Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2005. Том 46, № 2

УДК 517.982.27

ЭКСТРАПОЛЯЦИОННЫЕ ФУНКТОРЫ НА СЕМЕЙСТВЕ ШКАЛ, ПОРОЖДЕННЫХ ВЕЩЕСТВЕННЫМ МЕТОДОМ ИНТЕРПОЛЯЦИИ

С. В. Асташкин

Аннотация: На семействе шкал, порожденных вещественным методом интерполяции, определен новый класс экстраполяционных функторов. Доказанные в работе экстраполяционные соотношения для $\mathscr{K}$- и $\mathscr{J}$-функционалов, соответствующих некоторым естественным парам предельных пространств, позволяют описать значения этих функторов. Полученные при этом соотношения можно интерпретировать как новые утверждения типа классической теоремы Яно для оценок норм операторов, действующих в интерполяционных шкалах пространств.

Ключевые слова: экстраполяция операторов, экстраполяционный функтор, симметричное пространство, интерполяция операторов, вещественный метод интерполяции.

Отправной точкой для теории экстраполяции операторов явилась классическая теорема Яно (см. [1] или [2, гл. 12, теорема 4.41]), речь в которой идет о важных в приложениях пространствах Зигмунда $L(\log L)^\alpha$ и $\operatorname{Exp} L^\beta$ с нормами

$$\|f\|_{L(\log L)^\alpha} = \int\limits_0^1 \log_2^\alpha\left(\frac{2}{t}\right) f^*(t)\,dt \quad \text{и} \quad \|f\|_{\operatorname{Exp} L^\beta} = \sup_{0<t\le 1} \log_2^{-1/\beta}\left(\frac{2}{t}\right) f^*(t)$$

соответственно. Здесь $\alpha, \beta > 0$, а $f^*(t)$ — невозрастающая перестановка функции $|f(t)|$, определенной на отрезке $[0,1]$. Предположим, что T — линейный оператор, ограниченный в пространствах $L_p = L_p[0,1]$ для всех p из некоторой правой полуокрестности 1, и $\|T\|_{L_p\to L_p} = \mathscr{O}((p-1)^{-\alpha})$ $(p \to 1+)$ при некотором $\alpha > 0$. Тогда T можно определить на пространстве Зигмунда $L(\log L)^\alpha$ так, что он будет ограниченно действовать из этого пространства в L_1. Верно и двойственное утверждение, относящееся к пространству $\operatorname{Exp} L^{1/\alpha}$, сопряженному к $L(\log L)^\alpha$. Если линейный оператор T ограничен в L_p для всех достаточно больших p и $\|T\|_{L_p\to L_p} = \mathscr{O}(p^\alpha)$ $(p\to\infty)$ при некотором $\alpha > 0$, то $T : L_\infty \to \operatorname{Exp} L^{1/\alpha}$.

В 90-е гг. прошлого века началась разработка общих подходов теории экстраполяции, связанная прежде всего с именами Яверса и Мильмана [3–5]. Основная цель этой теории заключается в изучении естественных предельных пространств, ассоциированных с интерполяционными шкалами пространств, а также оценок норм операторов, действующих в них. Яверс и Мильман показали, что «источником» теорем типа Яно является существование экстраполяционных конструкций (функторов), значения которых — предельные пространства из этих теорем. В частности, используя функторы пересечения Δ и суммы

Σ, они получили экстраполяционное описание пространств Зигмунда, фигурирующих в теореме Яно (см., например, [5, с. 22–23]):

$$\varDelta_{1<p<\infty}\bigl(p^{-\alpha}L_p\bigr) = \operatorname{Exp} L^{1/\alpha} \quad \text{и} \quad \Sigma_{1<p<\infty}\bigl((p-1)^{-\alpha}L_p\bigr) = L(\log L)^{\alpha}\ (\alpha > 0).$$

В качестве экстраполяционных функторов Яверс и Мильман рассматривали только экстремальные — сумму и пересечение семейств банаховых пространств (см., например, [4, § 2] или [5, гл. 2]). Последние позволяют получить в качестве экстраполяционных лишь обобщенные пространства Лоренца и Марцинкевича (определения см. ниже). Более обширный класс функторов (правда, определенных лишь на шкале L_p-пространств) был введен в работе [6]. Он тесно связан с вещественным методом интерполяции и позволяет получить в качестве предельных «почти все» симметричные (перестановочно инвариантные) пространства, «близкие» к L_∞ и L_1. Продолжению и развитию этих идей посвящена данная работа.

Прежде всего, мы распространяем определение функторов из [6] на следующие семейства дискретных шкал банаховых пространств. Пусть Φ — функция Орлича на $[0,\infty)$. Обозначим через $\mathscr{A}$ семейство последовательностей (дискретных шкал) вида

$$\vec{A}_n^{\mathscr{K}} = (A_0, A_1)^{\mathscr{K}}_{1-1/\Phi(2^n),\Phi(2^n)}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

а через $\mathscr{B}$ — вида

$$\vec{A}_n^{\mathscr{J}} = (A_0, A_1)^{\mathscr{J}}_{1/\Phi(2^n),\Phi(2^n)/(\Phi(2^n)-1)}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

где $\vec{A} = (A_0, A_1)$ — произвольная банахова пара такая, что $A_1 \overset{1}{\subset} A_0$, а $(A_0, A_1)^{\mathscr{K}}_{\theta,p}$ и $(A_0, A_1)^{\mathscr{J}}_{\theta,p}$ $(0 < \theta < 1,\ 1 \le p \le \infty)$ — пространства $\mathscr{K}$- и $\mathscr{J}$-методов вещественной интерполяции соответственно.

Главные результаты работы заключаются в описании значений определяемых далее экстраполяционных функторов на шкалах этих семейств. Будет доказано, что в случае $\mathscr{A}$ (соответственно $\mathscr{B}$) — это в точности интерполяционные пространства относительно пары $(A_1, M_\varphi(\vec{A}))$ (соответственно $(A_0, \Lambda_\varphi(\vec{A}))$, где $M_\varphi(\vec{A})$ и $\Lambda_\varphi(\vec{A})$ — обобщенные пространства Марцинкевича и Лоренца, построенные по функции $\varphi(u) = u\Phi^{-1}(\ln(1 + (e-1)/u))$ $(0 < u \le 1)$. Ключевыми при этом являются полученные в работе экстраполяционные соотношения для $\mathscr{K}$- и $\mathscr{J}$-функционалов пар $(A_1, M_\varphi(\vec{A}))$ и $(A_0, \Lambda_\varphi(\vec{A}))$ соответственно. В последней части работы мы покажем, что введенные функторы можно определить и на гораздо более широких семействах шкал так, чтобы их значения не изменились. Это одно из проявлений важного свойства устойчивости экстраполяционных конструкций.

В частном случае шкалы L_p-пространств (т. е. для пары $\vec{A} = (L_1, L_\infty)$) результаты этой работы частично были анонсированы в заметке [7].

§ 1. Определения, обозначения, предварительные сведения

Подробное изложение теории интерполяции операторов и теории симметричных пространств можно найти в монографиях [8–11].

Всюду далее вложение одного банахова пространства в другое понимается как непрерывное, т. е. $X_1 \subset X_0$ означает, что из $x \in X_1$ следует: $x \in X_0$ и

$\|x\|_{X_0} \leq C\|x\|_{X_1}$ для некоторого $C > 0$. Для указания константы вложения иногда мы будем писать $X_1 \overset{C}{\subset} X_0$.

Пусть X_0 и X_1 — банаховы пространства такие, что $X_1 \subset X_0$. Тогда *пополнением* X_1 *относительно* X_0 (или *пополнением по Гальярдо*) называют множество $\widetilde{X}_1$ всех $x \in X_0$, для которых существует последовательность $\{x_n\} \subset X_0$ со свойствами: $\|x_n\|_{X_1} \leq C$ $(n = 1, 2, \dots)$ при некотором $C > 0$ и $x_n \to x$ в X_0. Пространство X_1 называется *полным относительно* X_0, если $\widetilde{X}_1 = X_1$.

Если (X_0, X_1) — банахова пара (т. е. банаховы пространства X_0 и X_1 линейно и непрерывно вложены в некоторое отделимое линейное топологическое пространство), то естественным образом определяются пересечение $X_0 \cap X_1$ и сумма $X_0 + X_1$ с нормами

$$\|x\|_{X_0 \cap X_1} = \max_{i=0,1} \|x\|_{X_i},$$

$$\|x\|_{X_0 + X_1} = \inf\{\|x_0\|_{X_0} + \|x_1\|_{X_1} : x = x_0 + x_1,\ x_i \in X_i,\ i = 0, 1\}$$

соответственно.

Пусть (X_0, X_1) и (Y_0, Y_1) — банаховы пары. Тройка пространств (X_0, X_1, X), $X_0 \cap X_1 \subset X \subset X_0 + X_1$, называется *интерполяционной* (*точной интерполяционной*) *относительно тройки* (Y_0, Y_1, Y), $Y_0 \cap Y_1 \subset Y \subset Y_0 + Y_1$, если любой линейный оператор T, определенный на $X_0 + X_1$ и ограниченный из X_0 в Y_0 и из X_1 в Y_1, ограничен из X в Y (дополнительно $\|T\|_{X \to Y} \leq \max\limits_{i=0,1} \|T\|_{X_i \to Y_i}$). Если $X_i = Y_i$ $(i = 0, 1)$ и $X = Y$, то говорят, что X — *интерполяционное пространство относительно пары* (X_0, X_1).

(*Точным*) *интерполяционным функтором* называют любое отображение F множества банаховых пар в множество банаховых пространств такое, что для всех банаховых пар $\vec{X} = (X_0, X_1)$ и $\vec{Y} = (Y_0, Y_1)$ тройка $(X_0, X_1, F(\vec{X}))$ (точная) интерполяционная относительно тройки $(Y_0, Y_1, F(\vec{Y}))$. Характеристическая функция $\rho(t)$ интерполяционного функтора F определяется соотношением $F(\mathbb{R}, (1/t)\mathbb{R}) = (1/\rho(t))\mathbb{R}$, $t > 0$. Если F — точный функтор, то $\rho(t)$ — квазивогнутая функция на $(0, \infty)$, т. е. $\rho(t)$ возрастает, а $\rho(t)/t$ убывает при $t > 0$.

Важным способом получения интерполяционных пространств является вещественный метод интерполяции, основанный на применении $\mathscr{K}$- и $\mathscr{J}$-функционалов Петре:

$$\mathscr{K}(t, x; X_0, X_1) = \inf\{\|x_0\|_{X_0} + t\|x_1\|_{X_1} : x = x_0 + x_1,\ x_0 \in X_0,\ x_1 \in X_1\},$$

$$\mathscr{J}(t, x; X_0, X_1) = \max\{\|x\|_{X_0}, t\|x\|_{X_1}\}.$$

При фиксированном $t > 0$ первый из них является нормой на сумме пространств $X_0 + tX_1$, второй — на пересечении $X_0 \cap tX_1$ (если X — банахово пространство, а $\alpha > 0$, то по составу элементов αX — то же пространство X, но с нормой $\|x\|_{\alpha X} = \alpha\|x\|_X$). Если же зафиксировать $x \in X_0 + X_1$ (соответственно $x \in X_0 \cap X_1$), то $\mathscr{K}(t, x; X_0, X_1)$ — возрастающая вогнутая (соответственно $\mathscr{J}(t, x; X_0, X_1)$ — выпуклая) функция относительно переменной t.

Пусть E — банахова решетка двусторонних числовых последовательностей $\alpha = (\alpha_j)_{j=-\infty}^{\infty}$. Если (X_0, X_1) — произвольная банахова пара, то пространство $\mathscr{K}$-метода $(X_0, X_1)_E^{\mathscr{K}}$ состоит из всех $x \in X_0 + X_1$, для которых $(\mathscr{K}(2^j, x; X_0, X_1))_j \in E$ и

$$\|x\| = \|(\mathscr{K}(2^j, x; X_0, X_1))_j\|_E < \infty.$$

В пространство $\mathscr{J}$-метода $(X_0, X_1)_E^{\mathscr{J}}$ входят все $x \in X_0 + X_1$, допускающие представление

$$x = \sum_{j=-\infty}^{\infty} u_j \ \ (\text{сходимость в } X_0 + X_1), \quad \text{где} \quad u_j \in X_0 \cap X_1. \tag{1}$$

Норма в $(X_0, X_1)_E^{\mathscr{J}}$ полагается равной $\inf\limits_{\{u_j\}} \|(\mathscr{J}(2^j, u_j; X_0, X_1))_j\|_E$, где нижняя грань берется по всем последовательностям $\{u_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$, для которых выполнено соотношение (1).

Если E — банахова решетка двусторонних последовательностей и $\alpha = (\alpha_k)_{k=-\infty}^{\infty}$ — последовательность неотрицательных чисел, то пространство $E(\alpha_k)$ состоит из всех $a = (a_k)_{k=-\infty}^{\infty}$ таких, что $(a_k\alpha_k)_{k=-\infty}^{\infty} \in E$, $\|a\|_{E(\alpha_k)} = \|(a_k\alpha_k)\|_E$. Предположим, что $E \supset \Delta(\vec{l}_\infty) := l_\infty \cap l_\infty(2^{-k})$ (соответственно $\{0\} \neq E \subset \Sigma(\vec{l_1}) := l_1 + l_1(2^{-k})$). Тогда отображение $(X_0, X_1) \mapsto (X_0, X_1)_E^{\mathscr{K}}$ (соответственно $(X_0, X_1) \mapsto (X_0, X_1)_E^{\mathscr{J}}$) определяет точный интерполяционный функтор. Совокупность всех таких функторов называется *вещественным* $\mathscr{K}$- (соответственно $\mathscr{J}$-) *методом интерполяции*. Важно отметить, что в случае $\mathscr{K}$- (соответственно $\mathscr{J}$-) метода его параметр E можно всегда считать интерполяционным пространством относительно пары $\vec{l}_\infty = (l_\infty, l_\infty(2^{-k}))$ (соответственно $\vec{l_1} = (l_1, l_1(2^{-k})))$ [9, следствия 3.3.10 и 3.4.6]. Кроме того, если $\rho(t)$ — квазивогнутая функция, то функторы $(\cdot,\cdot)_{l_1(1/\rho(2^k))}^{\mathscr{J}}$ и $(\cdot,\cdot)_{l_\infty(1/\rho(2^k))}^{\mathscr{K}}$ экстремальны в том смысле, что для любого точного интерполяционного функтора F с характеристической функцией $\rho(t)$ выполнено

$$(X_0, X_1)_{l_1(1/\rho(2^k))}^{\mathscr{J}} \overset{1}{\subset} F(X_0, X_1) \overset{1}{\subset} (X_0, X_1)_{l_\infty(1/\rho(2^k))}^{\mathscr{K}}$$

для каждой банаховой пары (X_0, X_1).

В частности, для $0 < \theta < 1$ и $1 \le p \le \infty$ мы получаем классические интерполяционные пространства

$$(X_0, X_1)_{\theta,p}^{\mathscr{K}} = (X_0, X_1)_{l_p(2^{-k\theta})}^{\mathscr{K}} \quad \text{и} \quad (X_0, X_1)_{\theta,p}^{\mathscr{J}} = (X_0, X_1)_{l_p(2^{-k\theta})}^{\mathscr{J}},$$

свойства которых подробно изучаются в монографии [8]. Хорошо известно [8, теорема 3.3.1], что $(X_0, X_1)_{\theta,p}^{\mathscr{K}} = (X_0, X_1)_{\theta,p}^{\mathscr{J}}$ для любых $0 < \theta < 1$ и $1 \le p \le \infty$. При этом важно отметить, что константа эквивалентности их норм зависит от θ и p и может стремиться к ∞.

В дальнейшем речь, в частности, будет идти о парах симметричных (перестановочно инвариантных) функциональных пространств на отрезке $[0, 1]$. Напомним, что банахово пространство X измеримых функций, определенных на $[0, 1]$, называется симметричным, если выполнены следующие условия:

а) из того, что $y = y(t) \in X$ и $|x(t)| \le |y(t)|$, следует, что $x = x(t) \in X$ и $\|x\| \le \|y\|$;

б) если $y = y(t) \in X$ и $x^*(t) = y^*(t)$, то $x \in X$ и $\|x\| = \|y\|$.

Важный и наиболее простой пример симметричных пространств — L_p-пространства $(1 \le p \le \infty)$ с обычной нормой:

$$\|x\|_p = \left(\int_0^1 |x(t)|^p\, dt\right)^{1/p} \quad (1 \le p < \infty) \quad \text{и} \quad \|x\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{0 \le t \le 1} |x(t)|.$$

Их естественным обобщением являются пространства Орлича. Под функцией Орлича всюду далее будет пониматься непрерывная возрастающая выпуклая функция $N(u) \geq 0$, определенная на $[0, \infty)$, такая, что $N(0) = 0$, $N(1) = 1$ (таким образом, для N всегда существует обратная функция N^{-1}, которая является вогнутой). Соответствующее пространство Орлича L_N состоит из всех измеримых на $[0, 1]$ функций $x = x(t)$ таких, что норма

$$\|x\|_{L_N} = \inf\left\{u > 0 : \int_0^1 N\left(\frac{|x(t)|}{u}\right) dt \ \leq 1\right\}$$

конечна. В частности, если $N(t) = t^p$ $(1 \leq p < \infty)$, получаем L_p-пространства.

Другие примеры симметричных пространств — пространства Лоренца и Марцинкевича. Если $\psi(t)$ — неотрицательная вогнутая возрастающая функция на $[0, 1]$, то пространство Марцинкевича $M(\psi)$ состоит из всех измеримых на $[0, 1]$ функций $x = x(s)$, для которых

$$\|x\|_{M(\psi)} = \sup_{0<t\leq 1} \frac{\int_0^t x^*(s)\, ds}{\psi(t)} < \infty,$$

а пространство Лоренца $\Lambda(\psi)$ — из всех $x = x(s)$, для которых

$$\|x\|_{\Lambda(\psi)} = \int_0^1 x^*(s)\, d\psi(s) < \infty.$$

В дальнейшем нас будут интересовать экспоненциальные пространства Орлича $\operatorname{Exp} L^\Phi = L_{N_\Phi}$, где $N_\Phi(u) = (e^{\Phi(u)} - 1)/(e - 1)$, $\Phi(u)$ — функция Орлича. Как известно [12, 13], норма в $\operatorname{Exp} L^\Phi$ эквивалентна норме в пространстве Марцинкевича $M(\varphi)$, построенном по вогнутой функции $\varphi(u) = u\Phi^{-1}(\ln(1 + (e - 1)/u))$. Отсюда, в частности, следует, что $\operatorname{Exp} L^\Phi = \Lambda(\varphi)^*$ [10, с. 152–154]. Для $\Phi(u) = u^\alpha$ $(\alpha \geq 1)$ получаем хорошо известные пространства Зигмунда $\operatorname{Exp} L^\alpha$ и $L(\log L)^{1/\alpha}$ соответственно [14], уже упомянутые во введении в связи с экстраполяционной теоремой Яно.

Напомним, следуя [5, с. 8], определение экстраполяционных пространства и функтора (в случае дискретных шкал). Последовательность (или дискретная шкала) банаховых пространств $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ называется *строго совместимой*, если существуют банаховы пространства U_A и V_A такие, что имеют место непрерывные вложения $V_A \subset A_n \subset U_A$ $(n = 1, 2, \dots)$. Предположим, что $\{B_n\}_{n=1}^\infty$ — еще одна строго совместимая последовательность банаховых пространств, $V_B \subset B_n \subset U_B$ $(n = 1, 2, \dots)$. Тогда пространства A и B называют *экстраполяционными* (относительно шкал $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ и $\{B_n\}_{n=1}^\infty$), если $V_A \subset A \subset U_A$, $V_B \subset B \subset U_B$ и если из того, что линейный оператор T, $T : U_A \to U_B$, ограниченно действует из A_n в B_n с нормой $\|T\|_{A_n \to B_n} \leq 1$ для любого $n = 1, 2, \dots$, следует, что он также ограничен из A в B. *Экстраполяционным функтором*, определенным на семействе строго совместимых шкал $\mathscr{A}$, называют любое отображение $\{A_n\} \overset{\mathscr{F}}{\mapsto} \mathscr{F}(\{A_n\})$, $\{A_n\} \in \mathscr{A}$, такое, что $\mathscr{F}(\{A_n\})$ и $\mathscr{F}(\{B_n\})$ — экстраполяционные пространства, если $\{A_n\}$ и $\{B_n\}$ принадлежат семейству $\mathscr{A}$.

Простейшими экстраполяционными функторами являются функторы суммы и пересечения. Пусть X_k $(k = 1, 2, \dots)$ — банаховы пространства, линейно и непрерывно вложенные в отделимое линейное топологическое пространство $\mathscr{T}$. Тогда их *пересечением* называют банахово пространство $\Delta_{k=1}^{\infty} X_k$, состоящее из всех $x \in \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} X_k$, для которых $\|x\| = \sup\limits_{k=1,2,\dots} \|x\|_{X_k} < \infty$. Предположим дополнительно, что существует банахово пространство X_0, вложенное в $\mathscr{T}$, со свойством $X_k \overset{1}{\subset} X_0$ $(k = 1, 2, \dots)$. Тогда сумма $\sum\limits_{k=1}^{\infty} X_k$ определяется как множество всех $x \in X_0$, представимых в виде $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ $(x_k \in X_k)$, где $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \|x_k\|_{X_k} < \infty$. Это пространство становится банаховым с нормой $\|x\| = \inf \sum\limits_{k=1}^{\infty} \|x_k\|_{X_k}$, где нижняя грань берется по всевозможным представлениям x.

Через e^k $(k = 0, \pm1, \pm2, \dots)$ будем обозначать стандартные орты в пространстве двусторонних числовых последовательностей, т. е. $e^k = \left(e_j^k\right)$, $e_k^k = 1$, $e_j^k = 0$ $(j \neq k)$. Если $1 \le p \le \infty$, то p' — число, сопряженное к p, т. е. $1/p' + 1/p = 1$. Функция растяжения положительной функции $\psi(s)$, $s \in (0, \infty)$, определяется соотношением $\mathscr{M}_\psi(t) = \sup\limits_{s>0} \psi(st)/\psi(s)$. Наконец, всюду далее выражение вида $F_1 \asymp F_2$ означает, что $cF_1 \le F_2 \le CF_1$ для некоторых $c > 0$ и $C > 0$, причем константы c и C, как правило, не зависят от всех или части аргументов F_1 и F_2.

§ 2. Вспомогательные результаты

В теории экстраполяции наряду с обычными пространствами вещественного метода рассматривают также модифицированные [5, с. 13]:

$$\left\langle (X_0, X_1)_{\theta,p}^{\mathscr{K}} \right\rangle = c_{\theta.p} (X_0, X_1)_{\theta,p}^{\mathscr{K}}, \quad \text{где } c_{\theta.p} = (\theta(1-\theta)p)^{1/p} (1 \le p < \infty) \text{ и } c_{\theta,\infty} = 1, \tag{2}$$

и

$$\left\langle (X_0, X_1)_{\theta,p}^{\mathscr{J}} \right\rangle = c'_{\theta.p} (X_0, X_1)_{\theta,p}^{\mathscr{J}}, \quad \text{где } c'_{\theta.p} = (\theta(1-\theta)p')^{-1/p'} (1 < p \le \infty) \text{ и } c'_{\theta,1} = 1.$$

Характеристическая функция функторов $\left\langle (\cdot,\cdot)_{\theta,p}^{\mathscr{K}} \right\rangle$ и $\left\langle (\cdot,\cdot)_{\theta,p}^{\mathscr{J}} \right\rangle$ в точности равна t^θ [5], и, кроме того [15, пример 7],

$$\left\langle (L_1, L_\infty)_{1/q',q}^{\mathscr{K}} \right\rangle = L_q \quad (1 \le q \le \infty), \tag{3}$$

причем нормы пространств в соотношении (3) эквивалентны с константой, не зависящей от q. Заметим, что при $\theta = 1/q'$ константа $c_{\theta.q}$ равна $(q')^{-1/q}$, откуда $1/\sqrt{2} \le c_{\theta.q} < 1$, если $q \ge 2$. Тем самым ввиду (3)

$$(L_1, L_\infty)_{1/q',q}^{\mathscr{K}} = L_q \tag{4}$$

с константой эквивалентности норм, не зависящей от $q \ge 2$.

Далее нам потребуются некоторые вспомогательные утверждения. Первое из них содержит формулу для вычисления $\mathscr{K}$-функционала пары $(L_\infty, M(\psi))$ ($M(\psi)$ — симметричное пространство Марцинкевича на $[0,1]$). В частном случае $\psi(t) = t \log_2^{1/2}(2/t)$ оно было доказано в [16] и применялось там при изучении пространства мультипликаторов, порожденных системой функций Радемахера.

Лемма 1. *Пусть ψ — возрастающая вогнутая функция на $[0,1]$ такая, что ее функция растяжения удовлетворяет условию $\mathscr{M}_\psi(1/2) < 1$. Тогда с константами, не зависящими от $f \in M(\psi)$ и $t > 0$, выполнено соотношение*

$$\mathscr{K}(t, f; L_\infty, M(\psi)) \asymp t \sup_{u:\psi(u)\ge tu} \frac{f^*(u)u}{\psi(u)}.$$

Доказательство. Прежде всего так как $L_\infty = M(\psi_0)$, где $\psi_0(u) = u$, то

$$\mathscr{K}(t, f; L_\infty, M(\psi)) \asymp \|f\|_{M(\psi_t)}, \quad \text{где} \quad \psi_t(u) = \max(u, \psi(u)/t), \tag{5}$$

с константами, не зависящими от $f \in M(\psi)$ и $t > 0$ [17].

Проверим, что для функции растяжения $\mathscr{M}_{\psi_t}(u)$ функции ψ_t выполнено

$$\mathscr{M}_{\psi_t}(1/2) \le \mathscr{M}_\psi(1/2) < 1 \quad (t > 0). \tag{6}$$

Для этого представим

$$\mathscr{M}_{\psi_t}(1/2) = \frac{1}{2} \sup_{0<u\le 1} F_t(u), \quad \text{где} \quad F_t(u) = \frac{\max\bigl(1, \frac{2\psi(u/2)}{tu}\bigr)}{\max\bigl(1, \frac{\psi(u)}{tu}\bigr)}. \tag{7}$$

Так как функция ψ вогнута, возможны три случая:
a) $\psi(u) \ge tu$,
b) $\psi(u) < tu \le 2\psi(u/2)$,
c) $2\psi(u/2) < tu$.

В первых двух справедливы оценки

$$F_t(u) = \frac{2\psi(u/2)}{\psi(u)} \le 2\mathscr{M}_\psi(1/2)$$

и

$$F_t(u) = \frac{2\psi(u/2)}{tu} \le 2\mathscr{M}_\psi(1/2)\frac{\psi(u)}{tu} < 2\mathscr{M}_\psi(1/2)$$

соответственно. В последнем случае $F_t(u) = 1 \le 2\mathscr{M}_\psi(1/2)$. Тем самым неравенство (6) является следствием (7).

Имея соотношение (6) и действуя точно так же, как при доказательстве леммы 1.4 из [10], получаем

$$\int_0^s \frac{\psi_t(u)}{u}\,du \le C\psi_t(s),$$

где $C > 0$ не зависит от $s \in [0,1]$ и $t > 0$. Отсюда по определению нормы в пространстве Марцинкевича

$$\|f\|_{M(\psi_t)} = \sup_{0<s\le 1} \frac{1}{\psi_t(s)} \int_0^s f^*(u)\,du$$

$$\le \sup_{0<s\le 1} \frac{1}{\psi_t(s)} \int_0^s \frac{\psi_t(u)}{u}\,du \sup_{0<u\le 1} \frac{uf^*(u)}{\psi_t(u)} \le C \sup_{0<u\le 1} \frac{uf^*(u)}{\psi_t(u)}.$$

Так как противоположное неравенство $\|f\|_{M(\psi_t)} \ge \sup\limits_{0<u\le 1} \frac{uf^*(u)}{\psi_t(u)}$ очевидно, из (5) следует, что

$$\mathscr{K}(t, f; L_\infty, M(\psi)) \asymp \sup_{0<u\le 1} \frac{uf^*(u)}{\psi_t(u)}$$

$$= \sup_{0<u\le 1} \frac{f^*(u)}{\max(1, \psi(u)/(ut))} = t \sup_{u:\psi(u)\ge ut} \frac{uf^*(u)}{\psi(u)}. \qquad \square$$

Лемма 2. *Пусть* $\operatorname{Exp} L^{\Phi}$ — *экспоненциальное пространство Орлича, соответствующее функции Орлича* Φ. *Тогда для некоторого* $C > 0$, *не зависящего от измеримой функции* f, *выполнено неравенство*

$$\|f\|_{\operatorname{Exp} L^{\Phi}} \leq C \sup_{q \geq 1} \frac{\|f\|_q}{\Phi^{-1}(q)}.$$

Доказательство. Легко проверить, что $\ln(1+2t) \leq c_0 \ln(1+t)$ $(t \geq 1)$, где $c_0 := \ln 3/\ln 2 < 2$. Поэтому ввиду вогнутости Φ^{-1} для функции $\varphi(u) = u\Phi^{-1}(\ln(1+(e-1)/u))$ выполнено $\mathscr{M}_{\varphi}(1/2) \leq c_0/2 < 1$. Следовательно, ввиду [13] и [10, теорема 2.5.3]

$$\|f\|_{\operatorname{Exp} L^{\Phi}} \asymp \|f\|_{M(\varphi)} \asymp \sup_{0<u\leq 1} \frac{f^*(u)}{\Phi^{-1}(\ln(1+(e-1)/u))}, \tag{8}$$

откуда

$$\|f\|_{\operatorname{Exp} L^{\Phi}} \leq C_1 \sup_{q\geq 1} \frac{f^*((e-1)/(e^q-1))}{\Phi^{-1}(q)} \leq C_1 \sup_{q\geq 1} \frac{f^*(e^{-q})}{\Phi^{-1}(q)}.$$

Утверждение леммы следует теперь из того, что

$$\|f\|_q \geq \left(\int_0^{e^{-q}} f^*(t)^q \, dt \right)^{1/q} \geq \frac{f^*(e^{-q})}{e}. \quad \square$$

Далее, следуя [18], рассмотрим подход, при котором в качестве параметров пространств вещественного $\mathscr{K}$-метода интерполяции берутся симметричные пространства на отрезке $[0,1]$. А именно, каждому симметричному пространству X на $[0,1]$ и произвольной банаховой паре $\vec{A} = (A_0, A_1)$ сопоставим пространство

$$X(\vec{A}) := \{a \in A_0 + A_1 : \lim_{t\to+0} \mathscr{K}(t,a;\vec{A}) = 0 \text{ и } \mathscr{K}'(t,a;\vec{A})\chi_{[0,1]}(t) \in X\}$$

с нормой $\|a\|_{X(\vec{A})} := \|\mathscr{K}'(\cdot,a;\vec{A})\chi_{[0,1]}\|_X$.

Через c_0, как обычно, будет обозначаться пространство всех последовательностей $(\alpha_k)_{k=-\infty}^{\infty}$ таких, что $\lim\limits_{k\to\pm\infty} \alpha_k = 0$.

Лемма 3. *Пусть* F — *банахова решетка двусторонних числовых последовательностей такая, что* $F \subset c_0 + l_\infty(2^{-k})$ *и*

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} e^k \right\|_F \leq K \|e^0\|_F. \tag{9}$$

Тогда для всякой банаховой пары $\vec{A} = (A_0, A_1)$ *такой, что* $A_1 \overset{1}{\subset} A_0$, *справедливо равенство*

$$(A_0, A_1)_F^{\mathscr{K}} = X(\vec{A}), \quad \text{где } X := (L_1, L_\infty)_F^{\mathscr{K}},$$

причем для норм этих пространств выполнено

$$\frac{1}{K+1}\|a\|_{X(\vec{A})} \leq \|a\|_{(A_0,A_1)_F^{\mathscr{K}}} \leq (K+1)\|a\|_{X(\vec{A})}. \tag{10}$$

Доказательство. Если $a \in (A_0, A_1)_F^{\mathscr{K}}$, то по условию

$$\lim_{t\to+0} \mathscr{K}(t, a; \vec{A}) = 0, \quad \|a\|_{(A_0,A_1)_F^{\mathscr{K}}} := \|(\mathscr{K}(2^k, a; \vec{A}))_k\|_F < \infty.$$

Так как $A_1 \overset{1}{\subset} A_0$, то $\mathscr{K}(t, a; \vec{A}) = \|a\|_{A_0}$ $(t \geq 1)$ и ввиду (9)

$$\left\|\sum_{k=1}^{\infty} \mathscr{K}(2^k, a; \vec{A}) e^k\right\|_F = \|a\|_{A_0} \left\|\sum_{k=1}^{\infty} e^k\right\|_F \\ \leq K\|a\|_{A_0}\|e^0\|_F \leq K \left\|\sum_{k=0}^{-\infty} \mathscr{K}(2^k, a; \vec{A}) e^k\right\|_F,$$

откуда

$$\left\|\sum_{k=0}^{-\infty} \mathscr{K}(2^k, a; \vec{A}) e^k\right\|_F \leq \|a\|_{(A_0,A_1)_F^{\mathscr{K}}} \leq (K+1) \left\|\sum_{k=0}^{-\infty} \mathscr{K}(2^k, a; \vec{A}) e^k\right\|_F. \tag{11}$$

В частности, используя хорошо известное равенство $\mathscr{K}(t, f; L_1, L_\infty) = \int\limits_0^t f^*(s)\, ds$ [8, теорема 5.2.1], получаем

$$\left\|\sum_{k=0}^{-\infty} \int_0^{2^k} f^*(s)\, ds\, e^k\right\|_F \leq \|f\|_X \leq (K+1) \left\|\sum_{k=0}^{-\infty} \int_0^{2^k} f^*(s)\, ds\, e^k\right\|_F. \tag{12}$$

Далее, так как функция $\mathscr{K}(t, a; \vec{A})$ абсолютно непрерывна по t [10, с. 67], то $\mathscr{K}(t, a; \vec{A}) = \int\limits_0^t \mathscr{K}'(s, a; \vec{A})\, ds$. Поэтому с учетом того, что производная $\mathscr{K}'(s, a; \vec{A})$ вогнутой функции убывает, ввиду (11) и (12)

$$\|a\|_{X(\vec{A})} = \|\mathscr{K}'(\cdot, a; \vec{A})\chi_{[0,1]}\|_X \\ \leq (K+1) \left\|\sum_{k=0}^{-\infty} \int_0^{2^k} \mathscr{K}'(s, a; \vec{A})\, ds\, e^k\right\|_F \leq (K+1)\|a\|_{(A_0,A_1)_F^{\mathscr{K}}}.$$

Тем самым доказано, что $(A_0, A_1)_F^{\mathscr{K}} \subset X(\vec{A})$, а также левое неравенство в (10). Противоположное вложение и правое неравенство в (10) проверяются с помощью (11) и (12) совершенно аналогично. □

§ 3. Экстраполяционные функторы на семействе шкал, порожденных $\mathscr{K}$-методом вещественной интерполяции

Пусть $\Phi(u)$ — функция Орлича на $[0, \infty)$, а $\vec{A} = (A_0, A_1)$ — произвольная банахова пара такая, что $A_1 \overset{1}{\subset} A_0$. Введем дискретную шкалу пространств, построенных по паре $\vec{A}$ с помощью вещественного $\mathscr{K}$-метода интерполяции:

$$\vec{A}_n^{\mathscr{K}} = (A_0, A_1)_{1-1/\Phi(2^n), \Phi(2^n)}^{\mathscr{K}}, \quad n = 1, 2, \dots.$$

Семейство всех таких шкал обозначим через $\mathscr{A}$.

Определение 1. Пусть банахова решетка F промежуточна относительно банаховой пары $\vec{l}_\infty = (l_\infty, l_\infty(2^{-k}))$, т. е. $\Delta(\vec{l}_\infty) \subset F \subset \Sigma(\vec{l}_\infty)$. Определим

$\mathscr{L}^{\mathscr{K}}_{\Phi,F}\big(\big\{\vec{A}^{\mathscr{K}}_n\big\}\big)$ как множество всех $a \in A_0$ таких, что последовательность $u_a = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \|a\|_{\vec{A}^{\mathscr{K}}_n} e^n$ принадлежит F.

Нетрудно проверить, что $\mathscr{L}^{\mathscr{K}}_{\Phi,F}\big(\big\{\vec{A}^{\mathscr{K}}_n\big\}\big)$ — банахово пространство с нормой

$$\|a\|_{\mathscr{L}^{\mathscr{K}}_{\Phi,F}(\{\vec{A}^{\mathscr{K}}_n\})} := \|u_a\|_F,$$

а отображение $\big\{\vec{A}^{\mathscr{K}}_n\big\} \mapsto \mathscr{L}^{\mathscr{K}}_{\Phi,F}\big(\big\{\vec{A}^{\mathscr{K}}_n\big\}\big)$ является экстраполяционным функтором на семействе $\mathscr{A}$ в смысле определения [5, с. 8] (см. § 1).

Главная наша цель состоит в описании соответствующих предельных (или экстраполяционных) пространств этих шкал. Мы покажем, что при некоторых условиях все они — в точности интерполяционные пространства относительно пары $(A_1, M_\varphi(\vec{A}))$, где $M_\varphi(\vec{A})$ — обобщенное пространство Марцинкевича, построенное по возрастающей вогнутой функции

$$\varphi(u) = u\Phi^{-1}(\ln(1 + (e-1)/u)) \quad (0 < u \le 1).$$

Напомним [19, с. 422], что

$$M_\varphi(\vec{A}) = (A_0, A_1)^{\mathscr{K}}_{l_\infty(1/\varphi(2^k))}.$$

Заметим, что ввиду соотношения (11) и того, что $A_1 \overset{1}{\subset} A_0$, последнее определение корректно, несмотря на то, что функция $\varphi(u)$ определена лишь на отрезке $[0,1]$.

Прежде всего найдем экстраполяционное описание $\mathscr{K}$-функционала пары $(A_1, M_\varphi(\vec{A}))$, откуда, в частности, будет следовать, что пространство $M_\varphi(\vec{A})$ предельное для шкалы $\big\{\vec{A}^{\mathscr{K}}_n\big\}$ при $n \to \infty$. Напомним, что $\widetilde{A}_1$ — пополнение A_1 относительно A_0 (см. § 1).

Теорема 1. *Пусть $\Phi(u)$ — функция Орлича на $[0,\infty)$. С константами, не зависящими от банаховой пары $\vec{A} = (A_0, A_1)$ такой, что $A_1 \overset{1}{\subset} A_0$ и $\widetilde{A}_1 = A_1$, а также от $a \in M_\varphi(\vec{A})$ и $k = 1, 2, \dots$, выполнено соотношение*

$$\mathscr{K}(2^k, a; A_1, M_\varphi(\vec{A})) \asymp \sup_{n \ge k} 2^{k-n} \|a\|_{\vec{A}^{\mathscr{K}}_n}.$$

Рассмотрим сначала частный случай, когда $\vec{A}$ — пара пространств (L_1, L_∞) функций, определенных на $[0,1]$. Тогда $M_\varphi(\vec{A})$ совпадает с обычным пространством Марцинкевича $M(\varphi)$ или (с эквивалентностью норм) с экспоненциальным пространством Орлича $\operatorname{Exp} L^\Phi$ [12, 13].

Предложение 1. *Если Φ — произвольная функция Орлича, то с константами, не зависящими от $f \in \operatorname{Exp} L^\Phi$, и $p \ge 1$ имеет место соотношение*

$$\mathscr{K}(p, f; L_\infty, \operatorname{Exp} L^\Phi) \asymp p \sup_{q \ge p} \frac{\|f\|_{\Phi(q)}}{q}.$$

Доказательство. По лемме 1

$$\mathscr{K}(\Phi^{-1}(t), f; L_\infty, \operatorname{Exp} L^\Phi) \asymp \Phi^{-1}(t) \sup_{0<u\le (e-1)/(e^t-1)} \frac{f^*(u)}{\Phi^{-1}(\ln(1+(e-1)/u))} \ (t > 0). \tag{13}$$

Для произвольного $q \ge 1$ оценим

$$\|f\|_q \le \left(e^{2q} \int\limits_0^{e^{-2q}} (f^*(s))^q \, ds \right)^{1/q}$$

$$\le e^2 \left(\int\limits_0^{e^{-2q}} (\Phi^{-1}(\ln(1+(e-1)/u)))^q \, du \right)^{1/q} \sup_{0<u\le e^{-q}} \frac{f^*(u)}{\Phi^{-1}(\ln(1+(e-1)/u))}. \tag{14}$$

После замены переменной имеем

$$\int\limits_0^{e^{-2q}} (\Phi^{-1}(\ln(1+(e-1)/u)))^q \, du = (e-1) \int\limits_{\ln(1+e^{2q})}^{\infty} (\Phi^{-1}(v))^q \frac{e^v}{(e^v-1)^2} \, dv \le 8I(\Phi, q), \tag{15}$$

где $I(\Phi, q) := \int\limits_{2q}^{\infty} (\Phi^{-1}(v))^q e^{-v} \, dv$.

Интегрируя по частям, получаем оценку

$$I(\Phi, q) = e^{-2q}(\Phi^{-1}(2q))^q + q \int\limits_{2q}^{\infty} e^{-v} \frac{(\Phi^{-1}(v))^{q-1}}{\Phi'(\Phi^{-1}(v))} \, dv$$

$$\le e^{-2q} 2^q (\Phi^{-1}(q))^q + \frac{q}{\Phi^{-1}(2q)\Phi'(\Phi^{-1}(2q))} I(\Phi, q)$$

ввиду того, что $\Phi^{-1}(v)$ вогнута, а $\Phi^{-1}(v)\Phi'(\Phi^{-1}(v))$ возрастает. Кроме того, так как $v\Phi'(v) \ge \Phi(v)$, то $\Phi^{-1}(2q)\Phi'(\Phi^{-1}(2q)) \ge 2q$, и

$$I(\Phi, q) \le e^{-2q} 2^q (\Phi^{-1}(q))^q + \frac{1}{2} I(\Phi, q),$$

откуда

$$I(\Phi, q) \le e^{-2q} 2^{1+q} (\Phi^{-1}(q))^q.$$

Последнее вместе с (13)–(15) дает

$$\|f\|_q \le C_1 \mathscr{K}(\Phi^{-1}(q), f; L_\infty, \operatorname{Exp} L^\Phi) \quad (q \ge 1).$$

Так как $\mathscr{K}(t, x; X_0, X_1)$ — вогнутая функция по t, отсюда при всех $q \ge p \ge 1$

$$\frac{\|f\|_q}{\Phi^{-1}(q)} \le C_1 \frac{\mathscr{K}(\Phi^{-1}(q), f; L_\infty, \operatorname{Exp} L^\Phi)}{\Phi^{-1}(q)} \le C_1 \frac{\mathscr{K}(\Phi^{-1}(p), f; L_\infty, \operatorname{Exp} L^\Phi)}{\Phi^{-1}(p)}.$$

В итоге после замены переменной, использующей свойства функции Φ, приходим к оценке

$$p \sup_{q \ge p} \frac{\|f\|_{\Phi(q)}}{q} \le C_1 \mathscr{K}(p, f; L_\infty, \operatorname{Exp} L^\Phi).$$

Осталось доказать противоположное неравенство. Для этого ввиду (13) достаточно показать, что при всех $0 < u \le (e-1)/(e^p-1)$ выполнено неравенство

$$f^*(u) \le C_2 \sup_{q \ge p} \frac{\|f\|_q}{\Phi^{-1}(q)} \Phi^{-1}(\ln(1+(e-1)/u)). \tag{16}$$

Ввиду леммы 2 и соотношения (8) имеем

$$f^*(u) \le C_3 \sup_{q\ge 1} \frac{\|f\|_q}{\Phi^{-1}(q)} \Phi^{-1}(\ln(1+(e-1)/u)) \quad (0<u\le 1). \tag{17}$$

При доказательстве (16) можно считать, что $f = f^*$ и $\{s \in [0,1] : f(s) \ne 0\} \subset [0, 2^{1-p}]$ (так как $(e-1)/(e^p-1) \le 2^{1-p}$). Тогда если $1 \le q \le p$, то по неравенству Гёльдера

$$\|f\|_q \le 2^{\frac{(1-p)(p-q)}{pq}} \|f\|_p \le 2^{2-\frac{p}{q}} \|f\|_p.$$

Кроме того, $\Phi^{-1}(p) \le \frac{p}{q}\Phi^{-1}(q) \le 2^{p/q}\Phi^{-1}(q)$ ввиду вогнутости Φ^{-1}. Значит, при $1 \le q \le p$

$$\frac{\|f\|_q}{\Phi^{-1}(q)} \le \frac{4\|f\|_p}{\Phi^{-1}(p)},$$

откуда

$$\sup_{1\le q\le p} \frac{\|f\|_q}{\Phi^{-1}(q)} \le \frac{4\|f\|_p}{\Phi^{-1}(p)}.$$

Тем самым (16) следует из (17), и предложение доказано. □

В качестве следствия получаем экстраполяционное описание экспоненциальных пространств Орлича.

Следствие 1. *Для любой функции Орлича* Φ

$$\|f\|_{\operatorname{Exp} L^\Phi} \asymp \sup_{p\ge 1} \frac{\|f\|_{\Phi(p)}}{p}.$$

Доказательство. Так как $L_\infty \overset{1}{\subset} \operatorname{Exp} L^\Phi$, ввиду вогнутости $\mathscr{K}$-функционала

$$\|f\|_{\operatorname{Exp} L^\Phi} = \mathscr{K}(1, f; L_\infty, \operatorname{Exp} L^\Phi) \le \mathscr{K}(2, f; L_\infty, \operatorname{Exp} L^\Phi) \le 2\|f\|_{\operatorname{Exp} L^\Phi},$$

и результат следует из предложения 1. □

Доказательство теоремы 1. По определению обобщенного пространства Марцинкевича, учитывая [19, с. 384] и условие $\widetilde{A}_1 = A_1$, получаем, что

$$M_\varphi(\vec{A}) = (A_0, A_1)^{\mathscr{K}}_{l_\infty(1/\varphi(2^k))} \quad \text{и} \quad A_1 = (A_0, A_1)^{\mathscr{K}}_{l_\infty(2^{-k})} \tag{18}$$

изометрически. В частности,

$$\operatorname{Exp} L^\Phi = (L_1, L_\infty)^{\mathscr{K}}_{l_\infty(1/\varphi(2^k))} \quad \text{и} \quad L_\infty = (L_1, L_\infty)^{\mathscr{K}}_{l_\infty(2^{-k})}. \tag{19}$$

Так как φ — вогнутая функция и $\lim\limits_{s\to+0} \varphi(s) = 0$, для пространств $l_\infty(2^{-k})$ и $l_\infty(1/\varphi(2^k))$ выполнены условия леммы 3 и, значит,

$$M_\varphi(\vec{A}) = \operatorname{Exp} L^\Phi(\vec{A}) \quad \text{и} \quad A_1 = L_\infty(\vec{A}), \tag{20}$$

причем константы эквивалентности можно считать не зависящими от пары $\vec{A}$. Кроме того, $l_\infty(2^{-k})$ и $l_\infty(1/\varphi(2^k))$ интерполяционны относительно пары $\vec{l}_\infty = (l_\infty, l_\infty(2^{-k}))$ (см., например, [19, с. 422]). Поэтому, обозначая $f_a(s) := \mathscr{K}(s, a; \vec{A})$ $(a \in A_0)$ и применяя реитерационные соображения [19, следствие 7.1.1], ввиду (18), (19) и предложения 1 получаем

$$\mathscr{K}(t, a; A_1, M_\varphi(\vec{A})) = \mathscr{K}\big(t, a; (A_0, A_1)^{\mathscr{K}}_{l_\infty(2^{-k})}, (A_0, A_1)^{\mathscr{K}}_{l_\infty(1/\varphi(2^k))}\big)$$

$$\asymp \mathscr{K}(t,(f_a(2^k))_k;l_\infty(2^{-k}),l_\infty(1/\varphi(2^k)))$$

$$= \mathscr{K}\left(t,\left(\int\limits_0^{2^k} f_a'(s)\,ds\right)_k;l_\infty(2^{-k}),l_\infty(1/\varphi(2^k))\right)$$

$$\asymp \mathscr{K}(t,f_a';L_\infty,\operatorname{Exp}L^\Phi)\asymp t\sup_{q\ge t}\frac{\|f_a'\|_{\Phi(q)}}{q}.$$

Перепишем последнее соотношение в дискретном виде:

$$\mathscr{K}(2^k,a;A_1,M_\varphi(\vec{A}))\asymp \sup_{n\ge k}2^{k-n}\|f_a'\|_{\Phi(2^n)}\quad(k=1,2,\dots). \tag{21}$$

Легко проверить, что условие (9) выполняется для параметра $l_q(2^{(1/q-1)k})$ с константой $K=3$ для любого $q\ge 2$. Поэтому по лемме 3

$$(A_0,A_1)^{\mathscr{K}}_{1/q',q}=(L_1,L_\infty)^{\mathscr{K}}_{1/q',q}(\vec{A})$$

с одной и той же константой эквивалентности норм для всех $q\ge 2$. Отсюда и из соотношений (4) и (21) получаем утверждение теоремы. $\square$

В частности, экстраполяционным относительно шкалы $\{\vec{A}_n^{\mathscr{K}}\}$ является обобщенное пространство Марцинкевича $M_\varphi(\vec{A})$.

Следствие 2. *Для любой функции Орлича Φ и произвольной банаховой пары $\vec{A}=(A_0,A_1)$ такой, что $A_1\overset{1}{\subset}A_0$ и $\widetilde{A}_1=A_1$, выполнено соотношение*

$$\|a\|_{M_\varphi(\vec{A})}\asymp \sup_{n\ge 1}2^{-n}\|a\|_{\vec{A}_n^{\mathscr{K}}}.$$

Доказательство. Легко проверить, что $A_1\overset{1}{\subset}M_\varphi(\vec{A})$. Поэтому аргументы в точности те же, что и при доказательстве следствия 1. $\square$

Отметим, что A_1 (если $\widetilde{A}_1=A_1$) и пространство Марцинкевича $M_\varphi(\vec{A})$ — наименьшее и наибольшее экстраполяционные пространства шкалы $\{\vec{A}_n^{\mathscr{K}}\}$, соответствующие семейству экстраполяционных функторов $\mathscr{L}^{\mathscr{K}}_{\Phi,F}$ (с фиксированной функцией Φ). А именно, справедливы равенства

$$\mathscr{L}^{\mathscr{K}}{}_{\Phi,l_\infty}\big(\{\vec{A}_n^{\mathscr{K}}\}\big)=A_1 \text{ и } \mathscr{L}^{\mathscr{K}}{}_{\Phi,l_\infty(2^{-k})}\big(\{\vec{A}_n^{\mathscr{K}}\}\big)=M_\varphi(\vec{A}). \tag{22}$$

Действительно, ввиду (4), леммы 3 и следствия 1

$$\|u_a\|_{l_\infty}=\sup_{n=1,2,\dots}\|a\|_{\vec{A}_n^{\mathscr{K}}}\asymp\sup_{k=1,2,\dots}\|\mathscr{K}'(\cdot,a;\vec{A})\chi_{[0,1]}\|_{\Phi(2^k)}=\|\mathscr{K}'(\cdot,a;\vec{A})\chi_{[0,1]}\|_{L_\infty},$$

а

$$\|u_a\|_{l_\infty(2^{-k})}=\sup_{n=1,2,\dots}2^{-n}\|a\|_{\vec{A}_n^{\mathscr{K}}}\asymp\sup_{n=1,2,\dots}2^{-n}\|\mathscr{K}'(\cdot,a;\vec{A})\chi_{[0,1]}\|_{\Phi(2^n)}$$

$$=\|\mathscr{K}'(\cdot,a;\vec{A})\chi_{[0,1]}\|_{\operatorname{Exp}L^\Phi},$$

и остается применить соотношения (20).

Из (22) следует, что для любой банаховой пары $\vec{A}=(A_0,A_1)$ такой, что $A_1\overset{1}{\subset}A_0$, и банаховой решетки F, промежуточной между l_∞ и $l_\infty(2^{-k})$, имеют место вложения

$$A_1\subset\mathscr{L}^{\mathscr{K}}_{\Phi,F}\big(\{\vec{A}_n^{\mathscr{K}}\}\big)\subset M_\varphi(\vec{A}).$$

Более того, из теоремы 2, основного результата этого параграфа, следует, что пространство $\mathscr{L}^{\mathscr{K}}_{\Phi,F}\big(\vec{A}_n^{\mathscr{K}}\big)$ интерполяционно относительно пары $(A_1,M_\varphi(\vec{A}))$ при условии, что решетка F интерполяционна относительно пары $\vec{l}_\infty$.

Теорема 2. *Пусть Φ — функция Орлича, а $\vec{A} = (A_0, A_1)$ — банахова пара такая, что $A_1 \overset{1}{\subset} A_0$ и A_1 полно относительно A_0. Тогда для любой банаховой решетки F, интерполяционной относительно пары $\vec{l}_\infty = (l_\infty, l_\infty(2^{-k}))$, выполнено равенство*

$$\mathscr{L}^{\mathscr{K}}_{\Phi,F}\big(\{\vec{A}^{\mathscr{K}}_n\}\big) = (A_1, M_\varphi(\vec{A}))^{\mathscr{K}}_F \quad (\textit{с эквивалентностью норм}).$$

Доказательство. Достаточно показать, что с некоторыми константами, не зависящими от $a \in A_0$, выполнено

$$\|u_a\|_F \asymp \|v_a\|_F, \tag{23}$$

где

$$u_a = \sum_{n=1}^{\infty} \|a\|_{\vec{A}^{\mathscr{K}}_n} e^n \quad \text{и} \quad v_a = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathscr{K}(2^n, a; A_1, M_\varphi(\vec{A})) e^n.$$

Так как $A_1 \overset{1}{\subset} M_\varphi(\vec{A})$, то $(v_a)_n = 2^n (v_a)_0 = 2^n \|a\|_{M_\varphi(\vec{A})}$ при $n = 0, -1, -2, \dots$. Поэтому по лемме 2 из [6] с константой, не зависящей от a, имеем

$$\|v_a\|_F \asymp \|P_+ v_a\|_F, \tag{24}$$

где $P_+ w = \sum\limits_{j=1}^{\infty} w_j e^j$, $w = (w_j)_{j=-\infty}^{\infty}$.

Хорошо известно [9, замечание 3.3.8], что при условии интерполяционности F относительно пары $\vec{l}_\infty$

$$\|w\|_F \asymp \|\bar{w}\|_F, \quad \text{где } \overline{w} = (\overline{w}_k)_{k=-\infty}^{\infty}, \bar{w}_k = \sup_{n=0,\pm1,\dots} \{\min[1, 2^{k-n}] |w_n|\}.$$

Следовательно, $\|u_a\|_F \asymp \|\bar{u_a}\|_F$, откуда ввиду неравенств $\bar{u_a} \ge P_+ \bar{u_a} \ge u_a$ получаем

$$\|u_a\|_F \asymp \|P_+ \bar{u_a}\|_F. \tag{25}$$

Так как норма функции в $L_q[0,1]$ возрастает по q, применение леммы 3 к параметру $l_q(2^{(1/q-1)k})$ $(k \ge 2)$ с учетом (4) показывает, что последовательность u_a возрастает в обобщенном смысле, т. е. $\|a\|_{\vec{A}^{\mathscr{K}}_n} \le C \|a\|_{\vec{A}^{\mathscr{K}}_m}$ при некотором $C > 0$ и произвольных $1 \le n \le m$. Поэтому

$$P_+ \bar{u_a} \asymp \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \sup_{n \ge k} \frac{\|a\|_{\vec{A}^{\mathscr{K}}_n}}{2^n} e^k$$

и, значит, по теореме 1 $\|P_+ \bar{u_a}\|_F \asymp \|P_+ v_a\|_F$ с универсальными константами. Тем самым соотношение (23) следует из (24) и (25). □

Рассмотрим важный частный случай: $\vec{A} = \vec{L} := (L_1, L_\infty)$. Ввиду соотношения (4) $\vec{L}^{\mathscr{K}}_n = L_{\Phi(2^n)}$ с константой, не зависящей от $n = 1, 2, \dots$. Следовательно, $\mathscr{L}^{\mathscr{K}}_{\Phi,F}\big(\{\vec{L}^{\mathscr{K}}_n\}\big)$ — симметричное пространство на $[0,1]$, состоящее из всех измеримых на $[0,1]$ функций f, для которых последовательность $u_f = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \|f\|_{\Phi(2^k)} e^k$ принадлежит F и $\|f\|_{\mathscr{L}^{\mathscr{K}}_{\Phi,F}(\{\vec{L}^{\mathscr{K}}_n\})} = \|u_f\|_F$.

Следствие 3. *Для произвольной функции Орлича Φ и любой банаховой решетки F, интерполяционной относительно пары $(l_\infty, l_\infty(2^{-k}))$, выполнено равенство*

$$\mathscr{L}^{\mathscr{K}}_{\Phi,F}(\{L_{\Phi(2^n)}\}) = (L_\infty, \operatorname{Exp} L^\Phi)^{\mathscr{K}}_F \quad (\textit{с эквивалентностью норм}).$$

Интерполяция в паре $(L_\infty, \operatorname{Exp} L^\Phi)$ описывается вещественным $\mathscr{K}$-методом [17] (см. также [20, предложение 1]). Это означает, что всякое пространство X, интерполяционное относительно нее, представимо в виде $X = (L_\infty, \operatorname{Exp} L^\Phi)^{\mathscr{K}}_F$, где F — банахова решетка двусторонних числовых последовательностей. При этом, как отмечалось в § 1, можно считать, что F интерполяционна относительно пары $\vec{l_\infty} = (l_\infty, l_\infty(2^{-k}))$. Поэтому из теоремы 2 получаем следующее экстраполяционное описание пространств, интерполяционных относительно пары $(L_\infty, \operatorname{Exp} L^\Phi)$.

Следствие 4. *Пусть Φ — произвольная функция Орлича. Для любого пространства X, интерполяционного относительно пары $(L_\infty, \operatorname{Exp} L^\Phi)$, существует банахова решетка F такая, что $X = \mathscr{L}^{\mathscr{K}}_{\Phi,F}(\{L_{\Phi(2^n)}\})$ (с эквивалентностью норм).*

§ 4. Экстраполяционные функторы на семействе шкал, порожденных $\mathscr{J}$-методом вещественной интерполяции

Пусть, как и ранее, Φ — функция Орлича, а $\vec{A} = (A_0, A_1)$ — банахова пара, $A_1 \overset{1}{\subset} A_0$. Введем шкалу пространств, построенных по паре $\vec{A}$ с использованием вещественного $\mathscr{J}$-метода интерполяции:

$$\vec{A}^{\mathscr{J}}_n = (A_0, A_1)^{\mathscr{J}}_{1/\Phi(2^n), \Phi(2^n)/(\Phi(2^n)-1)}, \quad n = 1, 2, \dots.$$

Семейство всех таких шкал обозначим через $\mathscr{B}$.

Определение 2. Пусть банахова решетка G промежуточна относительно банаховой пары $\vec{l_1} = (l_1, l_1(2^{-k}))$, т. е. $\Delta(\vec{l_1}) \subset G \subset \Sigma(\vec{l_1})$. Определим $\mathscr{L}^{\mathscr{J}}_{\Phi,G}\bigl(\{\vec{A}^{\mathscr{J}}_n\}\bigr)$ как множество всех $b \in A_0$, для которых существует представление

$$b = \sum_{n=1}^\infty b_n \quad (\text{сходимость в } A_0), \quad b_n \in \vec{A}^{\mathscr{J}}_n \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^\infty \|b_n\|_{\vec{A}^{\mathscr{J}}_n} e^{-n} \in G. \tag{26}$$

Нетрудно проверить, что $\mathscr{L}^{\mathscr{J}}_{\Phi,G}\bigl(\{\vec{A}^{\mathscr{J}}_n\}\bigr)$ — банахово пространство с нормой

$$\|b\|_{\mathscr{L}^{\mathscr{J}}_{\Phi,G}(\{\vec{A}^{\mathscr{J}}_n\})} = \inf \left\| \sum_{n=1}^\infty \|b_n\|_{\vec{A}^{\mathscr{J}}_n} e^{-n} \right\|_G,$$

где нижняя грань берется по всем представлениям (26), а отображение $\bigl\{\vec{A}^{\mathscr{J}}_n\bigr\} \mapsto \mathscr{L}^{\mathscr{J}}_{\Phi,G}\bigl(\{\vec{A}^{\mathscr{J}}_n\}\bigr)$ является экстраполяционным функтором на семействе $\mathscr{B}$.

Покажем, что соответствующие экстраполяционные пространства шкалы $\bigl\{\vec{A}^{\mathscr{J}}_n\bigr\}$ интерполяционны относительно пары $(A_0, \Lambda_\varphi(\vec{A}))$, где $\Lambda_\varphi(\vec{A})$ — обобщенное пространство Лоренца [19, с. 430],

$$\Lambda_\varphi(\vec{A}) = (A_0, A_1)^{\mathscr{J}}_{l_1(2^{-k}\varphi(2^k))}, \quad \text{где} \quad \varphi(u) = u\Phi^{-1}(\ln(1 + (e-1)/u)) \ (0 < u \le 1).$$

Так как $A_1 \overset{1}{\subset} A_0$, при определении этого пространства можно ограничиться представлениями вида

$$x = \sum_{k=0}^{-\infty} u_k \quad (u_k \in A_1)$$

(см. доказательство теоремы 4 далее).

Начнем с теоремы об описании $\mathscr{J}$-функционала пары $(A_0, \Lambda_\varphi(\vec{A}))$. В ее доказательстве потребуется следующее хорошо известное утверждение о двойственности между $\mathscr{J}$- и $\mathscr{K}$-методами интерполяции [8, теорема 3.7.1]. Пусть $\vec{A} = (A_0, A_1)$ — банахова пара такая, что $A_0 \cap A_1$ всюду плотно в A_0 и A_1. Тогда сопряженные пространства A_0^* и A_1^* также образуют банахову пару и имеет место равенство

$$\bigl((A_0, A_1)^{\mathscr{J}}_{\theta,r}\bigr)^* = \bigl(A_0^*, A_1^*\bigr)^{\mathscr{K}}_{\theta,r'}, \quad \frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1 \quad (1 \le r < \infty). \tag{27}$$

Для дальнейшего важно отметить, что (27) выполняется изометрически для всех $0 < \theta < 1$ и $1 \le r < \infty$. Действительно, вложение $\bigl((A_0, A_1)^{\mathscr{J}}_{\theta,r}\bigr)^* \overset{1}{\subset} (A_0^*, A_1^*)^{\mathscr{K}}_{\theta,r'}$ доказано в [8, теорема 3.7.1, соотношение (3)]. Противоположное вложение (тоже с константой 1) проверяется точно так же, как соотношение (4) там же.

Теорема 3. *Пусть $\Phi(u)$ — функция Орлича на $[0, \infty)$. С константами, не зависящими от банаховой пары $\vec{A} = (A_0, A_1)$ такой, что $A_1 \overset{1}{\subset} A_0$ и A_1 всюду плотно в A_0, а также от $b \in A_0$ и $k = 1, 2, \dots$, выполнено соотношение*

$$\mathscr{J}(2^{-k}, b; A_0, \Lambda_\varphi(\vec{A})) \asymp \|b\|_{U_k},$$

где $U_k = \sum\limits_{n \ge k} 2^{n-k} \vec{A}_n^{\mathscr{J}}$.

Доказательство. Ввиду соображений двойственности достаточно проверить эквивалентность норм соответствующих сопряженных пространств. Иначе говоря [8, с. 74], нужно показать, что

$$\mathscr{K}(2^k, a; A_0^*, (\Lambda_\varphi(\vec{A}))^*) \asymp \|a\|_{(U_k)^*} \quad (k = 1, 2, \dots). \tag{28}$$

Так как по условию A_1 всюду плотно в A_0, а пространство $l_1(2^{-k}\varphi(2^k))$ интерполяционно относительно пары $\vec{l_1}$ [19, с. 430], по теореме двойственности для вещественного метода [19, теорема 7.5.1]

$$(\Lambda_\varphi(\vec{A}))^* = (A_0^*, A_1^*)^{\mathscr{K}}_F,$$

где F — банахова решетка, двойственная к $l_1(2^{-k}\varphi(2^k))$ относительно билинейной формы

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_{-k} \beta_k.$$

Легко проверить, что $F = l_\infty(2^{-k}/\varphi(2^{-k}))$, т. е.

$$(\Lambda_\varphi(\vec{A}))^* = M_\psi(A_0^*, A_1^*),$$

где $\psi(u) = u\varphi(1/u)$. Используя определение обобщенного пространства Марцинкевича, а также равенство

$$\mathscr{K}(t, b; A_0, A_1) = t\mathscr{K}(1/t, b; A_1, A_0) \quad (t > 0), \tag{29}$$

перепишем последнее соотношение следующим образом:

$$(\Lambda_\varphi(\vec{A}))^* = M_\varphi(\vec{A}^*), \quad \text{где} \quad \vec{A}^* := (A_1^*, A_0^*). \tag{30}$$

Так как A_1 всюду плотно в $\vec{A}_n^{\mathscr{J}}$ $(n = 1, 2, \dots)$ [8, теорема 3.4.2], применяя теорему двойственности для бесконечных сумм и пересечений банаховых пространств [3], а также соотношение (27), получаем

$$(U_k)^* = \varDelta_{n \ge k} 2^{k-n} \big(\vec{A}_n^{\mathscr{J}}\big)^* = \varDelta_{n \ge k} 2^{k-n} (A_0^*, A_1^*)^{\mathscr{K}}_{1/\Phi(2^n), \Phi(2^n)}$$

или опять ввиду (29)

$$(U_k)^* = \varDelta_{n \ge k} 2^{k-n} (A_1^*, A_0^*)^{\mathscr{K}}_{1-1/\Phi(2^n), \Phi(2^n)} = \varDelta_{n \ge k} 2^{k-n} \vec{A}_n^{*\mathscr{K}}.$$

Таким образом, с учетом равенства (30) соотношение (28) переходит в эквивалентность

$$\mathscr{K}(2^k, a; A_0^*, M_\varphi(\vec{A}^*)) \asymp \sup_{n \ge k} 2^{k-n} \|a\|_{\vec{A}_n^{*\mathscr{K}}}.$$

Пространство A_0^* полно относительно A_1^* [10, теорема 1.2.2], и, значит, по теореме 1, примененной к паре $\vec{A}^*$, последнее соотношение верно с универсальными константами. Следовательно, теорема 3 доказана. □

Следствие 5. *Пусть $\vec{A} = (A_0, A_1)$ — банахова пара, $A_1 \overset{1}{\subset} A_0$ и A_1 всюду плотно в A_0. Тогда если Φ — функция Орлича и $\varphi(u) = u\Phi^{-1}(\ln(1 + (e-1)/u))$, то*

$$\Lambda_\varphi(\vec{A}) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \vec{A}_n^{\mathscr{J}} \quad (\textit{с эквивалентностью норм}).$$

Доказательство. Так как $\Lambda_\varphi(\vec{A}) \overset{1}{\subset} A_0$, то $\mathscr{J}(1, b; A_0, \Lambda_\varphi(\vec{A})) = \|b\|_{\Lambda_\varphi(\vec{A})}$. Ввиду вогнутости $\mathscr{J}$-функционала

$$\frac{1}{2}\|b\|_{\Lambda_\varphi(\vec{A})} \le \mathscr{J}(1/2, b;, A_0, \Lambda_\varphi(\vec{A})) \le \|b\|_{\Lambda_\varphi(\vec{A})},$$

и результат следует из теоремы 3. □

В частном случае $\vec{A} = (L_1, L_\infty)$ пространство $\Lambda_\varphi(\vec{A})$ совпадает с симметричным пространством Лоренца $\Lambda(\varphi)$. Из соотношений (4) и (27) получаем, что

$$(L_1, L_\infty)^{\mathscr{J}}_{1/q, q'} = L_{q'}$$

с константой, равномерно ограниченной относительно $q \ge 2$. Поэтому из теоремы 3 вытекает

Следствие 6. *Если Φ — произвольная функция Орлича, то с константой, не зависящей от $g \in \Lambda(\varphi)$ и $k = 1, 2, \dots$, справедливо соотношение*

$$\mathscr{J}(2^{-k}, g; L_1, \Lambda(\varphi)) \asymp \|g\|_{U_k},$$

где $U_k = \sum\limits_{j \ge k} \big(2^{j-k} L_{r_j}\big)$, $r_j = \Phi(2^j)/(\Phi(2^j) - 1)$ $(j = 1, 2, \dots)$.

Докажем теперь с помощью теоремы 3 основной результат этого параграфа.

Теорема 4. *Предположим, что банахова решетка G интерполяционна относительно пары $\vec{l_1} = (l_1, l_1(2^{-k}))$, а $\vec{A} = (A_0, A_1)$ — банахова пара такая, что $A_1 \overset{1}{\subset} A_0$ и A_1 всюду плотно в A_0. Тогда $\mathscr{L}^{\mathscr{J}}_{\Phi,G}\big(\{\vec{A}^{\mathscr{J}}_n\}\big) = (A_0, \Lambda_\varphi(\vec{A}))^{\mathscr{J}}_G$ (с эквивалентностью норм).*

Доказательство. Обозначим $Y = (A_0, \Lambda_\varphi(\vec{A}))^{\mathscr{J}}_G$ и для произвольных $b \in \Lambda_\varphi(\vec{A})$ и $t > 0$ положим

$$\mathscr{J}(t, b) = \mathscr{J}(t, b; A_0, \Lambda_\varphi(\vec{A})).$$

По определению пространств $\mathscr{J}$-метода

$$\|b\|_Y = \inf \|(\mathscr{J}(2^k, b_k))_k\|_G,$$

где нижняя грань берется по всем представлениям

$$b = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k \quad (\text{сходимость в } A_0), \quad b_k \in \Lambda_\varphi(\vec{A}). \tag{31}$$

Если $b \in \mathscr{L}^{\mathscr{J}}_{\Phi,G}\big(\{\vec{A}^{\mathscr{J}}_n\}\big)$, то по определению

$$b = \sum_{n=1}^{\infty} c_n, \ c_n \in \vec{A}^{\mathscr{J}}_n \quad \text{и} \quad \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \|c_n\|_{\vec{A}^{\mathscr{J}}_n} e^{-n} \right\|_G < \infty.$$

Тогда $c_n \in U_n$ и по теореме 3

$$\mathscr{J}(2^{-n}, c_n) \le C_1 \|c_n\|_{\vec{A}^{\mathscr{J}}_n}$$

для некоторого $C_1 > 0$. Тем самым для последовательности $\{b_n\}$ такой, что $b_n = c_{-n}$, $n = -1, -2, \dots$, и $b_n = 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$, выполнено соотношение (31), причем $b_n \in \Lambda_\varphi(\vec{A})$ и

$$\|(\mathscr{J}(2^n, b_n))_n\|_G \le C_1 \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \|c_n\|_{\vec{A}^{\mathscr{J}}_n} e^{-n} \right\|_G.$$

Отсюда $\mathscr{L}^{\mathscr{J}}_{\Phi,G}\big(\{\vec{A}^{\mathscr{J}}_n\}\big) \subset Y$ и $\|b\|_Y \le C_1 \|b\|_{\mathscr{L}^{\mathscr{J}}_{\Phi,G}(\{\vec{A}^{\mathscr{J}}_n\})}$.

Для доказательства противоположного вложения покажем сначала, что при вычислении нормы в Y можно ограничиться (с точностью до эквивалентности) представлениями (31), в которых $b_k = 0$ при $k = 0, 1, 2, \dots$.

Так как $\Lambda_\varphi(\vec{A}) \overset{1}{\subset} A_0$, имеем

$$\mathscr{J}(2^k, b) = 2^k \|b\|_{\Lambda_\varphi(\vec{A})} \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

Пусть $\{b_k\} \subset \Lambda_\varphi(\vec{A})$ такая, что для нее выполнено (31). Тогда если C_2 — константа вложения $G \subset \Sigma(\vec{l_1})$, то

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=0}^{\infty} \mathscr{J}(2^k, b_k) e^k \right\|_G &= \left\| \sum_{k=0}^{\infty} 2^k \|b_k\|_{\Lambda_\varphi(\vec{A})} e^k \right\|_G \\ &\ge C_2^{-1} \left\| \sum_{k=0}^{\infty} 2^k \|b_k\|_{\Lambda_\varphi(\vec{A})} e^k \right\|_{l_1(2^{-k})} = C_2^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \|b_k\|_{\Lambda_\varphi(\vec{A})}. \end{aligned} \tag{32}$$

Рассмотрим теперь новое представление:

$$b = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b'_k, \quad b'_k = b_k \quad \text{для} \quad k = -2, -3, \dots,$$

$$b'_{-1} = \sum_{i=-1}^{\infty} b_i \quad \text{и} \quad b'_k = 0 \quad \text{для} \quad k = 0, 1, \dots .$$

Тогда ввиду (32) и того, что G — банахова решетка, получим

$$\|(\mathscr{J}(2^k, b'_k))_k\|_G \le \|(\mathscr{J}(2^k, b_k))_k\|_G + \sum_{k=0}^{\infty} \|b_k\|_{\Lambda_\varphi(\vec{A})} \|e^{-1}\|_G \le (1 + 2C_2C_3)\|(\mathscr{J}(2^k, b_k))_k\|_G,$$

где C_3 — константа вложения $\Delta(\vec{l_1}) \subset G$.

Таким образом, если $b \in Y$, то найдется представление (31) такое, что $b_k = 0$ для $k = 0, 1, \dots$ и

$$\|b\|_Y \ge C_4^{-1} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \mathscr{J}(2^{-k}, b_{-k}) e^{-k} \right\|_G . \tag{33}$$

По теореме 3 для каждого $k = 1, 2, \dots$ можно найти представление

$$b_{-k} = \sum_{n=k}^{\infty} b_{k,n}, \quad \text{где} \quad b_{k,n} \in \vec{A}_n^{\mathscr{J}}, \tag{34}$$

такое, что

$$\mathscr{J}(2^{-k}, b_{-k}) \ge C_5^{-1} \sum_{n=k}^{\infty} 2^{n-k} \|b_{k,n}\|_{\vec{A}_n^{\mathscr{J}}} . \tag{35}$$

Так как $G \subset \Sigma(\vec{l_1})$, из (33) и (35) получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} \|b_{k,n}\|_{\vec{A}_n^{\mathscr{J}}} \le \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} 2^{n-k} \|b_{k,n}\|_{\vec{A}_n^{\mathscr{J}}} \le C_5 \sum_{k=1}^{\infty} \mathscr{J}(2^{-k}, b_{-k}) \le C_5 C_2 \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \mathscr{J}(2^{-k}, b_{-k}) e^{-k} \right\|_G \le C_5 C_4 C_2 \|b\|_Y < \infty. \tag{36}$$

Это показывает, в частности, что сумма ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} b_{k,n}$$

не зависит от порядка суммирования. Поэтому

$$b = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \quad (\text{сходимость в } A_0), \quad \text{где } c_n = \sum_{k=1}^{n} b_{k,n}.$$

При этом ввиду (34) $c_n \in \vec{A}_n^{\mathscr{J}}$ и

$$\|c_n\|_{\vec{A}_n^{\mathscr{J}}} \le \sum_{k=1}^{n} \|b_{k,n}\|_{\vec{A}_n^{\mathscr{J}}} . \tag{37}$$

Рассмотрим теперь последовательность

$$\alpha_b = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n} \|b_{k,n}\|_{\vec{A}_n^{\mathscr{J}}}\, e^{-n}. \tag{38}$$

Ввиду (36)

$$\alpha_b = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^k \quad (\text{сходимость в } \Sigma(\vec{l_1})), \quad \text{где } \alpha^k = \sum_{n=k}^{\infty} \|b_{k,n}\|_{\vec{A}_n^{\mathscr{J}}}\, e^{-n}.$$

Из (35) следует, что $\alpha^k \in \varDelta(\vec{l_1})$, $k = 1, 2, \ldots$. Так как G интерполяционно относительно пары $\vec{l_1}$, применяя лемму 4 из [6], получим

$$\|\alpha_b\|_G \le C_6 \left\| \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=k}^{\infty} \max(1, 2^{n-k}) \|b_{k,n}\|_{\vec{A}_n^{\mathscr{J}}}\, e^{-k} \right\|_G = C_6 \left\| \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=k}^{\infty} 2^{n-k} \|b_{k,n}\|_{\vec{A}_n^{\mathscr{J}}}\, e^{-k} \right\|_G.$$

Поэтому в итоге из (37), (38), (35) и (33) следует, что

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} \|c_n\|_{\vec{A}_n^{\mathscr{J}}}\, e^{-n} \right\|_G \le \|\alpha_b\|_G \le C_4 C_5 C_6 \|b\|_Y,$$

откуда $b \in \mathscr{L}_{\Phi,G}^{\mathscr{J}}\big(\{\vec{A}_n^{\mathscr{J}}\}\big)$ и $\|b\|_{\mathscr{L}_{\Phi,G}^{\mathscr{J}}(\{\vec{A}_n^{\mathscr{J}}\})} \le C_4 C_5 C_6 \|b\|_Y$. $\square$

В частном случае $\vec{A} = \vec{L} := (L_1, L_\infty)$ из соотношений (4) и (27) вытекает, что с константами, не зависящими от $n = 1, 2, \ldots$, выполнено равенство $\vec{L}_n^{\mathscr{J}} = L_{r_n}$, где $r_n = \Phi(2^n)/(\Phi(2^n) - 1)$. Поэтому значением введенного функтора на этой паре будет симметричное пространство $\mathscr{L}_{\Phi,G}^{\mathscr{J}}\big(\{\vec{L}_n^{\mathscr{J}}\}\big)$, состоящее из всех измеримых на $[0,1]$ функций g таких, что существует представление $g = \sum\limits_{k=1}^{\infty} g_k$ (сходимость в L_1), $g_k \in L_{r_k}$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \|g_k\|_{r_k} e^{-k} \in G$. Норма в $\mathscr{L}_{\Phi,G}^{\mathscr{J}}\big(\{\vec{L}_n^{\mathscr{J}}\}\big)$ задается соотношением

$$\|g\|_{\mathscr{L}_{\Phi,G}^{\mathscr{J}}(\{\vec{L}_n^{\mathscr{J}}\})} = \inf \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \|g_k\|_{r_k} e^{-k} \right\|_G,$$

где нижняя грань берется по всевозможным представлениям. В итоге получаем

Следствие 7. *Для произвольной функции Орлича Φ и любой банаховой решетки G, интерполяционной относительно пары $(l_1, l_1(2^{-k}))$, выполнено равенство*

$$\mathscr{L}_{\Phi,G}^{\mathscr{J}}(\{L_{r_n}\}) = (L_1, \Lambda(\varphi))_G^{\mathscr{J}} \quad (\textit{с эквивалентностью норм}).$$

Так как пространство $\Lambda(\varphi)$ одновременно является пространством Орлича [12], интерполяция в паре $(L_1, \Lambda(\varphi))$ описывается вещественным $\mathscr{K}$-методом [21, следствие 5.10]. Ввиду теорем о связи между $\mathscr{K}$- и $\mathscr{J}$-функторами [9] она описывается также и $\mathscr{J}$-методом. Иначе говоря, если Y интерполяционно относительно пары $(L_1, \Lambda(\varphi))$, то $Y = (L_1, \Lambda(\varphi))_G^{\mathscr{J}}$ для некоторой банаховой решетки G, интерполяционной относительно пары $\vec{l_1} = (l_1, l_1(2^{-k}))$. Поэтому из теоремы 4 вытекает экстраполяционное описание таких пространств.

Следствие 8. *Пусть Φ — произвольная функция Орлича. Для любого пространства Y, интерполяционного относительно пары $(L_1, \Lambda(\varphi))$, существует банахова решетка G такая, что $Y = \mathscr{L}_{\Phi,G}^{\mathscr{J}}(\{L_{r_n}\})$ (с эквивалентностью норм).*

§ 5. Дальнейшие обобщения и устойчивость экстраполяционных функторов

Здесь мы покажем, что результаты двух предыдущих параграфов справедливы и для более общего семейства шкал, порожденных вещественным методом интерполяции. Решающую роль при доказательстве будет играть определенная устойчивость «экстраполяционных» пересечений семейств банаховых пространств. А именно, если последние — значения интерполяционных функторов на одной и той же банаховой паре, то при некоторых условиях пересечение зависит лишь от характеристических функций этих функторов.

С технической точки зрения в этом параграфе нам будет удобнее использовать функторы вещественного метода интерполяции с функциональными параметрами. Так, в частности, пространство $\mathscr{K}$-метода $\vec{A}^{\mathscr{K}}_{\theta,q} := (A_0, A_1)^{\mathscr{K}}_{\theta,q}$ состоит в этом случае из всех $a \in A_0 + A_1$ таких, что

$$\|a\|^{\mathscr{K}}_{\theta,q} = \left\{ \int\limits_0^\infty (t^{-\theta}\mathscr{K}(t,a;\vec{A}))^q \frac{dt}{t} \right\}^{1/q} < \infty \quad (0 < \theta < 1,\ 1 \le q < \infty)$$

и

$$\|a\|^{\mathscr{K}}_{\theta,\infty} = \sup_{t>0} (t^{-\theta}\mathscr{K}(t,a;\vec{A})) < \infty \quad (0 < \theta < 1).$$

Заметим, что эта норма эквивалентна норме соответствующего пространства с дискретным параметром $l_q(2^{-\theta k})$ (см. § 1), и, более того, константу эквивалентности можно выбрать так, что она будет одна и та же при всех $0 < \theta < 1$ и $1 \le q \le \infty$ [8, леммы 3.1.3 и 3.2.3]. Тем самым эти пространства мы можем отождествлять как с интерполяционной, так и с экстраполяционной точек зрения.

В доказательстве следующей теоремы мы будем использовать рассуждения из доказательства теоремы 21 в [5].

Теорема 5. *Пусть Φ — функция Орлича на $[0,\infty)$, $\theta_n = 1 - 1/\Phi(2^n)$ и F_n — точный интерполяционный функтор с характеристической функцией t^{θ_n} ($n = 1, 2, \dots$). Тогда с константами, не зависящими от банаховой пары $\vec{A} = (A_0, A_1)$ такой, что $A_1 \overset{1}{\subset} A_0$ и $\widetilde{A}_1 = A_1$, а также от $k = 1, 2, \dots$,*

$$\varDelta_{n\ge k} 2^{-n} F_n(\vec{A}) \asymp \varDelta_{n\ge k} 2^{-n} \vec{A}^{\mathscr{K}}_{\theta_n, 1/(1-\theta_n)}.$$

Доказательство. Достаточно показать (см. § 1), что

$$\varDelta_{n\ge k} 2^{-n} \vec{A}^{\mathscr{K}}_{\theta_n,\infty} \subset \varDelta_{n\ge k} 2^{-n} \vec{A}^{\mathscr{J}}_{\theta_n,1} \tag{39}$$

с константой, не зависящей от $\vec{A}$ и $k = 1, 2, \dots$. Докажем сначала, что с универсальной константой будет

$$\langle \vec{A}^{\mathscr{K}}_{\theta,1} \rangle \subset \vec{A}^{\mathscr{J}}_{\theta,1}, \tag{40}$$

где через $\langle \vec{A}^{\mathscr{K}}_{\theta,p} \rangle$, как и ранее, обозначаются модифицированные пространства $\mathscr{K}$-метода (см. (2)).

Пусть $a \in \vec{A}^{\mathscr{K}}_{\theta,1}$. Тогда ввиду усиленного варианта фундаментальной леммы теории интерполяции [5, лемма 1] существует представление

$$a = \int\limits_0^\infty u(s)\, ds/s$$

такое, что

$$\int_0^\infty \min(1,t/s)\,\mathscr{J}(s,u(s);\vec{A})\,\frac{ds}{s} \le \gamma \mathscr{K}(t,a;\vec{A})$$

с универсальной константой γ. Поэтому с учетом соотношения (2)

$$\|a\|^{\mathscr{J}}_{\theta,1} \le \int_0^\infty s^{-\theta}\mathscr{J}(s,u(s);\vec{A})\frac{ds}{s} = \theta(1-\theta)\int_0^\infty \mathscr{J}(s,u(s);\vec{A})\int_0^\infty \min(1,t/s)t^{-\theta}\frac{dt}{t}\frac{ds}{s}$$

$$= \theta(1-\theta)\int_0^\infty\int_0^\infty \mathscr{J}(s,u(s);\vec{A})\min(1,t/s)\,\frac{ds}{s}t^{-\theta}\,\frac{dt}{t}$$

$$\le \gamma\theta(1-\theta)\int_0^\infty \mathscr{K}(t,a;\vec{A})t^{-\theta}\,\frac{dt}{t} = \gamma\|a\|_{\langle \vec{A}^{\mathscr{K}}_{\theta,1}\rangle}.$$

Тем самым (40) доказано и для доказательства (39) поэтому достаточно проверить, что

$$\varDelta_{n\ge k} 2^{-n}\vec{A}^{\mathscr{K}}_{\theta_n,\infty} \subset \varDelta_{n\ge k} 2^{-n}\big\langle \vec{A}^{\mathscr{K}}_{\theta_n,1}\big\rangle \tag{41}$$

с константой, не зависящей от $\vec{A}$ и $k = 1,2,\dots$.

Покажем, что в случае, когда $A_1 \overset{1}{\subset} A_0$, имеет место неравенство

$$\|a\|^{\mathscr{K}}_{\theta,q} \le 9\left\{\int_0^1 (t^{-\theta}\mathscr{K}(t,a;\vec{A}))^q\frac{dt}{t}\right\}^{1/q} \tag{42}$$

для всех $\theta \in [1/2,1)$ и $1 \le q \le \infty$ (аналогичное рассуждение использовалось в доказательстве леммы 3).

Действительно, так как $\mathscr{K}(t,a;\vec{A}) = \|a\|_{A_0}$ $(t \ge 1)$ и $\theta \in [1/2,1)$, имеем

$$\left\{\int_0^1 (t^{-\theta}\mathscr{K}(t,a;\vec{A}))^q\frac{dt}{t}\right\}^{1/q} \ge \left\{\int_{1/4}^1 (t^{-\theta}\mathscr{K}(t,a;\vec{A}))^q\frac{dt}{t}\right\}^{1/q}$$

$$\ge \mathscr{K}(1/4,a;\vec{A})\left\{\int_{1/4}^1 (t^{-\theta})^q\frac{dt}{t}\right\}^{1/q} \ge \frac{1}{4}\|a\|_{A_0}.$$

Поэтому

$$\left\{\int_1^\infty (t^{-\theta}\mathscr{K}(t,a;\vec{A}))^q\frac{dt}{t}\right\}^{1/q} \le \|a\|_{A_0}\left\{\int_1^\infty t^{-q/2}\,\frac{dt}{t}\right\}^{1/q}$$

$$\le 2\|a\|_{A_0} \le 8\left\{\int_0^1 (t^{-\theta}\mathscr{K}(t,a;\vec{A}))^q\frac{dt}{t}\right\}^{1/q}$$

и соотношение (42) следует из определения $\|a\|^{\mathscr{K}}_{\theta,q}$.

Для каждого $k = 1, 2, \ldots$ определим на интервале $(0, 1]$ функции

$$\tau_k(t) = \inf_{n \geq k} 2^n t^{\theta_n}, \quad \tilde{\tau}_k(t) = \inf_{\theta_k \leq u < 1} M(u) t^u,$$

где $M(u) = \Phi^{-1}(1/(1-u))$.

Прежде всего

$$\tilde{\tau}_k(t) \leq \tau_k(t) \leq 2\tilde{\tau}_k(t). \tag{43}$$

Так как $M(\theta_n) = 2^n$, левое неравенство очевидно. Для доказательства правого возьмем $u \in [\theta_k, 1)$. Тогда $\theta_n \leq u < \theta_{n+1}$ при некотором $n \geq k$ и ввиду возрастания функции $M(u)$

$$M(u)t^u \geq M(\theta_n)t^{\theta_{n+1}} = 2^n t^{\theta_{n+1}} = \frac{1}{2} M(\theta_{n+1}) t^{\theta_{n+1}}.$$

Следовательно, (43) доказано.

Далее, покажем, что

$$\tilde{\tau}_k(t^2) \leq 2t\tilde{\tau}_k(t), \quad 0 \leq t \leq 1, \ k = 1, 2, \ldots. \tag{44}$$

Действительно, так как $\theta_k \geq 1/2$, имеем

$$\tilde{\tau}_k(t^2) = \inf_{\theta_k \leq u < 1} M(u) t^{2u} = t \inf_{\theta_k \leq u < 1} M(u) t^{2u-1}$$
$$= t \inf_{2\theta_k - 1 \leq u < 1} M\left(\frac{u+1}{2}\right) t^u \leq 2t\tilde{\tau}_k(t),$$

где в последнем неравенстве мы воспользовались тем, что $2\theta_k - 1 < \theta_k$ и

$$M((u+1)/2) = \Phi^{-1}(2/(1-u)) \leq 2M(u).$$

Из (43) и (44) получаем, что

$$\tau_k(t^2) \leq 4t\tau_k(t), \quad 0 \leq t \leq 1, \ k = 1, 2, 3, \ldots.$$

Отсюда и из определения функции $\tau_k(t)$ следует, что

$$\int_0^1 \tau_k(t) t^{-\theta_k} \frac{dt}{t} \leq 4 \int_0^1 t^{1/2} \tau_k(t^{1/2}) t^{-\theta_k} \frac{dt}{t}$$
$$\leq 4 \sup_{0 < t \leq 1} (t^{-\theta_k/2} \tau_k(t^{1/2})) \int_0^1 t^{(1-\theta_k)/2} \frac{dt}{t}$$
$$= \frac{8}{1-\theta_k} \sup_{0 < t \leq 1} (t^{-\theta_k} \tau_k(t)) \leq \frac{8}{1-\theta_k} 2^k.$$

Наконец, используя последнее неравенство и соотношение (42), получаем

$$\sup_{n \geq k} 2^{-n} \|a\|_{\langle \vec{A}^{\mathscr{K}}_{\theta_n,1} \rangle} \leq 9 \sup_{n \geq k} 2^{-n} (1-\theta_n)\theta_n \int_0^1 \mathscr{K}(t, a; \vec{A}) t^{-\theta_n} \frac{dt}{t}$$
$$\leq 9 \sup_{n \geq k} 2^{-n} (1-\theta_n)\theta_n \int_0^1 \tau_n(t) t^{-\theta_n} \frac{dt}{t} \sup_{0 < s \leq 1} \frac{\mathscr{K}(s, a; \vec{A})}{\tau_n(s)}$$

$$\le 72 \sup_{0<s\le 1} \frac{\mathscr{K}(s,a;\vec{A})}{\tau_n(s)} = 72 \sup_{0<s\le 1} \sup_{n\ge k} \mathscr{K}(s,a;\vec{A}) 2^{-n} s^{-\theta_n}$$
$$= 72 \sup_{n\ge k} 2^{-n} \sup_{0<s\le 1} \mathscr{K}(s,a;\vec{A}) s^{-\theta_n} = 72 \sup_{n\ge k} 2^{-n} \|a\|_{\vec{A}^{\mathscr{K}}_{\theta_n,\infty}},$$

и соотношение (41), а с ним и теорема доказаны. $\square$

Для произвольной последовательности $\vec{q} = \{q_n\}_{n=1}^{\infty}$, $1 \le q_n \le \infty$, и любой банаховой пары $\vec{A} = (A_0, A_1)$, $A_1 \overset{1}{\subset} A_0$, введем дискретную шкалу пространств

$$\vec{A}^{\mathscr{K}}_n(\vec{q}) = (A_0, A_1)^{\mathscr{K}}_{1-1/\Phi(2^n), q_n}, \quad n = 1, 2, \dots.$$

В частности, если $q_n = \Phi(2^n)$, то получаем шкалу $\vec{A}^{\mathscr{K}}_n$ из § 3.

Из теорем 1 и 4 вытекает

Следствие 9. *Для произвольной функции Орлича Φ с константой, не зависящей от банаховой пары $\vec{A} = (A_0, A_1)$ такой, что $A_1 \overset{1}{\subset} A_0$ и $\widetilde{A}_1 = A_1$, а также от $a \in M_\varphi(\vec{A})$, последовательности $\vec{q}$ и $k = 1, 2, \dots$, справедливо соотношение*

$$\mathscr{K}(2^k, a; A_1, M_\varphi(\vec{A})) \asymp \sup_{n\ge k} 2^{k-n} \|a\|_{\langle \vec{A}^{\mathscr{K}}_n(\vec{q})\rangle}.$$

При определенных условиях на $\vec{q}$ аналогичное утверждение верно и для обычного (не модифицированного) $\mathscr{K}$-метода.

Следствие 10. *Если $\Phi(2^n) \le q_n \le \infty$ $(n = 1, 2, \dots)$, то для любой банаховой пары $\vec{A} = (A_0, A_1)$ такой, что $A_1 \overset{1}{\subset} A_0$ и $\widetilde{A}_1 = A_1$, с универсальными константами*

$$\mathscr{K}(2^k, a; A_1, M_\varphi(\vec{A})) \asymp \sup_{n\ge k} 2^{k-n} \|a\|_{\vec{A}^{\mathscr{K}}_n(\vec{q})}.$$

Доказательство. Так как $q_n \ge 2$, а $\theta_n := 1 - 1/\Phi(2^n) \ge 1/2$, легко проверить, что $1/\sqrt{2} \le c_{\theta_n, q_n} \le e^{1/e}$ (см. (2)). Тем самым модифицированные пространства $\mathscr{K}$-метода в предыдущем следствии можно заменить обычными. $\square$

В частности, при прежних условиях на банахову пару $\vec{A}$ получим

$$\mathscr{K}(2^k, a; A_1, M_\varphi(\vec{A})) \asymp \sup_{n\ge k} 2^{k-n} \|a\|_{(A_0,A_1)^{\mathscr{K}}_{1-1/\Phi(2^n),\infty}}.$$

Теорема 6. *Пусть Φ — функция Орлича, а $\vec{A} = (A_0, A_1)$ — банахова пара такая, что $A_1 \overset{1}{\subset} A_0$ и $\widetilde{A}_1 = A_1$. Тогда если $\Phi(2^n) \le q_n \le \infty$ $(n = 1, 2, \dots)$, то для любой банаховой решетки F, интерполяционной относительно пары $\vec{l}_\infty = (l_\infty, l_\infty(2^{-k}))$, выполнено равенство*

$$\mathscr{L}^{\mathscr{K}}_{\Phi,F}\big(\big\{\vec{A}^{\mathscr{K}}_n(\vec{q})\big\}\big) = (A_1, M_\varphi(\vec{A}))^{\mathscr{K}}_F$$

(с эквивалентностью норм).

Доказательство. Следствие 10 и анализ доказательства теоремы 2 показывают, что достаточно проверить справедливость неравенства

$$\|a\|_{\vec{A}^{\mathscr{K}}_n(\vec{q})} \le C \|a\|_{\vec{A}^{\mathscr{K}}_m(\vec{q})} \quad (1 \le n \le m).$$

Для этого, в свою очередь, ввиду условий и теоремы 3.4.1 из [8] достаточно показать, что

$$\|a\|^{\mathscr{K}}_{\theta_n, q_n^0} \le 18 \|a\|^{\mathscr{K}}_{\theta_m,\infty} \quad (1 \le n < m),$$

где по-прежнему $\theta_n = 1 - 1/\Phi(2^n)$, а $q_n^0 = \Phi(2^n)$. Последнее неравенство получается за счет следующих оценок, где мы используем соотношение (42) и неравенство $\Phi(2^m) \geq 2 \cdot \Phi(2^n)$:

$$\|a\|^{\mathscr{K}}_{\theta_n, q_n^0} \leq 9 \left\{ \int_0^1 (t^{-\theta_n} \mathscr{K}(t, a; \vec{A}))^{q_n^0} \, \frac{dt}{t} \right\}^{1/q_n^0}$$

$$\leq 9 \sup_{0<t\leq 1} (t^{-\theta_m} \mathscr{K}(t, a; \vec{A})) \left\{ \int_0^1 t^{1-\Phi(2^n)/\Phi(2^m)} \, \frac{dt}{t} \right\}^{1/\Phi(2^n)} \leq 18 \|a\|^{\mathscr{K}}_{\theta_m, \infty}. \quad \square$$

В заключение определим двойственную шкалу пространств $\mathscr{J}$-метода: если $\vec{s} = \{s_n\}_{n=1}^{\infty}$, $1 \leq s_n \leq \infty$, и $\vec{A} = (A_0, A_1)$ — банахова пара такая, что $A_1 \overset{1}{\subset} A_0$, то

$$\vec{A}_n^{\mathscr{J}}(\vec{s}) = (A_0, A_1)^{\mathscr{J}}_{1/\Phi(2^n), s_n}, \quad n = 1, 2, \dots .$$

Тогда совершенно аналогично теоремам 3 и 4 можно доказать следующие утверждения.

Теорема 7. *Пусть Φ — функция Орлича и $1 \leq s_n \leq \Phi(2^n)/(\Phi(2^n) - 1)$, $n = 1, 2, \dots$. Тогда с константами, не зависящими от банаховой пары $\vec{A} = (A_0, A_1)$ такой, что $A_1 \overset{1}{\subset} A_0$ и A_1 всюду плотно в A_0, а также от $b \in A_0$, последовательности $\vec{s}$ и $k = 1, 2, \dots$, справедливо соотношение*

$$\mathscr{J}(2^{-k}, b; A_0, \Lambda_\varphi(\vec{A})) \asymp \|b\|_{U_k},$$

где $U_k = \sum\limits_{n \geq k} 2^{n-k} \vec{A}_n^{\mathscr{J}}(\vec{s})$.

Теорема 8. *Пусть Φ — функция Орлича и $1 \leq s_n \leq \Phi(2^n)/(\Phi(2^n) - 1)$, $n = 1, 2, \dots$. Предположим, кроме того, что банахова решетка G интерполяционна относительно пары $\vec{l_1} = (l_1, l_1(2^{-k}))$, а $\vec{A} = (A_0, A_1)$ — банахова пара такая, что $A_1 \overset{1}{\subset} A_0$ и A_1 всюду плотно в A_0. Тогда*

$$\mathscr{L}^{\mathscr{J}}_{\Phi, G}\big(\{\vec{A}_n^{\mathscr{J}}(\vec{s})\}\big) = (A_0, \Lambda_\varphi(\vec{A}))^{\mathscr{J}}_G$$

(с эквивалентностью норм).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Yano S.* An extrapolation theorem // J. Math. Soc. Japan. 1951. V. 3. P. 296–305.
2. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. М.: Мир, 1965. Т. 2.
3. *Jawerth B., Milman M.* Extrapolation spaces with applications. Providence RI: Amer. Math. Soc., 1991. (Mem. Amer. Math. Soc.; 440).
4. *Jawerth B., Milman M.* New results and applications of extrapolation theory // Israel Math. Conf. Proc. 1992. V. 5. P. 81–105.
5. *Milman M.* Extrapolation and optimal decompositions with applications to analysis. Berlin: Springer-Verl., 1994. (Lecture Notes in Math.; 1580).
6. *Асташкин С. В.* Об экстраполяционных свойствах шкалы L_p-пространств // Мат. сб. 2003. Т. 194, № 6. С. 23–42.
7. *Асташкин С. В.* Новые экстраполяционные соотношения в шкале L_p-пространств // Функцион. анализ и его прил. 2003. Т. 37, № 3. С. 73–77.
8. *Берг Й., Лефстрем Й.* Интерполяционные пространства. Введение. М.: Мир, 1980.
9. *Brudnyi Yu. A., Krugliak N. Ya.* Interpolation functors and interpolation spaces. Amsterdam: North Holland Publ., 1991.

10. *Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М.* Интерполяция линейных операторов. М.: Наука, 1978.
11. *Lindenstrauss J., Tzafriri L.* Classical Banach spaces. 2. Function spaces. Berlin: Springer-Verl., 1979.
12. *Lorentz G. G.* Relations between function spaces // Proc. Amer. Math. Soc. 1961. V. 12. P. 127–132.
13. *Рутицкий Я. Б.* О некоторых классах измеримых функций // Успехи мат. наук. 1965. Т. 20, № 4. С. 205–208.
14. *Bennett C., Rudnick K.* On Lorentz — Zygmund spaces // Dissertationes Math. 1980. V. 175. P. 5–67.
15. *Milman M.* A note on extrapolation theory // J. Math. Anal. Appl. 2003. V. 282. P. 26–47.
16. *Асташкин С. В.* О пространстве мультипликаторов, порожденных системой Радемахера // Мат. заметки. 2004. Т. 75, № 2. С. 173–181.
17. *Cwikel M., Nilsson P.* Interpolation of Marcinkiewicz spaces // Math. Scand. 1985. V. 56. P. 29–42.
18. *Bennett C.* Banach function spaces and interpolation methods // J. Funct. Anal. 1974. V. 17. P. 409–440.
19. *Ovchinnikov V. I.* The method of orbits in interpolation theory // Math. Rep. Ser. 2. 1984. V. 1. P. 349–515.
20. *Асташкин С. В.* Об интерполяции подпространств симметричных пространств, порожденных системой Радемахера // Изв. РАЕН. Сер. МММИУ. 1997. Т. 1, № 1. С. 18–35.
21. *Kalton N. J.* Calderon couples of rearrangement invariant spaces // Studia Math. 1993. V. 106, N 3. P. 233–277.

Статья поступила 27 августа 2004 г.

Асташкин Сергей Владимирович
Самарский гос. университет, ул. Академика Павлова, 1, Самара 443011
astashkn@ssu.samara.ru