f_0)(t) - \mathscr{L}(\lambda,x_1,f_1)(t)\| \le \frac{1}{c^2}\|x_0 - x_1\| + \frac{1}{c^2}\int\limits_0^t \|f_0(s) - f_1(s)\|\,ds, \quad t \in T. \tag{3.2}$$
Оператор $\mathscr{L}(\lambda,x,f)$ непрерывен из $[0,1] \times B^{-1} \operatorname{dom} \varphi^0 \times L^2(T,H)$ в $C(T,H)$ в любой точке $(0,x_0,f_0)$, $x_0 \in B^{-1} \operatorname{dom} \varphi^0$, $f_0 \in L^2(T,H)$ при $\lambda \downarrow 0$.

Доказательство. Пусть $\lambda = 0$. Тогда, используя определение решения включения (2.8) и монотонность оператора $\partial\varphi^t$, получим
$$\begin{aligned}\langle \dot{x}(x_1,f_1)(t) - \dot{x}(x_0,f_0)(t), Bx(x_1,f_1)(t) - Bx(x_0,f_0)(t)\rangle \\ \le \langle f_0(t) - f_1(t), Bx(x_1,f_1)(t) - Bx(x_0,f_0)(t)\rangle.\end{aligned} \tag{3.3}$$
Из этого неравенства вытекает, что
$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\langle x(x_1,f_1)(t) - x(x_0,f_0)(t), Bx(x_1,f_1)(t) - Bx(x_0,f_0)(t)\rangle \\ &\le \frac{1}{2}\langle x_1 - x_0, Bx_1 - Bx_0\rangle + \int\limits_0^t \|B\| \cdot \|f_0(s) - f_1(s)\| \cdot \|x(x_1,f_1)(s) - x(x_0,f_0)(s)\|\,ds,\end{aligned} \tag{3.4}$$
$t \in T$. Воспользовавшись (2.5), (3.1), (3.4) и леммой A5 в [1, с. 157], получим неравенство (3.2) при $\lambda = 0$. При $\lambda \in (0,1]$ неравенство (3.2) доказывается аналогично с использованием монотонности оператора $\partial\varphi^t_\lambda$.

Пусть $x_0 \in B^{-1} \operatorname{dom} \varphi^0$, $f_0 \in L^2(T,H)$, последовательность $\lambda_n \in (0,1]$, $n \ge 1$, монотонно сходится к 0, последовательность $x_n \in B^{-1} \operatorname{dom} \varphi^0$, $n \ge 1$, сходится к x_0 и последовательность $f_n \in L^2(T,H)$, $n \ge 1$, сходится к f_0 в $L^2(T,H)$. Тогда
$$\begin{aligned}\|\mathscr{L}(\lambda_n,x_n,f_n) - \mathscr{L}(0,x_0,f_0)\|_{C(T,H)} &\le \|\mathscr{L}(\lambda_n,x_n,f_n) - \mathscr{L}(\lambda_n,x_0,f_0)\|_{C(T,H)} \\ &+ \|\mathscr{L}(\lambda_n,x_0,f_0) - \mathscr{L}(0,x_0,f_0)\|_{C(T,H)}.\end{aligned}$$
Из этого неравенства, (3.2) и теоремы 2.1 вытекает, что
$$\lim_{\lambda_n \downarrow 0} \|\mathscr{L}(\lambda_n,x_n,f_n) - \mathscr{L}(0,x_0,f_0)\|_{C(T,H)} = 0.$$
Лемма доказана.

Пусть $M_1 > 0$, $y(0) \in B^{-1} \operatorname{dom} \varphi^0$ и $\varphi^0(By(0)) \le M_1$. Возьмем произвольную последовательность $y_n \in B^{-1} \operatorname{dom} \varphi^0$, $n \ge 1$, сходящуюся к y_0, такую, что

$\varphi^0(By_n) \leq M_1$, и пусть $\lambda_n \in (0,1]$, $\lambda_n \downarrow 0$. Положим $\Lambda = \{\lambda_n;\ n \geq 0\}$, где $\lambda_0 = 0$, и определим функцию $y_\lambda(0)$ из Λ в $B^{-1}\operatorname{dom}\varphi$, полагая $y_{\lambda_n}(0) = y_n$, $n \geq 0$. Тогда $y_\lambda(0)$ является непрерывной функцией на компакте Λ и

$$\varphi^0(By_\lambda(0)) \leq M_1, \quad \lambda \in \Lambda. \tag{3.5}$$

Для единообразия обозначений функции φ^t мы будем приписывать индекс $\lambda = 0$, полагая $\varphi^t = \varphi_0^t$. В этих обозначениях включение (1.1) будет записываться, как и включение (1.2) при $\lambda = 0$, а уравнение (2.9) при $\lambda = 0$ будет рассматриваться как включение (2.8). В этих обозначениях множество $\mathscr{R}_F^\lambda(y_\lambda(0))$ при $\lambda = 0$ переходит в множество $\mathscr{R}_F(y(0))$. Если $(x_\lambda(\cdot), f(\cdot)) \in \mathscr{R}_F^\lambda(y_\lambda(0))$, $\lambda \in \Lambda$, то функция $x_\lambda(\cdot)$, $x_\lambda(0) = y_\lambda(0)$ при $\lambda = 0$ является решением включения (2.8), а при $\lambda \neq 0$ — решением уравнения (2.9). Чтобы не вводить новых обозначений, будем обозначать траектории включений (1.1), (1.2) и решения включения (2.8) и уравнения (2.9) через $x_\lambda(y_\lambda(0), f)$, $\lambda \in \Lambda$, подчеркивая зависимость траекторий от $y_\lambda(0)$ и f.

Лемма 3.2. *Существует константа $M_2 > 0$ такая, что для любого $(x_\lambda(y_\lambda(0), f), f) \in \mathscr{R}_F^\lambda(y_\lambda(0))$, $\lambda \in \Lambda$, имеют место неравенства*

$$\|\mathscr{L}(\lambda, y_\lambda(0), 0)\|_{C(T,H)} \leq M_2; \tag{3.6}$$

$$\|x_\lambda(y_\lambda(0), f)(t)\| \leq M_2 + \frac{1}{c^2}\int_0^t (a(s) + b(s)\|x_\lambda(y_\lambda(0), f)(s)\|)\, ds, \quad t \in T. \tag{3.7}$$

Доказательство. Пусть $(x_\lambda(y_\lambda(0), f), f) \in \mathscr{R}_F^\lambda(y_\lambda(0))$. Тогда $x_\lambda(y_\lambda(0), f) = \mathscr{L}(\lambda, y_\lambda(0), f), \lambda \in \Lambda$. Воспользовавшись неравенством (3.2), получим

$$\|x_\lambda(y_\lambda(0), f)(t)\| \leq \|\mathscr{L}(\lambda, y_\lambda(0), 0)(t)\| + \frac{1}{c^2}\int_0^t \|f(s)\|\, ds. \tag{3.8}$$

Так как функция $\lambda \to y_\lambda(0)$ непрерывна на Λ, согласно лемме 3.1 оператор $\lambda \to \mathscr{L}(\lambda, y_\lambda(0), 0)$ является непрерывным в точке $(0, y(0), 0)$. Воспользовавшись компактностью множества Λ, получим, что существует константа $M_2 > 0$, при которой имеет место неравенство (3.6). Теперь неравенство (3.7) следует из неравенств (2.6), (3.6), (3.8). Лемма доказана.

Из (3.7) и леммы Беллмана — Гроноулла вытекает, что существует константа $M > 0$ такая, что

$$\|x_\lambda(y_\lambda(0), f)(t)\| \leq M, \quad t \in T, \tag{3.9}$$

для любого $(x_\lambda(y_\lambda(0), f), f) \in \mathscr{R}_F^\lambda(y_\lambda(0))$, $\lambda \in \Lambda$.

Пусть

$$Q = \{x \in H;\ \|x\| \leq M\} \tag{3.10}$$

и

$$G(t) = \overline{\operatorname{co}} F(t, Q), \quad t \in T. \tag{3.11}$$

Из гипотезы $H(F)(2)$ следует, что $t \to G(t)$ является многозначным отображением с выпуклыми компактными значениями. Обозначим через $p_r : H \to Q$ оператор проектирования на множество Q, который каждой точке $x \in H$ ставит в соответствие единственную точку $p_r x \in Q$ такую, что $\|p_r x - x\| = \min\{\|y - x\|; y \in Q\}$. Хорошо известно, что

$$\|p_r x - p_r y\| \le \|x - y\|. \tag{3.12}$$

Рассмотрим отображение $\widetilde{F} : T \times H \to \operatorname{conv} H$, определенное по правилу

$$\widetilde{F}(t, x) = F(t, p_r x). \tag{3.13}$$

Из (3.13) вытекает, что отображение $\widetilde{F}(t, x)$ наследует все свойства отображения $F(t, x)$, приведенные в гипотезах $H(F)(1)$–(3). В частности,

$$\|\widetilde{F}(t, x)\| \le a(t) + b(t)\|x\|, \quad x \in H, \tag{3.14}$$

$$\|\widetilde{F}(t, x)\| \le a(t) + b(t)M, \quad x \in H, \tag{3.15}$$

и

$$\widetilde{F}(t, x) \subset G(t), \quad x \in H. \tag{3.16}$$

Если мы рассмотрим включения (1.1), (1.2) с $F(t, x)$, замененным на $\widetilde{F}(t, x)$, то (3.14) влечет, что оценка (3.9) останется той же самой и для решений включений (1.1), (1.2) с возмущением $\widetilde{F}(t, x)$. Поэтому $(x_\lambda(y_\lambda(0), f), f) \in \mathscr{R}_F^\lambda(y_\lambda(0))$ тогда и только тогда, когда $(x_\lambda(y_\lambda(0), f), f) \in \mathscr{R}_{\widetilde{F}}^\lambda(y_\lambda(0))$, $\lambda \in \Lambda$. Всюду в дальнейшем, не нарушая общности и не оговаривая специально, будем считать, что

$$\|F(t, x)\| \le a(t) + b(t)M, \quad F(t, x) \subset G(t), \quad x \in H, \ t \in T. \tag{3.17}$$

Учитывая рассуждения, использованные в [2], получим, что отображение $t \to G(t)$ измеримо и, следовательно, имеет измеримый селектор.

Обозначим через S_G множество

$$S_G = \{f \in \mathscr{M}(H); \ f(t) \in G(t) \text{ п. в.}\}. \tag{3.18}$$

Из (3.17) следует, что для любого $f(\cdot) \in S_G$ имеет место неравенство

$$\|f(t)\| \le a(t) + b(t)M \quad \text{п. в.} \tag{3.19}$$

Поэтому S_G является выпуклым компактным подмножеством пространства ω-$L^2(T, H)$.

Пусть

$$\mathscr{R}_G(\lambda) = \{x_\lambda(y_\lambda(0), f) = \mathscr{L}(\lambda, y_\lambda(0), f); \ f \in S_G\}, \quad \lambda \in \Lambda. \tag{3.20}$$

Воспользовавшись (3.7) и (3.19), получаем, что для любого $x_\lambda(y_\lambda(0), f) \in \mathscr{R}_G(\lambda)$, $\lambda \in \Lambda$, имеет место неравенство

$$\|x_\lambda(y_\lambda(0), f)(t)\| \le M_2 + \frac{1}{c^2} \int_0^t (a(s) + b(s)M)\, ds = M_3. \tag{3.21}$$

Лемма 3.3. *Существуют константы $\alpha, \beta, \gamma > 0$ такие, что для любых $x_\lambda(y_\lambda(0), f) \in \mathscr{R}_G(\lambda)$, $\lambda \in \Lambda$, $\lambda \ne 0$, имеет место неравенство*

$$\varphi_\lambda^t(Bx_\lambda(y_\lambda(0), f)(t)) + \alpha \int_0^t \|\dot{x}_\lambda(y_\lambda(0), f)(s)\|^2\, ds \le \varphi_\lambda^0(By_\lambda(0)) + \beta \int_0^t \|f(s)\|^2\, ds$$
$$+ \int_0^t \bigl\{\gamma|\dot{a}_{r_*}(s)|^2 + |\dot{b}_{r_*}(s)|\bigr\}\bigl(\bigl|\varphi_\lambda^s(Bx_\lambda(y_\lambda(0), f)(s)\bigr| + 1\bigr)\bigr\}\, ds, \tag{3.22}$$

где

$$r_* = K_1 + \frac{1}{c} M_3, \tag{3.23}$$

и $K_1, c, M_3 > 0$ — *константы из неравенств* (2.11), (3.1), (3.21).

Доказательство. Пусть $x_\lambda(f), x_\lambda(f)(0) = x_0 \in B^{-1} \operatorname{dom} \varphi^0$, $f \in L^2(T, H)$, — решение уравнения (2.9), которое существует согласно теореме 2.1. Тогда функция $t \to Bx_\lambda(f)(t)$ является абсолютно непрерывной. Из леммы 2.2(3) следует, что функция $t \to \varphi_\lambda^t(Bx_\lambda(f)(t))$ измерима. Более того, воспользовавшись утверждением леммы 2.3 и неравенствами (2.10), (2.12), получаем, что функция $t \to \varphi_\lambda^t(Bx_\lambda(f)(t))$ ограничена на T и, следовательно, является элементом пространства $L^2(T, H)$. Аналогично в соответствии с утверждением теоремы 2.1 функция $\partial\varphi_\lambda^t(Bx_\lambda(f)(t)) = -\dot{x}_\lambda(f)(t) - f(t)$ — элемент пространства $L^2(T, H)$. Поскольку

$$\big\langle \partial\varphi_\lambda^t(Bx_\lambda(f)(t)), B\dot{x}_\lambda(f)(t)\big\rangle = -\langle \dot{x}_\lambda(f)(t) + f(t), B\dot{x}_\lambda(f)(t)\rangle,$$

воспользовавшись неравенствами (2.11)–(2.14) и интегрируемостью соответствующих функций, получим неравенство

$$\begin{aligned}\varphi_\lambda^t(Bx_\lambda(f)(t)) &+ \int_0^t \langle \dot{x}_\lambda(f)(s) + f(s), B\dot{x}_\lambda(f)(s)\rangle\, ds \\ &\le \varphi_\lambda^0(Bx_0) + \int_0^t \Big\{|\dot{a}_r(s)| \cdot \|\dot{x}_\lambda(f)(s) + f(s)\| \big(\big|\varphi_\lambda^s(Bx_\lambda(f)(s)\big|^{1/2} + 1\Big\}\, ds \\ &\qquad + \int_0^t |\dot{b}_r(s)| \big(\big|\varphi_\lambda^s(Bx_\lambda(f)(s)\big| + 1\big)\, ds \end{aligned} \tag{3.24}$$

с

$$r \ge \|Bx_\lambda(f)\|_{C(T,H)} + K_1 \ge \sup\big\{\big\|J_\mu^t(Bx_\lambda(f)(t)\big\|;\ t \in T,\ 0 < \mu \le 1\big\}. \tag{3.25}$$

Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда из (3.1) и неравенства Коши следует, что

$$\|B\dot{x}_\lambda(f)(s)\| \cdot \|f(s)\| \le \frac{1}{2}\varepsilon^2 \frac{1}{c^2} \|\dot{x}_\lambda(f)(s)\|^2 + \frac{1}{2\varepsilon^2}\|f(s)\|^2, \tag{3.26}$$

$$\begin{aligned}|\dot{a}_r(s)| \cdot \|\dot{x}_\lambda(f)(s) + f(s)\| &\big(\big|\varphi_\lambda^s(Bx_\lambda(f)(s)\big|^{1/2} + 1\big) \\ &\le \varepsilon^2 \|\dot{x}_\lambda(f)\|^2 + \varepsilon^2 \|f(s)\|^2 + \frac{1}{\varepsilon^2}|\dot{a}_r(s)|^2 \big(\big|\varphi_\lambda^s(Bx_\lambda(f)(s)\big| + 1\big).\end{aligned} \tag{3.27}$$

Нетрудно убедиться, что существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что $c - \frac{1}{2}\varepsilon_0^2 - \varepsilon_0^2 > 0$. Положим

$$\alpha = c - \frac{1}{2}\varepsilon_0^2 - \varepsilon_0^2 > 0, \quad \beta = \varepsilon_0^2 + \frac{1}{2\varepsilon_0^2}, \quad \gamma = \frac{1}{\varepsilon_0^2}. \tag{3.28}$$

Воспользовавшись (3.24), (3.26)–(3.28), с помощью несложных преобразований получим

$$\begin{aligned}\varphi_\lambda^t(Bx_\lambda(f)(t)) + \alpha \int_0^t \|\dot{x}_\lambda(f)(s)\|^2\, ds &\le \varphi_\lambda^0(Bx_0) + \beta \int_0^t \|f(s)\|^2\, ds \\ &+ \int_0^t \{\gamma |\dot{a}_r(s)|^2 + |\dot{b}_r(s)|\} (|\varphi_\lambda^s(Bx_\lambda(f)(s)| + 1)\}\, ds\end{aligned} \tag{3.29}$$

с r, удовлетворяющим неравенству (3.25). Заменяя в (3.29), (3.25) $x_\lambda(f)$ на $x_\lambda(y_\lambda(0), f) \in \mathscr{R}_G(\lambda)$, $\lambda \in \Lambda$, $\lambda \neq 0$, и учитывая (3.21), (3.1), приходим к неравенствам (3.22), (3.23). Лемма доказана.

Обозначим

$$\mathscr{R}_G^* = \{\cup \mathscr{R}_G(\lambda);\ \lambda \in \Lambda,\ \lambda \neq 0\}, \quad \mathscr{R}_G = \{\cup \mathscr{R}_G(\lambda); \lambda \in \Lambda\}, \tag{3.30}$$

и пусть

$$D = \{x \in H;\ \|x\| \le M_3\}, \tag{3.31}$$

где $M_3 > 0$ — константа из неравенства (3.21).

Лемма 3.4. *Множество $\mathscr{R}_G$ является равностепенно непрерывным подмножеством пространства $C(T, H)$.*

Доказательство. Из неравенств (2.2), (2.10) следует, что для любого $x_\lambda(y_\lambda(0), f) \in \mathscr{R}_G^*$ имеет место неравенство

$$\begin{aligned} \left|\varphi_\lambda^t(Bx_\lambda(y_\lambda(0), f)(t))\right| \le \varphi^t(Bx_\lambda(y_\lambda(0), f)(t)) \\ + 2K_1(\|Bx_\lambda(y_\lambda(0), f)(t)\| + 1), \quad t \in T. \end{aligned} \tag{3.32}$$

Воспользовавшись неравенствами (3.5), (3.21), (3.22), (3.32), получим

$$\begin{aligned} \left|\varphi_\lambda^t(Bx_\lambda(y_\lambda(0), f)(t))\right| + \alpha \int_0^t \|\dot{x}_\lambda(y_\lambda(0), f)(s)\|^2\, ds \le M_1 + 2K_1\left(\frac{1}{c}M_3 + 1\right) \\ + \beta \int_0^t \|f(s)\|^2\, ds + \int_0^t (\gamma|\dot{a}_{r_*}(s)|^2 + |\dot{b}_{r_*}(s)|) \cdot \left(\left|\varphi_\lambda^s(Bx_\lambda(y_\lambda(0), f)(s))\right| + 1\right) ds, \end{aligned} \tag{3.33}$$

$t \in T$, $\lambda \in \Lambda$, $\lambda \neq 0$. Из этого неравенства, (3.19) и неравенства Беллмана — Гронуолла вытекает, что существует константа $A > 0$ такая, что

$$\left|\varphi_\lambda^t(Bx_\lambda(y_\lambda(0), f)(t))\right| \le A, \quad t \in T,\ \lambda \in \Lambda,\ \lambda \neq 0.$$

Применяя это неравенство, а также (3.33) и (3.19), имеем

$$\int_T \|\dot{x}_\lambda(y_\lambda(0), f)(t)\|^2\, dt \le L^2, \quad \lambda \in \Lambda,\ \lambda \neq 0,\ f \in S_G, \tag{3.34}$$

для некоторой константы $L > 0$. Из (3.34) и неравенства Гёльдера следует, что

$$\|x_\lambda(y_\lambda(0), f)(t) - x_\lambda(y_\lambda(0), f)(s)\| \le |t - s|^{1/2} L, \quad \lambda \in \Lambda,\ \lambda \neq 0,\ f \in S_G.$$

Тем самым множество $\mathscr{R}_G^*$ равностепенно непрерывно. Согласно лемме 3.1 $\mathscr{R}_G \subset \overline{\mathscr{R}}_G^*$, где черта вверху означает замыкание в $C(T, H)$. Поскольку замыкание равностепенно непрерывного множества равностепенно непрерывно, множество $\mathscr{R}_G$ равностепенно непрерывно в $C(T, H)$. Лемма доказана.

Следующая теорема является основополагающей в наших исследованиях.

Теорема 3.1. *Оператор* $(\lambda, f) \to \mathscr{L}(\lambda, y_\lambda(0), f)$ *непрерывен из* $\Lambda \times \omega\text{-}S_G$ *в* $C(T, H)$.

Доказательство. Так как множество $\omega\text{-}S_G$ — выпуклый метризуемый компакт в $\omega\text{-}L^2(T, H)$, достаточно доказать секвенциальную непрерывность оператора $(\lambda, f) \to \mathscr{L}(\lambda, y_\lambda(0), f)$.

Вначале мы покажем, что для каждого $\lambda \in \Lambda$ оператор $f \to \mathscr{L}(\lambda, y_\lambda(0), f)$ является непрерывным из $\omega\text{-}S_G$ в $C(T, H)$. Пусть $\lambda \in \Lambda$ и последовательность $f_n \in S_G$, $n \geq 1$, сходится к f_* в пространстве $\omega\text{-}L^2(T, H)$. Воспользовавшись монотонностью оператора $\partial\varphi_\lambda^t$, получим

$$\begin{aligned}\langle Bx_\lambda(y_\lambda(0), f_n)(t) - Bx_\lambda(y_\lambda(0), f_*)(t), \dot{x}_\lambda(y_\lambda(0), f_n)(t) - \dot{x}_\lambda(y_\lambda(0), f_*)(t)\rangle \\ \leq \langle Bx_\lambda(y_\lambda(0), f_n)(t) - Bx_\lambda(y_\lambda(0), f_*)(t), f_*(t) - f_n(t)\rangle. \quad (3.35)\end{aligned}$$

Из неравенств (3.21), (3.31) следует, что $x_\lambda(y_\lambda(0), f_n)(t) \in D$, $t \in T$. В силу того, что $x_\lambda(y_\lambda(0), f_n) \in \mathscr{R}_G$, $n \geq 1$, согласно лемме 3.4 последовательность $x_\lambda(y_\lambda(0), f_n)$, $n \geq 1$, равностепенно непрерывна в $C(T, H)$. Поэтому последовательность $x_\lambda(y_\lambda(0), f_n)$, $n \geq 1$, относительно компактна в $C(T, \omega\text{-}H)$. Поскольку $C(T, \omega\text{-}D)$ — метризуемое подмножество пространства $C(T, \omega\text{-}H)$ и $x_\lambda(y_\lambda(0), f_n) \in C(T, \omega\text{-}D)$, $n \geq 1$, найдется подпоследовательность $x_\lambda(y_\lambda(0), f_{n_k})$, $k \geq 1$, последовательности $x_\lambda(y_\lambda(0), f_n)$, $n \geq 1$, сходящаяся в топологии пространства $C(T, \omega\text{-}H)$ к некоторому элементу $z(\cdot) \in C(T, \omega\text{-}D)$. Очевидно, что $z(\cdot) \in L^2(T, H)$. Так как $f_*(t), f_n(t) \in G(t)$, $n \geq 1$, и при почти каждом $t \in T$ множество $G(t)$ является компактом в H, а оператор B непрерывен из $\omega\text{-}H$ в $\omega\text{-}H$, то

$$\lim_{k\to\infty} |\langle Bx_\lambda(y_\lambda(0), f_{n_k})(t) - Bz(t), f_*(t) - f_{n_k}(t)\rangle| = 0 \quad (3.36)$$

при почти каждом $t \in T$. Из (3.19), (3.21), (3.36) и теоремы Лебега об ограниченной сходимости следует, что

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_T |\langle x_\lambda(y_\lambda(0), f_{n_k})(t) - Bz(t), f_*(t) - f_{n_k}(t)\rangle|\, dt = 0. \quad (3.37)$$

Поскольку $f_{n_k} \to f_*$ в $\omega\text{-}L^2(T, H)$, имеем

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_0^t \langle Bz(s), f_*(s) - f_{n_k}(s)\rangle\, ds = 0, \quad t \in T. \quad (3.38)$$

Из неравенства

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}c\|x_\lambda(y_\lambda(0), f_{n_k})(t) - x_*(y_\lambda(0), f_*)(t)\|^2 \leq \frac{1}{2}\langle x_\lambda(y_\lambda(0), f_{n_k})(t) \\ - x_\lambda(y_\lambda(0), f_*)(t), Bx_\lambda(y_\lambda(0), f_{n_k})(t) - Bx_\lambda(y_\lambda(0), f_*)(t)\rangle \\ = \int\limits_0^t \langle Bx_\lambda(y_\lambda(0), f_{n_k})(s) - Bx_\lambda(y_\lambda(0), f_*)(s), \dot{x}_\lambda(y_\lambda(0), f_{n_k}(s) - \dot{x}_\lambda(y_\lambda(0), f_*(s)\rangle\, ds\end{aligned}$$

и (3.35), (3.37) и (3.38) вытекает, что

$$x_\lambda(y_\lambda(0), f_{n_k})(t) \to x_\lambda(y_\lambda(0), f_*)(t) \quad \text{в } H, \quad t \in T. \quad (3.39)$$

Поскольку на каждом равностепенно непрерывном множестве топология поточечной сходимости на компактном множестве T совпадает с топологией равномерной сходимости [6], в соответствии с (3.39) $x_\lambda(y_\lambda(0), f_{n_k}) \to x_\lambda(y_\lambda(0), f_*)$ в $C(T, H)$.

Если мы предположим, что сама последовательность $x_\lambda(y_\lambda(0), f_n)$, $n \geq 1$, не сходится к $x_\lambda(y_\lambda(0), f_*)$, то найдется подпоследовательность $x_\lambda(y_\lambda(0), f_{n_k})$, $k \geq 1$, последовательности $x_\lambda(y_\lambda(0), f_n)$, $n \geq 1$, такая, что любая подпоследовательность последовательности $x_\lambda(y_\lambda(0), f_{n_k})$, $k \geq 1$, не сходится к $x_\lambda(y_\lambda(0), f_*)$. Повторяя рассуждения, приведенные выше, к последовательности $x_\lambda(y_\lambda(0), f_{n_k})$, $k \geq 1$, мы придем к противоречию. Тем самым оператор $f \to \mathscr{L}(\lambda, y_\lambda(0), f)$ непрерывен из ω-S_G в $C(T, H)$.

Докажем теперь непрерывность оператора $(\lambda, f) \to \mathscr{L}(\lambda, y_\lambda(0), f)$ из $\Lambda \times \omega$-S_G в $C(T, H)$. Так как множество Λ имеет единственную предельную точку $\lambda = 0$, на основании доказанного выше нам нужно рассмотреть только случай, когда $\lambda_n \to 0$, $\lambda_n \in \Lambda$ и последовательность $f_n \in S_G$, $n \geq 1$, сходится к f_* в ω-$L^2(T, H)$. В этом случае имеем

$$\begin{aligned} \|\mathscr{L}(0, y(0), f_*) - \mathscr{L}(\lambda_n, y_{\lambda_n}(0), f_n)\|_{C(T,H)} \\ \leq \|\mathscr{L}(\lambda_n, y_{\lambda_n}(0), f_n) - \mathscr{L}(\lambda_n, y_{\lambda_n}(0), f_*)\|_{C(T,H)} \\ + \|\mathscr{L}(\lambda_n, y_{\lambda_n}(0_n), f_*) - \mathscr{L}(\lambda_n, y(0), f_*)\|_{C(T,H)} \\ + \|\mathscr{L}(\lambda_n, y(0), f_*) - \mathscr{L}(0, y(0), f_*)\|_{C(T,H)}. \end{aligned} \tag{3.40}$$

Воспользовавшись теоремой 2.1, получим

$$\lim_{n\to\infty} \|\mathscr{L}(\lambda_n, y(0), f_*) - \mathscr{L}(0, y(0), f_*)\|_{C(T,H)} = 0. \tag{3.41}$$

В соответствии с неравенством (3.2)

$$\lim_{n\to\infty} \|\mathscr{L}(\lambda_n, y_{\lambda_n}(0), f_*) - \mathscr{L}(\lambda_n, y(0), f_*)\|_{C(T,H)} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{c^2}\|y_{\lambda_n}(0) - y(0)\| = 0. \tag{3.42}$$

Согласно лемме 3.4 последовательность $x_{\lambda_n}(y_{\lambda_n}(0), f_n) - x_{\lambda_n}(y_{\lambda_n}(0), f_*)$, $n \geq 1$, является равностепенно непрерывной в $C(T, H)$ и

$$\|x_{\lambda_n}(y_{\lambda_n}(0), f_n)(t) - x_{\lambda_n}(y_{\lambda_n}(0), f_*)(t)\| \leq 2M_3, \quad t \in T, \ n \geq 1.$$

Поэтому из последовательности $x_{\lambda_n}(y_{\lambda_n}(0), f_n) - x_{\lambda_n}(y_{\lambda_n}(0), f_*)(t)$, $n \geq 1$, можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся в пространстве $C(T, \omega$-$H)$ к некоторому элементу $z(\cdot) \in C(T, \omega$-$H)$. Как будет видно из ниже приведенных рассуждений, не нарушая общности, мы можем считать, что сама последовательность $x_{\lambda_n}(y_{\lambda_n}(0), f_n) - x_{\lambda_n}(y_{\lambda_n}(0), f_*)$ сходится в $C(T, \omega$-$H)$ к $z(\cdot)$.

С помощью тех же аргументов, которые использовались при доказательстве соотношений (3.37), (3.38), получим

$$\lim_{n\to\infty} \int_T |\langle Bx_{\lambda_n}(y_{\lambda_n}(0), f_n)(t) - Bx_{\lambda_n}(y_{\lambda_n}(0), f_*)(t) - Bz(t), f_*(t) - f_n(t)\rangle|\, dt = 0, \tag{3.43}$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^t \langle Bz(s), f_*(s) - f_n(s)\rangle\, ds = 0. \tag{3.44}$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}c\|x_{\lambda_n}(y_{\lambda_n}(0), f_n)(t) - x_{\lambda_n}(y_{\lambda_n}(0), f_*)(t)\|^2 \\ \leq \int_0^t \langle Bx_{\lambda_n}(y_{\lambda_n}(0), f_n)(s) - Bx_{\lambda_n}(y_{\lambda_n}(0), f_*)(s), f_*(s) - f_n(s)\rangle\, ds, \end{aligned} \tag{3.45}$$

из соотношений (3.43)–(3.45) и равностепенной непрерывности последовательности $x_{\lambda_n}(y_{\lambda_n}(0), f_n) - x_{\lambda_n}(y_{\lambda_n}(0), f_*)$, $n \geq 1$, следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \|x_{\lambda_n}(y_{\lambda_n}(0), f_n) - x_{\lambda_n}(y_{\lambda_n}(0), f_*)\|_{C(T,H)} = 0. \tag{3.46}$$

Теперь утверждение теоремы вытекает из (3.40)–(3.42) и (3.46). Теорема доказана.

Следствие 3.1. *Множество $\mathscr{R}_G$ является компактом в $C(T, H)$.*

Так как $\mathscr{R}_G = \{\mathscr{L}(\lambda, y_\lambda(0), f);\ \lambda \in \Lambda,\ f \in S_G\}$ и множества Λ и ω-S_G являются компактами, следствие вытекает из теоремы 3.1.

§4. Существование и свойства решений включений

В этом параграфе мы перейдем к изложению основных результатов.

Теорема 4.1. *Пусть выполняются гипотезы $H(F)(1)$–(3). Тогда для любого $\lambda \in \Lambda$ множество $\mathscr{R}^\lambda_{\mathrm{ext}\,F}(y_\lambda(0))$ непусто, а множество $\mathscr{R}^\lambda_F(y_\lambda(0))$ является компактным подмножеством пространства $C(T, H) \times \omega$-$L^2(T, H)$.*

Доказательство теоремы дословно повторяет доказательство аналогичной теоремы 4.1 в [2].

Следствие 4.1. *Пусть выполняются гипотезы $H(F)$ (1)–(3). Тогда для каждого $\lambda \in \Lambda$*

(1) множество $\mathscr{T}r^\lambda_{\mathrm{ext}\,F}(y_\lambda(0))$ непусто, а множество $\mathscr{T}r^\lambda_F(y_\lambda(0))$ является компактным подмножеством пространства $C(T, H)$;

(2) множество $\mathscr{A}^\lambda_F(y_\lambda(0))(t)$, $t \in T$, является компактом в H, и отображение $t \to \mathscr{A}^\lambda_F(y_\lambda(0))(t)$ непрерывно из T в $\operatorname{comp} H$.

Следствие вытекает из теоремы 4.1.

Теорема 4.2. *Пусть выполняются гипотезы $H(F)(1)$–(4) и $\lambda \in \Lambda$. Тогда для любого $x_*((y_\lambda(0), f_*) \in \mathscr{T}r^\lambda_F(y_\lambda(0))$ существует последовательность $x^n_\lambda((y_\lambda(0), f_n) \in \mathscr{T}r^\lambda_{\mathrm{ext}\,F}(y_\lambda(0))$, $n \geq 1$, сходящаяся к $x_*((y_\lambda(0), f_*)$ в пространстве $C(T, H)$.*

Доказательство. Рассмотрим отображение

$$\mathscr{F}(x) = \{f(\cdot) \in \mathscr{M}(H);\ f(t) \in F(t, p_r x(t)) \text{ п. в.}\}, \tag{4.1}$$

$x \in \mathscr{R}_G$ (см. (3.30), (3.20)). Согласно (3.21) имеем $\|x(\cdot)\|_{C(T,H)} \leq M_3$ для любого $x(\cdot) \in \mathscr{R}_G$. Из (3.19) и утверждения 4.2 в [7] следует, что $\mathscr{F}(x)$ является отображением из $\mathscr{R}_G$ в $\operatorname{cb} L^2(T, H)$ с выпуклыми значениями и непрерывным в метрике Хаусдорфа на пространстве $\operatorname{cb} L^2(T, H)$. Пусть $\lambda \in \Lambda$ фиксировано и $x_*((y_\lambda(0), f_*) \in \mathscr{T}r^\lambda_F(y_\lambda(0))$. Тогда

$$f_*(t) \in F(t, x_*(t)) \quad \text{п. в.}, \tag{4.2}$$

где $x_*(t) = x_*(y_\lambda(0), f_*)(t)$, и $x_*(t) \in Q$, $t \in T$ (см. (3.10)). Воспользовавшись гипотезой $H(F)(4)$, рассмотрим функцию

$$f(t, y, v) = \langle Bx_*(t) - By, f_*(t) - v\rangle + k_M(t)\|x_*(t) - y\|^2,$$

где $M > 0$ — константа из неравенства (3.9).

Согласно следствию 2.1 из [8] существует последовательность замкнутых множеств $T_k \subset T_{k+1} \subset \cdots \subset T$, $k \geq 1$, $\mu\left(T \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} T_k\right) = 0$ такая, что отображение $F(t,x)$ и функция $f(t,y,v)$ являются непрерывными по совокупности переменных на $T_k \times Q$ и на $T_k \times Q \times H$ соответственно.

Рассмотрим многозначное отображение $V_n : T \times Q \to H$, $n \geq 1$, определенное по правилу

$$V_n(t,y) = \{v \in H;\ f(t,y,v) + 1/n > 0\}, \quad t \in T,\ y \in Q. \tag{4.3}$$

Поскольку функция $f(t,y,v)$ линейна по v, множество $V_n(t,y)$, $t \in T$, $y \in Q$, выпуклое. Более того, график отображения $V_n(t,y)$ — открытое подмножество пространства $T_k \times Q \times H$, $k \geq 1$, в силу непрерывности функции $f(t,y,v)$ на $T_k \times Q \times H$, $k \geq 1$. Положим

$$U_n(t,y) = F(t,y) \cap V_n(t,y), \quad t \in T,\ y \in Q. \tag{4.4}$$

Тогда согласно гипотезе $H(F)(4)$ множество $U_n(t,y)$ непусто и выпукло. Поскольку график отображения $V_n(t,y)$ является открытым множеством в $T_k \times Q \times H$, значениями отображения $V_n(t,y)$ будут выпуклые множества и отображение $F(t,y)$ непрерывно на $T_k \times Q$, $k \geq 1$, то отображение $(t,y) \to U_n(t,y)$ полунепрерывно снизу по Вьеторису на $T_k \times Q$, $k \geq 1$. Этим свойством будет обладать и отображение $(t,y) \to \overline{U}_n(t,y)$, где черта вверху означает замыкание множества $U_n(t,y)$ в H.

Ясно, что

$$\overline{U}_n(t,y) \subset F(t,y), \quad t \in T,\ y \in Q, \tag{4.5}$$

и согласно (4.3), (4.4) будет иметь место неравенство

$$\langle Bx_*(t) - By, f_*(t) - v\rangle + k_M(t)\|x_*(t) - y\|^2 + 1/n \geq 0 \tag{4.6}$$

для любых $y \in Q$, $v \in \overline{U}_n(t,y)$.

Из свойств отображения $\overline{U}_n(t,y)$ следует, что для любой непрерывной функции $x : T \to Q$ отображение $t \to \overline{U}_n(t,x(t))$ измеримо и, значит, имеет измеримые селекторы. Поскольку для любого $x \in \mathscr{T}r_F^\lambda(y_\lambda(0))$ имеет место включение $x(t) \in Q$, $t \in T$, то мы можем определить отображение

$$\mathscr{F}_n^\lambda(x) = \{f(\cdot) \in \mathscr{M}(H);\ f(t) \in \overline{U}_n(t,x(t)) \text{ п. в.}\}, \tag{4.7}$$

$x \in \mathscr{T}r_F^\lambda(y_\lambda(0))$.

Из (4.5) вытекает, что $\mathscr{F}_n^\lambda(x)$ для каждого $x \in \mathscr{T}r_F^\lambda(y_\lambda(0))$ является непустым выпуклым слабо компактным подмножеством пространства $L^2(T,H)$. Используя достаточно стандартные рассуждения, например доказательство леммы 4.1 в [9], получим, что отображение $x \to \mathscr{F}_n^\lambda(x)$ полунепрерывно снизу по Вьеторису на $\mathscr{T}r_F(y_\lambda(0))$. Поэтому согласно теореме Майкла [10] существует непрерывное отображение $v_n : \mathscr{T}r_F^\lambda(y_\lambda(0)) \to L^2(T,H)$ такое, что

$$v_n^\lambda(x) \in \mathscr{F}_n^\lambda(x), \quad x \in \mathscr{T}r_F^\lambda(y_\lambda(0)). \tag{4.8}$$

Из (4.1), (4.7) и (4.8) следует, что

$$v_n^\lambda(x) \in \mathscr{F}(x), \quad x \in \mathscr{T}r_F^\lambda(y_\lambda(0)). \tag{4.9}$$

Поскольку множество $\mathscr{T}r_F^\lambda(y_\lambda(0)) \subset \mathscr{R}_G$ является компактом, согласно теореме Майкла существует непрерывное отображение $\tilde{v}_n^\lambda : \mathscr{R}_G \to L^2(T,H)$ такое, что

$$\tilde{v}_n^\lambda(x) \in \mathscr{F}(x), \quad x \in \mathscr{R}_G, \tag{4.10}$$

$$\tilde{v}_n^\lambda(x) = v_n^\lambda(x), \quad x \in \mathscr{T}r_F^\lambda(y_\lambda(0)). \tag{4.11}$$

Воспользовавшись теоремой 0.2 в [11], получим, что существует непрерывное отображение $g_n^\lambda : \mathscr{R}_G(\lambda) \to L^2(T, H)$ такое, что

$$g_n^\lambda(x) \in \operatorname{ext} \mathscr{F}(x), \quad x \in \mathscr{R}_G(\lambda), \tag{4.12}$$

$$\left\| g_n^\lambda(x) - \tilde{v}_n^\lambda(x) \right\|_\omega \leq 1/n, \quad x \in \mathscr{R}_G(\lambda), \tag{4.13}$$

где $\| \cdot \|_\omega$ — норма (2.1) и $\operatorname{ext} \mathscr{F}(x)$ — совокупность всех экстремальных точек множества $\mathscr{F}(x)$. Из (4.1), (4.12) и следствия 5.2 [7] вытекает, что

$$g_n^\lambda(x)(t) \in \operatorname{ext} F(t, p_r x(t)) \quad \text{п. в.}, \quad x \in \mathscr{R}_G(\lambda), \tag{4.14}$$

С учетом (3.17) $\operatorname{ext} F(t, p_r x) \subset G(t)$, $x \in H$. Поэтому (см. (3.18))

$$g_n^\lambda(x) \in S_G, \quad x \in \mathscr{R}_G(\lambda). \tag{4.15}$$

Рассмотрим отображение $f \to g_n^\lambda(\mathscr{L}(\lambda, y_\lambda(0), f))$, которое согласно теореме 3.1 является непрерывным из ω-S_G в $L^2(T, H)$ и тем самым из ω-S_G в ω-$L^2(T, H)$. Из (4.15) и включения $\mathscr{L}(\lambda, y_\lambda(0), f) \in \mathscr{R}_G(\lambda)$, $f \in S_G$, следует, что $g_n^\lambda(\mathscr{L}(\lambda, y_\lambda(0), f)$ — непрерывное отображение из ω-S_G в ω-S_G. Поскольку S_G является выпуклым компактным подмножеством пространства ω-$L^2(T, H)$, согласно теореме Шаудера существует точка $f_n^\lambda \in S_G$ такая, что

$$f_n^\lambda = g_n^\lambda\big(\mathscr{L}(\lambda, y_\lambda(0), f_n^\lambda\big). \tag{4.16}$$

Положим

$$x_n^\lambda(\cdot) = x_n\big(y_\lambda(0), f_n^\lambda\big) = \mathscr{L}\big(\lambda, y_\lambda(0), f_n^\lambda\big). \tag{4.17}$$

Тогда из (4.14), (4.16), (4.17) следует, что

$$f_n^\lambda(t) = g_n^\lambda\big(x_n^\lambda\big)(t) \in \operatorname{ext} F\big(t, p_r x_n^\lambda(t)\big) \quad \text{п. в.} \tag{4.18}$$

Воспользовавшись (3.13) и аргументами, приведенными в § 3, получаем, что $\big(x_n^\lambda(\cdot), f_n^\lambda\big) \in \mathscr{R}_{\operatorname{ext} F}^\lambda(y_\lambda(0))$. Поэтому $x_n^\lambda(\cdot) \in \mathscr{T}r_{\operatorname{ext} F}^\lambda(y_\lambda(0))$. Из (4.11), (4.13), (4.17), (4.18) вытекает, что

$$\left\| f_n^\lambda - v_n^\lambda\big(x_n^\lambda\big) \right\|_\omega \leq 1/n, \quad n \geq 1. \tag{4.19}$$

Поскольку $x_n^\lambda(t) \in Q$, $n \geq 1$, $t \in T$, согласно (4.6)–(4.8) справедливо неравенство

$$\big\langle Bx_*(t) - Bx_n^\lambda(t), f_*(t) - v_n^\lambda\big(x_n^\lambda\big)(t) \big\rangle + k_M(t) \big\| x_*(t) - x_n^\lambda(t) \big\|^2 + 1/n \geq 0, \quad n \geq 1. \tag{4.20}$$

В силу монотонности оператора $\partial\varphi_\lambda^t$ и (2.5) имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} c \big\| x_*(t) - x_n^\lambda(t) \big\|^2 &\leq \frac{1}{2} \big\langle x_*^\lambda(t) - x_n^\lambda(t), Bx_*(t) - Bx_n^\lambda(t) \big\rangle \\ &\leq \int_0^t \big\langle Bx_*^\lambda(s) - Bx_n^\lambda(s), f_n^\lambda(s) - f_*(s) \big\rangle \, ds \\ &= \int_0^t \big\langle Bx_*(s) - Bx_n^\lambda(s), f_n^\lambda(s) - v_n^\lambda\big(x_n^\lambda\big)(s) \big\rangle \, ds \\ &\quad + \int_0^t \big\langle Bx_*(s) - Bx_n^\lambda(s), v_n^\lambda\big(x_n^\lambda\big)(s) - f_*(s) \big\rangle \, ds. \end{aligned} \tag{4.21}$$

Так как $f_n^\lambda, v_n^\lambda(x_n^\lambda) \in S_G$, $n \geq 1$, последовательность $f_n^\lambda - v_n^\lambda(x_n^\lambda)$, $n \geq 1$, ограничена в $L^2(T,H)$. Тогда из (4.19) и леммы 2.1 следует, что последовательность $f_n^\lambda - v_n^\lambda(x_n^\lambda)$, $n \geq 1$, сходится в ω-$L^2(T,H)$ к нулевому элементу пространства $L^2(T,H)$. Поскольку множество $\mathscr{T}r_{\operatorname{ext} F}(y_\lambda(0))$ относительно компактно в $C(T,H)$, множество $\{Bx_*^\lambda - Bx_n^\lambda\}_{n\geq 1}$ относительно компактно в $C(T,H)$ и, следовательно, в $L^2(T,H)$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_0^t \left\langle Bx_*(s) - Bx_n^\lambda(s), f_n^\lambda(s) - v_n^\lambda(x_n^\lambda)(s)\right\rangle ds = 0, \quad t \in T. \tag{4.22}$$

Не нарушая общности, можем считать, что последовательность $x_n^\lambda(\cdot)$, $n \geq 1$, сходится в $C(T,H)$ к некоторому элементу $y(\cdot)$. Учитывая (4.20), (4.22) и переходя к пределу в (4.21), получим

$$\frac{1}{2}c\|x_*(t) - y(t)\|^2 \leq \int\limits_0^t k_M(t)\|x_*(s) - y(s)\|^2\, ds, \quad t \in T. \tag{4.23}$$

Из (4.23) и неравенства Беллмана — Гронуолла следует, что $y(t) = x(t)$, $t \in T$. Тем самым последовательность $x_n^\lambda(\cdot) \in \mathscr{T}r_{\operatorname{ext} F}(y_\lambda(0))$, $\lambda \in \Lambda$, сходится к $x_*(\cdot) \in \mathscr{T}r_F(y_\lambda(0))$. Теорема доказана.

Следствие 4.2. *Пусть выполняются гипотезы $H(F)(1)$–(4). Тогда имеют место равенства*

$$\mathscr{T}r_F^\lambda(y_\lambda(0)) = \overline{\mathscr{T}r_{\operatorname{ext} F}^\lambda(y_\lambda(0))}, \quad \lambda \in \Lambda,$$

где черта вверху означает замыкание в $C(T,H)$, и

$$\mathscr{A}_F^\lambda(y_\lambda(0))(t) = \overline{\mathscr{A}_{\operatorname{ext} F}^\lambda(y_\lambda(0))(t)}, \quad \lambda \in \Lambda,\ t \in T,$$

где черта вверху означает замыкание в H.

Следствие вытекает из следствия 4.1 и теоремы 4.2.

Теорема 4.3. *Пусть выполняются гипотезы $H(F)(1)$–(4). Тогда отображение $\lambda \to \mathscr{T}r_F^\lambda(y_\lambda(0))$ непрерывно из Λ в $\operatorname{comp} C(T,H)$.*

Доказательство. Поскольку множество Λ имеет только одну предельную точку $\lambda = 0$, нужно показать, что при $\lambda_n \in \Lambda$, $\lambda_n \neq 0$, $n \geq 1$, $\lambda_n \to 0$ последовательность $\mathscr{T}r_F^{\lambda_n}(y_{\lambda_n}(0))$ сходится к $\mathscr{T}r_F(y(0))$ в метрике Хаусдорфа на пространстве $\operatorname{comp} C(T,H)$.

Вначале покажем, что отображение $\lambda \to \mathscr{T}r_F^\lambda(y_{\lambda_n}(0))$ полунепрерывно снизу по Вьеторису в точке $\lambda = 0$. Для этого достаточно доказать, что для любого $x_*(y(0), f_*) \in \mathscr{T}r_F(y(0))$ существует последовательность $x_{\lambda_n}(y_{\lambda_n}(0), f_n) \in \mathscr{T}r_F^{\lambda_n}(y_{\lambda_n}(0))$, $n \geq 1$, сходящаяся к $x_*(y(0), f_*)$ в $C(T,H)$.

Пусть $x_* = x_*(y(0), f_*) \in \mathscr{T}r_F(y(0))$. Сохраним все обозначения и их смысл, использованные при доказательстве теоремы 4.2. Определим $\mathscr{F}(x)$, $f(t,y,v)$, $V_n(t,y)$, $U_n(t,y)$, $\overline{U}_n(t,y)$, как и при доказательстве теоремы 4.2. Повторяя доказательство теоремы 4.2, получим, что существуют отображения $v_n^{\lambda_n}$, $\tilde{v}_n^{\lambda_n}$, удовлетворяющие (4.8), (4.10), (4.11) с $\lambda = \lambda_n$.

Зафиксируем $n \geq 1$ и рассмотрим отображение $f \to \tilde{v}_n^{\lambda_n}(\mathscr{L}(\lambda_n, y_{\lambda_n}(0), f)$, $f \in S_G$. Как и при доказательстве теоремы 4.2, получим, что существует точка $f_n \in S_G$ такая, что

$$f_n = \tilde{v}_n^{\lambda_n}(\mathscr{L}(\lambda_n, y_{\lambda_n}(0), f_n). \tag{4.24}$$

Положим
$$x_n(\cdot) = x_{\lambda_n}(y_{\lambda_n}(0), f_n) = \mathscr{L}(\lambda_n, y_{\lambda_n}(0), f_n). \tag{4.25}$$
Тогда, воспользовавшись (4.10), имеем
$$f_n(t) = \tilde{v}_n^{\lambda_n}(x_n)(t) \in F(t, p_r x_n(t)) \quad \text{п. в.} \tag{4.26}$$
Следовательно, в соответствии с (4.25), (4.26) $x_n \in \mathscr{T}r_F^{\lambda_n}(y_{\lambda_n}(0))$, $n \geq 1$. Полагая в (4.7), (4.8), (4.11) $\lambda = \lambda_n$ и принимая во внимание (4.6), (4.26), придем к неравенству
$$\langle Bx_*(t) - Bx_n(t), f_*(t) - f_n(t)\rangle + k_M(t)\|x_*(t) - x_n(t)\|^2 + 1/n \geq 0. \tag{4.27}$$
Поскольку $f_n \in S_G$, $n \geq 1$, не нарушая общности, можем считать, что последовательность f_n сходится в ω-$L^2(T, H)$ к некоторому элементу φ. Тогда из теоремы 3.1 следует, что
$$x_n(\cdot) = \mathscr{L}(\lambda_n, y_{\lambda_n}(0), f_n) \to z(\cdot) = \mathscr{L}(0, y(0), \varphi) \tag{4.28}$$
в $C(T, H)$. Так как $f_n(t) \in F(t, x_n(t))$ почти всюду, используя стандартные рассуждения (см., например, доказательство теоремы 4.1 в [2]), получим
$$\varphi(t) \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\mathrm{co}}\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} f_k(t)\right) \subset F(t, z(t)) \quad \text{п. в.} \tag{4.29}$$
Теперь из (4.28), (4.29) следует, что $z(\cdot) = z(y(0), \varphi)$ является элементом множества $\mathscr{T}r_F(y(0))$. Воспользовавшись определением решения включения (1.1), по аналогии с (4.21), получим
$$\frac{1}{2}c\|x_*(t) - z(t)\|^2 \leq \int_0^t \langle Bx_*(s) - Bz(s), \varphi(s) - f_*(s)\rangle\, ds, \quad t \in T. \tag{4.30}$$
Из неравенства (4.27) следует, что
$$\int_0^t \langle Bx_*(s) - Bx_n(s), f_n(s) - f_*(s)\rangle\, ds \leq \int_0^t k_M(t)\|x_*(s) - x_n(s)\|^2\, ds + 1/n. \tag{4.31}$$
Учитывая, что $Bx_n \to Bz$ в $L^2(T, H)$ и $f_n \to \varphi$ в ω-$L^2(T, H)$ и переходя к пределу в (4.31), приходим к неравенству
$$\int_0^t \langle Bx_*(s) - Bz(s), \varphi(s) - f_*(s)\rangle\, ds \leq \int_0^t k_M(t)\|x_*(s) - z(s)\|^2\, ds. \tag{4.32}$$
Из (4.30), (4.32) и неравенства Беллмана — Гроноулла вытекает, что $x_*(t) = z(t)$, $t \in T$. Тем самым последовательность $x_n(\cdot) \in \mathscr{T}r_F^{\lambda_n}(y_{\lambda_n}(0))$, $n \geq 1$, сходится в $C(T, H)$ к $x_*(\cdot) \in \mathscr{T}r_F(y(0))$. Поэтому отображение $\lambda \to \mathscr{T}r_F^{\lambda}(y_\lambda(0))$ полунепрерывно снизу по Вьеторису.

Докажем теперь полунепрерывность сверху по Вьеторису отображения $\lambda \to \mathscr{T}r_F^{\lambda}(y_\lambda(0))$, $\lambda \in \Lambda$. Поскольку значениями отображения $\mathscr{T}r_F^{\lambda}(y_\lambda(0))$ являются компактные множества из $C(T, H)$ и $\mathscr{T}r_F^{\lambda}(y_\lambda(0)) \subset \mathscr{R}_G$, $\lambda \in \Lambda$ (см. (3.30)) и в соответствии со следствием 3.1 множество $\mathscr{R}_G$ — компакт в $C(T,H)$, для доказательства полунепрерывности сверху по Вьеторису отображения $\mathscr{T}r_F^\lambda(y_\lambda(0))$ достаточно доказать замкнутость графика отображения $\lambda \to \mathscr{T}r_F^\lambda(y_\lambda(0))$. Пусть $\lambda_n \in \Lambda$, $\lambda_n \neq 0$, $x_n = x_n(f_n) \in \mathscr{T}r_F^{\lambda_n}(y_{\lambda_n}(0))$ и $\lambda_n \to 0$, $x_n \to z$ в $C(T,H)$. Тогда

$$x_n(\cdot) = \mathscr{L}(\lambda_n, y_{\lambda_n}(0), f_n) \quad \text{и} \quad f_n(t) \in F(t, x_n(t)) \quad \text{п. в.}$$

Так как $f_n \in S_G$, $n \geq 1$, можем считать, что $f_n \to \varphi$ в ω-$L^2(T,H)$. Тогда будут иметь место соотношения (4.28), (4.29), из которых следует, что $z \in \mathscr{T}r_F(y(0))$. Тем самым отображение $\mathscr{T}r_F^\lambda(y_\lambda(0))$ имеет замкнутый график. Поэтому отображение $\mathscr{T}r_F^\lambda(y_\lambda(0))$ полунепрерывно сверху по Вьеторису. Поскольку отображение $\mathscr{T}r_F^\lambda(y_\lambda(0))$ одновременно полунепрерывно сверху и снизу по Вьеторису и его значениями являются компактные множества из $C(T,H)$, оно непрерывно в метрике Хаусдорфа. Теорема доказана.

Следствие 4.3. *Пусть выполняются гипотезы $H(F)$(1)–(4). Тогда для каждого $\lambda \in \Lambda$ функция $t \to \mathscr{A}_F^\lambda(y_\lambda(0))(t)$ является элементом пространства $C(T, \operatorname{comp} H)$ и отображение $\lambda \to \mathscr{A}_F^\lambda(y_\lambda(0))$ непрерывно из Λ в $C(T, \operatorname{comp} H)$.*

Следствие вытекает из теоремы 5.3 и следствия 4.1.

Замечание 4.1. Из следствий 4.2, 4.3 получаем, что множество достижимости включения (1.1), рассматриваемое как функция времени, с любой степенью точности равномерно по t может быть аппроксимировано множествами достижимости включений (1.2), (1.8).

§ 5. Управляемые системы

В этом параграфе мы приведем аналоги полученных выше результатов применительно к управляемым системам. Пусть Y — сепарабельное банахово пространство, моделирующее пространство управлений. Рассмотрим управляемую систему

$$\begin{gathered} -\dot{x}(t) \in \partial\varphi^t(Bx(t)) + g(t,x(t))u(t) + d(t,x(t)) \quad \text{п. в.}, \\ x(0) = y(0), \quad B(y(0)) \in \operatorname{dom}\varphi^0 \end{gathered} \tag{5.1}$$

с ограничениями

$$u(t) \in U(t,x(t)) \quad \text{п. в.}, \tag{5.2}$$

$$u(t) \in \operatorname{ext} U(t,x(t)) \quad \text{п. в.} \tag{5.3}$$

и ее аппроксимацию

$$\begin{gathered} -\dot{x}_\lambda(t) \in \partial\varphi_\lambda^t(Bx_\lambda(t)) + g(t,x_\lambda(t))u(t) + d(t,x_\lambda(t)) \quad \text{п. в.}, \\ x(\lambda) = y_\lambda(0), \quad By_\lambda(0) \in \operatorname{dom}\varphi^0, \quad \lambda \in (0,1], \end{gathered} \tag{5.4}$$

с ограничениями (5.2), (5.3).

Обозначим через $\mathscr{L}(Y,H)$ пространство непрерывных линейных операторов из Y в H.

Введем следующие предположения.

Гипотезы $H(g)$. *Отображение $g : T \times H \to \mathscr{L}(Y,H)$ таково, что*
(1) *отображение $t \to g(t,x)u$ измеримо для любых $(x,u) \in H \times Y$;*
(2) *отображение $x \to g(t,x)u$ непрерывно п. в. для любых $u \in Y$;*
(3) $\|g(t,x)\|_{\mathscr{L}(Y,H)} \leq a_1(t) + b_1(t)\|x\|, a_1(\cdot), b_1(\cdot) \in L^\infty(T,\mathbb{R}^+)$.

Гипотезы $H(d)$**.** *Отображение* $d : T \times H \to H$ *таково, что*
(1) *отображение* $t \to d(t, x)$ *измеримо;*
(2) *отображение* $x \to d(t, x)$ *непрерывно п. в.;*
(3) $\|d(t, x)\| \leq a_1(t) + b_1(t)\|x\|$.

Гипотезы $H(U)$**.** *Отображение* $U : T \times H \to \operatorname{conv} H$ *таково, что*
(1) *отображение* $t \to U(t, x)$ *измеримо для каждого* $x \in H$*;*
(2) *отображение* $x \to U(t, x)$ *непрерывно почти всюду, и для каждого ограниченного множества* $V \subset H$ *множество* $\{\cup(g(t, x)U(t, x) + d(t, x));\, x \in V\}$ *относительно компактно;*
(3) *для почти всех* $t \in T$ *имеет место неравенство* $\|U(t, x)\|_Y \leq r$, $r > 0$*;*
(4) *для любого* $m > 0$ *существует функция* $k_m(\cdot) \in L^1(T, \mathbb{R}^+)$ *такая, что для любых* $x, y \in H$, $\|x\| \leq m$, $\|y\| \leq m$, $u \in U(t, x)$ *найдется элемент* $v \in U(t, y)$, *удовлетворяющий неравенству*

$$\langle Bx - By, g(t, x)u + d(t, x) - g(t, y)v - d(t, y)\rangle + k_m(t)\|x - y\|^2 \geq 0. \tag{5.5}$$

Под решением управляемой системы (5.1), (5.2) понимается пара $(x(\cdot), u(\cdot))$ такая, что $x : T \to H$ — абсолютно непрерывная функция, $x(0) = y(0)$, $Bx(t) \in \operatorname{dom} \partial\varphi^t$ почти всюду и $u(\cdot) \in L^2(T, Y)$, удовлетворяющие (1.1), (1.2) почти всюду. Если $(x(\cdot), u(\cdot))$ — решение системы (5.1), (5.2), то $x(\cdot)$ называется *траекторией*, а $u(\cdot)$ — *управлением.* Аналогично определяются решения управляемых систем (5.1), (5.3), (5.4), (5.2) и (5.4), (5.3). Для управляемых систем множества траекторий обозначаются теми же символами, что и для включений, рассмотренных в предыдущих параграфах, с заменой F на U. То же самое имеет место и для множеств достижимости.

Рассмотрим многозначные отображения

$$V(t, x) = g(t, x)U(t, x), \tag{5.6}$$

$$F(t, x) = V(t, x) + d(t, x). \tag{5.7}$$

Лемма 5.1. *Пусть выполняются гипотезы* $H(g)$, $H(d)$, $H(U)$. *Тогда* $F(t, x)$ *является отображением из* $T \times H$ *в* $\operatorname{conv} H$, *удовлетворяющим всем гипотезам* $H(F)$.

Утверждения леммы непосредственно следуют из гипотез $H(g)$, $H(d)$, $H(U)$, и их доказательство достаточно очевидно.

Всюду в дальнейшем, говоря о включениях (1.1), (1.2), (1.7), (1.8), будем подразумевать, что в них в качестве отображения $F(t, x)$ рассматривается отображение, определенное равенством (5.7).

Пусть (x, f) — решение включения (1.1). Тогда $f(\cdot) \in L^2(T, H)$ и имеют место включение (1.3) и

$$f(t) \in g(t, x(t))U(t, x(t)) + d(t, x(t)). \tag{5.8}$$

Тогда

$$f(t) - d(t, x(t)) \in g(t, x(t))U(t, x(t)).$$

Из гипотез $H(g)(1)$, (2) и теоремы 7.1 в [12] следует, что существует измеримая функция $u : T \to Y$, удовлетворяющая

$$u(t) \in U(t, x(t)) \quad \text{п. в.}, \tag{5.9}$$

$$f(t) - d(t, x(t)) = g(t, x(t))u(t). \tag{5.10}$$

В соответствии с гипотезой $H(U)(3)$ $u(\cdot) \in L^2(T, H)$. Поэтому согласно (5.8)–(5.10) пара $(x(\cdot), u(\cdot))$ является решением управляемой системы (5.1), (5.2). Если (x, u) — решение управляемой системы (5.1), (5.2), то (x, f), где $f(\cdot)$ определено по формуле (5.10), является решением включения (1.1). Поэтому

$$\mathscr{T}r_F(y(0)) = \mathscr{T}r_U(y(0)). \tag{5.11}$$

Аналогично получаем, что

$$\mathscr{T}r_F^{\lambda}(y_\lambda(0)) = \mathscr{T}r_U^{\lambda}(y_\lambda(0)), \quad \lambda \in (0, 1]. \tag{5.12}$$

Пусть (x, f) — решение включения (1.7). Тогда $f(\cdot) \in L^2(T, H)$ и

$$f(t) \in \operatorname{ext} F(t, x(t)) = \operatorname{ext}\{g(t, x(t))U(t, x(t))\} + d(t, x(t)). \tag{5.13}$$

Обозначим через $S(V)$, $S(U)$ множества

$$S(V) = \{f(\cdot) \in L^2(T, H);\ f(t) \in V(t, x(t)) \text{ п. в.}\},$$

$$S(U) = \{u(\cdot) \in L^2(T, Y);\ u(t) \in U(t, x(t)) \text{ п. в.}\}.$$

Тогда $S(V)$ и $S(U)$ являются выпуклыми компактными подмножествами пространств ω-$L^2(T, H)$ и ω-$L^2(T, Y)$ соответственно. Поэтому множества $\operatorname{ext} S(V)$ и $\operatorname{ext} S(U)$ непусты.

Согласно следствию 5.2 из [7]

$$\operatorname{ext} S(V) = \{f(\cdot) \in L^2(T, H);\ f(t) \in \operatorname{ext} V(t, x(t)) \text{ п. в.}\}, \tag{5.14}$$

$$\operatorname{ext} S(U) = \{u(\cdot) \in L^2(T, Y);\ u(t) \in \operatorname{ext} U(t, x(t)) \text{ п. в.}\}. \tag{5.15}$$

Рассмотрим оператор $A : L^2(T, Y) \to L^2(T, H)$, определенный по правилу

$$A(u)(t) = g(t, x(t))u(t) \text{ п. в.}, \quad u(\cdot) \in L^2(T, Y).$$

Из гипотез $H(g)$ следует, что A является линейным непрерывным оператором. С учетом рассуждений, использованных при доказательстве равенства (5.11), получим, что

$$S(V) = A(S(U)).$$

Поэтому

$$\operatorname{ext} S(V) \subset A(\operatorname{ext} S(U)). \tag{5.16}$$

В соответствии с (5.13)

$$f(t) - d(t, x(t)) \in \operatorname{ext} V(t, x(t)). \tag{5.17}$$

Теперь из (5.14), (5.15), (5.17) вытекает, что существует $u(\cdot) \in L^2(T, H)$ такое, что

$$u(t) \in \operatorname{ext} U(t, x(t)) \quad \text{п. в.} \tag{5.18}$$

и

$$f(t) - d(t, x(t)) = g(t, x(t))u(t). \tag{5.19}$$

В силу (5.18), (5.19) $(x(\cdot), u(\cdot))$ является решением управляемой системы (5.1), (5.3). Поэтому

$$\mathscr{T}r_{\operatorname{ext} F}(y(0)) \subset \mathscr{T}r_{\operatorname{ext} U}(y(0)). \tag{5.20}$$

По аналогии получим

$$\mathscr{T}r^{\lambda}_{\operatorname{ext} F}(y_\lambda(0)) \subset \mathscr{T}r^{\lambda}_{\operatorname{ext} U}(y_\lambda(0)), \quad \lambda \in (0, 1]. \tag{5.21}$$

Подводя итог сказанному выше, мы приходим к следующим утверждениям.

Теорема 5.1. *Пусть выполняются гипотезы $H(g)$, $H(d)$, $H(U)$. Тогда*

(1) $\mathscr{T}r_U^\lambda(y_\lambda(0))$, $\lambda \in \Lambda$, *является компактным подмножеством пространства $C(T, H)$;*

(2) $\mathscr{T}r_U^\lambda(y_\lambda(0)) = \overline{\mathscr{T}r_{\operatorname{ext} U}^\lambda(y_\lambda(0))}$, $\lambda \in \Lambda$, *где черта означает замыкание в $C(T, H)$;*

(3) *отображение $\lambda \to \mathscr{T}r_U^\lambda(y_\lambda(0))$ непрерывно из Λ в $\operatorname{comp} C(T, H)$.*

Теорема 5.1 вытекает из леммы 5.1, следствий 4.1, 4.2, теоремы 4.3 и (5.12), (5.20).

Следствие 5.1. *Пусть выполняются гипотезы $H(g)$, $H(c)$ и $H(U)$. Тогда*

(1) $\mathscr{A}_U^\lambda(u(\lambda))(t)$, $\lambda \in \Lambda$, $t \in T$, *является компактным подмножеством пространства H и*

$$\mathscr{A}_U^\lambda(y_\lambda(0))(t) = \overline{\mathscr{A}_{\operatorname{ext} U}^\lambda(y_\lambda(0))(t)}, \quad \lambda \in \Lambda,\ t \in T,$$

где черта вверху означает замыкание в H;

(2) *отображение $t \to \mathscr{A}_U^\lambda(y_\lambda(0))(t)$, $\lambda \in \Lambda$, непрерывно из T в $\operatorname{comp} H$ и, следовательно, является элементом пространства $C(T, \operatorname{comp} H)$;*

(3) *отображение $\lambda \to \mathscr{A}_U^\lambda(y_\lambda(0))$ непрерывно из Λ в $C(T, \operatorname{comp} H)$.*

Следствие представляет собой перефразировку теоремы 5.1.

Лемма 5.2. *Пусть выполняются гипотезы $H(g)(1)$, (3), $H(d)$, $H(U)(1)$–(3) и для любого $m > 0$ существуют $l_m > 0$ и $r_m(\cdot) \in L^1(T, \mathbb{R}^+)$ такие, что для любых $x, y \in H$, $\|x\| \le m$, $\|y\| \le m$*

$$\|g(t, x) - g(t, y)\|_{\mathscr{L}(Y,H)} \le l_m \|x - y\|, \tag{5.22}$$

$$D_Y(U(t, x), U(t, y)) \le l_m \|x - y\|, \tag{5.23}$$

$$\langle x - y, Bd(t, x) - Bd(t, y)\rangle + r_m(t)\|x - y\|^2 \ge 0. \tag{5.24}$$

Тогда справедливы все утверждения теоремы 5.1 *и следствия* 5.1.

Доказательство. Если мы покажем, что выполняются гипотезы $H(g)$, $H(U)$, то утверждения леммы следуют из теоремы 5.1 и следствия 5.1. Из (5.22) вытекает, что гипотеза $H(g)(2)$ выполняется. Поэтому гипотезы $H(g)$ имеют место. Остается показать, что выполняется неравенство (5.5). Пусть $x, y \in H$, $\|x\| \le m$, $\|y\| \le m$ и $u \in U(t, x)$. Тогда из (5.23) и компактности множества $U(t, x)$ следует, что существует элемент $v \in U(t, y)$ такой, что

$$\|u - v\| \le l_m \|x - y\|. \tag{5.25}$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned} -\langle Bx - By, g(t, x)u - g(t, y)v\rangle &\le \|B\| \cdot \|x - y\| \cdot \|g(t, x)\|_{\mathscr{L}(Y,H)} \cdot \|u - v\| \\ &\quad + \|B\| \cdot \|x - y\| \cdot \|g(t, x) - g(t, y)\|_{\mathscr{L}(Y,H)} \cdot \|v\|. \end{aligned}$$

Воспользовавшись (3.1), $H(g)(3)$, $H(U)(3)$, (5.22), (5.24) и (5.25), получим

$$-\langle Bx - By, g(t, x)u - g(t, y)v + d(t, x) - d(t, y)\rangle \le k_m(t)\|x - y\|^2,$$

где $k_m(t) = \frac{1}{c}(a_1(t) + b_1(t)m) \cdot l_m + \frac{1}{c} \cdot l_m r + r_m(t)$. Лемма доказана.

Замечание 5.1. Для $y_0 \in H$, $By_0 \in \operatorname{dom} \varphi^0$, $\varphi^0(By_0) \le M_1$ мы выбирали $y_n \in M$, $By_n \in \operatorname{dom} \varphi_0$, $y_n \to y_0$ так, чтобы

$$\varphi^0(By_n) \le M_1. \tag{5.26}$$

Если функция $\varphi^0(x)$ непрерывна в точке By_0, то неравенство (5.26) будет выполняться для любой последовательности $y_n \to y_0$, $By_n \in \operatorname{dom}\varphi^0$ при некотором $M_1 > 0$. Поэтому если функция $\varphi^0(x)$ непрерывна в точке $By_0 \in \operatorname{dom}\varphi^0$, то все наши утверждения будут справедливы для любой последовательности $y_n \to y_0$, $By_n \in \operatorname{dom}\varphi^0$. В частности, если внутренность $\operatorname{int}\operatorname{dom}\varphi^0$ эффективной области $\operatorname{dom}\varphi^0$ непуста и $By_0 \in \operatorname{int}\operatorname{dom}\varphi^0$, то функция $\varphi(x)$ непрерывна в точке By_0.

§ 6. Пример

Пусть управляемая система описывается уравнением

$$\begin{gathered} -\dot{x} = f_1(\sigma_1) + d_1(x,y), \\ -\dot{y} = f_2(\sigma_2) + g_1(x,y)u + d_2(x,y), \quad x(0) = x^1(0),\ y(0) = y^1(0) \end{gathered} \tag{6.1}$$

с ограничением

$$|u| \le 1, \tag{6.2}$$

где

$$\sigma_1 = b_{11}x + b_{12}y, \quad \sigma_2 = b_{21}x + b_{22}y, \quad b_{12} = b_{21}. \tag{6.3}$$

Функции $f_1(\sigma)$ и $f_2(\sigma)$ имеют вид

$$f_1(\sigma) = 1 + \sigma,\ \sigma > 0, \quad f_1(\sigma) = -1 + \sigma,\ \sigma < 0, \tag{6.4}$$

$$f_2(\sigma) = \exp(-\nu \cdot |\sigma|)\operatorname{sgn}\sigma, \tag{6.5}$$

где $\operatorname{sgn}\sigma = 1$, $\sigma > 0$, $\operatorname{sgn}\sigma = -1$, $\sigma < 0$, $\nu > 0$. В точке $\sigma = 0$ функции $f_1(\sigma)$ и $f_2(\sigma)$ не определены. Если под решением уравнения (6.1) с разрывной правой частью понимать решение в смысле А. Ф. Филиппова [13], то в точке $\sigma = 0$ мы должны функции $f_1(\sigma)$ и $f_2(\sigma)$ доопределить следующим образом: $f_1(0) = [-1,1]$, $f_2(0) = [-1,1]$. Всюду в дальнейшем, чтобы не вводить новых обозначений, под $f_1(\sigma)$ и $f_2(\sigma)$ мы будем понимать эти функции, доопределенные в точке $\sigma = 0$ указанным выше способом. Нетрудно убедиться, что имеют место равенства

$$f_1(\sigma) = \operatorname{sgn}\sigma + \sigma, \quad f_2(\sigma) = \operatorname{sgn}\sigma + f_2^*(\sigma), \tag{6.6}$$

где

$$f_2^*(\sigma) = \begin{cases} -(1 - \exp(-\nu\sigma), & \text{если } \sigma > 0, \\ (1 - \exp(\nu\sigma), & \text{если } \sigma \le 0. \end{cases} \tag{6.7}$$

Функция $f_2^*(\sigma)$ является липшицевой, и

$$|f_2^*(\sigma)| \le 1. \tag{6.8}$$

Учитывая (6.3), (6.6), (6.7), систему (6.1) перепишем в виде включения

$$\begin{gathered} -\dot{x} \in \operatorname{sgn}\sigma_1(x,y) + \sigma_1(x,y) + d_1(x,y), \\ -\dot{y} \in \operatorname{sgn}\sigma_2(x,y) + f_2^*(\sigma_2(x,y)) + g_1(x,y)u + d_2(x,y). \end{gathered} \tag{6.9}$$

Пусть

$$q_\lambda(\sigma) = \begin{cases} -1, & \text{если } \sigma < -\lambda, \\ 1/\lambda, & \text{если } |\sigma| \le \lambda, \\ +1, & \text{если } \sigma > \lambda, \end{cases} \tag{6.10}$$

$\lambda \in (0,1]$. Наряду с системой (6.9) рассмотрим систему

$$
\begin{aligned}
-\dot{x}_\lambda &= q_\lambda(\sigma_1(x_\lambda, y_\lambda) + \sigma_1(x_\lambda, y_\lambda) + d_1(x_\lambda, y_\lambda),\\
-\dot{y}_\lambda &= q_\lambda(\sigma_2(x_\lambda, y_\lambda)) + f_2^*(\sigma_2(x_\lambda, y_\lambda)) + g_1(x_\lambda, y_\lambda)u + d_2(x_\lambda, y_\lambda),
\end{aligned}
\tag{6.11}
$$

$x_\lambda(0) = x_\lambda^1(0)$, $y_\lambda(0) = y_\lambda^1(0)$, $\lambda \in (0,1]$.

Пусть $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$. Рассмотрим функцию $\varphi(v) = |v_1| + |v_2|$. Используя свойства выпуклых функций и их субдифференциалов, получим

$$\partial\varphi(v) = \{\operatorname{sgn} v_1, \operatorname{sgn} v_2\}, \tag{6.12}$$

$$\partial\varphi_\lambda(v) = \{q_\lambda(v_1), q_\lambda(v_2)\}, \tag{6.13}$$

где q_λ определяется по правилу (6.10).

Пусть $z = (x, y)$. Обозначим

$$g(z) = (0, g_1(x,y)), \quad d(z) = (\sigma_1(x,y) + d_1(x,y), f_2^*(\sigma_2(x,y)) + d_2(x,y)). \tag{6.14}$$

Рассмотрим матрицу $B = \{b_{ij}\}$ размера 2×2, где коэффициенты b_{ij} взяты из равенств (6.3). Теперь, воспользовавшись (6.10), (6.13), (6.14), мы можем записать системы (6.9), (6.11) в следующем виде:

$$-\dot{z} \in \partial\varphi(Bz) + g(z)u + d(z), \quad z(0) = z^1(0), \tag{6.15}$$

$$-\dot{z}_\lambda \in \partial\varphi_\lambda(Bz_\lambda) + g(z_\lambda)u + d(z_\lambda), \quad z_\lambda(0) = z_\lambda^1(0), \quad \lambda \in (0,1], \tag{6.16}$$

с ограничением

$$u \in U, \quad U = [-1, 1]. \tag{6.17}$$

Из (6.15), (6.16) следует, что система (6.11) является аппроксимацией системы (6.9).

Введем следующие предположения:

(1) B является положительно определенной матрицей;

(2) $g_1(x,y)$ является локально липшицевой функцией, и

$$|g_1(x,y)| \le a_1 + b_1(|x| + |y|); \tag{6.18}$$

(3) $d_1(x,y)$ и $d_2(x,y)$ являются локально липшицевыми функциями, и

$$|d_1(x,y)| \le a_1 + b_1(|x| + |y|), \tag{6.19}$$

$$|d_2(x,y)| \le a_1 + b_1(|x| + |y|), \quad a_1, b_1 > 0. \tag{6.20}$$

Так как матрица B симметричная и положительно определенная, то оператор B является самосопряженным и коэрцитивным. Из (6.3), (6.18)–(6.20) следует, что $g(z)$ — линейный локально липшицев оператор из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}^2$, удовлетворяющий гипотезам $H(g)$, $d(z)$, будет локально липшицевой функцией, удовлетворяющей гипотезам $H(d)$. Ясно, что отображение U удовлетворяет гипотезам $H(U)(1)$–(3). Известно, что любая локально липшицева функция является липшицевой на выпуклом компактном множестве. Поэтому имеют место неравенства (5.22), (5.23). Используя липшицевость функции $d(z)$ на выпуклом компакте, получим, что выполняется неравенство (5.24).

Поскольку $\operatorname{dom}\varphi = \mathbb{R}^2$, учитывая замечание 5.1, можем в качестве $z^1(\lambda)$, $\lambda \in [0,1]$ взять любую непрерывную функцию. Теперь из леммы 5.2 вытекает, что для управляемых систем (6.1), (6.10) с ограничением (6.2) и ограничением $|u| = 1$, которое представляет собой включение $u \in \operatorname{ext} U$, справедливы все утверждения теоремы 5.1 и следствия 5.1. Формулировки этих утверждений применительно к управляемым системам (6.1), (6.10) мы опускаем ввиду очевидности.

Начиная с классической работы А. Ф. Филиппова [14] традиционным предположением, при котором множество решений дифференциального включения с невыпуклой правой частью плотно в множестве решений дифференциального включения с овыпукленной правой частью, является липшицевость многозначного отображения $F(t,x)$. То же самое относится и к эволюционным управляемым системам, в которых предполагается липшицевость оператора $g(t,x)$ и многозначного отображения $U(t,x)$ [15]. Однако требование липшицевости соответствующих отображений является достаточно ограничительным. Мы приведем частные случаи управляемой системы (6.1), когда предположение локальной липшицевости соответствующих отображений не выполняется, однако выполняется неравенство (5.5) и, следовательно, для этих случаев справедливы утверждения теоремы 5.1 и следствия 5.1. Эти примеры показывают, что гипотеза $\Gamma(U)(4)$ носит более общий характер, чем требование локальной липшицевости соответствующих отображений, которое, как следует из доказательства леммы 5.2, гарантирует выполнение гипотезы $\Gamma(U)(4)$.

Случай I. Пусть $b_{12} = b_{21} = 0$, ограничение (6.2) имеет вид $0 \le u \le 1$ и $g_1(x,y) = g_1(y)$ является монотонной непрерывной функцией, т. е. $\langle y - y_1, g_1(y) - g_1(y_1)\rangle \ge 0$, $y, y_1 \in \mathbb{R}$, удовлетворяющей неравенству (6.18). Тогда при выполнении всех остальных предположений относительно функций $d_1(x,y)$, $d_2(x,y)$ будет справедливо неравенство (5.5). Поэтому для такого вида управляемых систем (6.1), (6.11) верны утверждения теоремы 5.1 и следствия 5.1.

Случай II. Пусть $b_{12} = b_{21} = 0$ и $d_2(x,y) = d_2(y)$ является монотонной непрерывной функцией, удовлетворяющей неравенству (6.20). Тогда, если выполнены все остальные предположения относительно функций $g_1(x,y)$, $d_1(x,y)$, при выполнении неравенства (6.2) будет справедливо неравенство (5.5). Тем самым и в этом случае для управляемых систем (6.1), (6.11) верны утверждения теоремы 5.1 и следствия 5.1. Примером непрерывной монотонной функции $d_2(y)$, удовлетворяющей неравенству (6.19), может служить функция $d_2(y) = y/\sqrt{|y|}$, которая не является локально липшицевой.

Численное построение множеств достижимости управляемых систем вида (6.11) показывает быструю сходимость этих множеств к множеству достижимости системы (6.1).

В заключение отметим, что при $B = I$ подобные результаты для эволюционных включений, рассматриваемых в данной работе, были получены в [2] в предположении, что отображение $F(t,x)$ является липшицевым по x.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Brezis H.* Operateurs maximaux monotones et semi-groups de contractions dans les espaces de Hilbert. Amsterdam; London: North-Holland, 1973.
2. *Толстоногов А. А.* Аппроксимация множеств достижимости эволюционного включения субдифференциального типа // Сиб. мат. журн. 2003. Т. 44, № 4. С. 883–904.
3. *Kenmochi N.* Solvability of nonlinear evolution equations with time-dependent constraints and applications // Bull. Fac. Educ. Chiba Univ. 1981. V. 30. P. 1–87.
4. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1978.
5. *Kenmochi N.* On the quasi-linear heat equation with time-dependent obstacles // Nonlin. Anal. 1981. V. 5, N 1. P. 71–80.

6. *Бурбаки Н.* Общая топология. М.: Наука, 1975.
7. *Tolstonogov A. A., Tolstonogov D. A.* L_p-continuous extreme selectors of multifunctions with decomposable values: existence theorems // Set-Valued Anal. 1996. V. 4. P. 173–203.
8. *Толстоногов А. А.* К теореме Скорца — Драгони для многозначных отображений с переменной областью определения // Мат. заметки. 1990. Т. 48, № 5. С. 109–120.
9. *Толстоногов А. А.* Теорема Боголюбова при ограничениях, порожденных эволюционной управляемой системой второго порядка // Изв. РАН. Сер. мат. 2003. Т. 67, № 5. С. 177–206.
10. *Michael E.* Continuous selections. I // Ann. Math. 1956. V. 63, N 2. P. 361–382.
11. *Tolstonogov A. A., Tolstonogov D. A.* L_p-continuous extreme selectors of multifunction with decomposable values: relaxation theorems // Set-Valued Anal. 1996. V. 4. P. 237–269.
12. *Himmelberg C. J.* Measurable relations // Fund. Math. 1975. V. 87. P. 53–72.
13. *Филиппов А. Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985.
14. *Филиппов А. Ф.* Классические решения дифференциальных уравнений с многозначной правой частью // Вестн. МГУ. Сер. Математика, механика. 1967. Т. 3. С. 16–26.
15. *Толстоногов А. А.* Свойства множества допустимых пар «траектория-управление» эволюционных управляемых систем первого порядка // Изв. РАН. Сер. мат. 2001. Т. 65, № 3. С. 201–224.

Статья поступила 13 января 2004 г.

Толстоногов Александр Александрович
Институт динамики систем и теории управления СО РАН,
ул. Лермонтова, 134, Иркутск 664033
aatol@icc.ru