Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2005. Том 46, № 2

УДК 517.988.8

К ОЦЕНКАМ ПОГРЕШНОСТИ МЕТОДА ГАЛЁРКИНА ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

С. Е. Железовский

Аннотация: Рассматривается задача Коши для абстрактного квазилинейного гиперболического уравнения второго порядка в гильбертовом пространстве с переменными операторными коэффициентами и с негладким (только интегрируемым по Бохнеру) свободным членом. Для этой задачи устанавливается априорная энергетическая оценка погрешности полудискретного метода Галёркина при произвольном выборе конечномерных подпространств, в которых должны принимать значения приближенные решения. Устанавливаются также результаты о существовании и единственности точного обобщенного решения. Полученная оценка погрешности конкретизируется для метода конечных элементов и для метода Галёркина в форме Михлина.

Ключевые слова: гиперболическое уравнение второго порядка, метод Галёркина, оценка погрешности, обобщенное решение, существование и единственность решения, метод конечных элементов.

Введение

В статье рассматривается задача Коши для абстрактного квазилинейного гиперболического уравнения второго порядка:

$$u''(t) + A(t)u(t) + B(t, u(t)) = f(t) \quad (0 \le t \le T), \tag{0.1}$$

$$u(0) = u'(0) = 0. \tag{0.2}$$

Здесь u и f — соответственно искомая и заданная функции, отображающие отрезок $[0, T] \subset \mathbb{R}$ в вещественное сепарабельное гильбертово пространство H, $A(t)$ $(0 \le t \le T)$ — неограниченные самосопряженные положительно определенные операторы, действующие в H, с общей областью определения, B — нелинейный оператор, отображающий множество $[0, T] \times V$, где V — общее энергетическое пространство операторов $A(t)$, в пространство H. Условия на операторные коэффициенты уравнения (0.1) подробно сформулированы ниже в разд. 1. Свободный член f уравнения (0.1) предполагается негладким (только интегрируемым по Бохнеру на $[0, T]$), так что задача (0.1), (0.2) имеет, вообще говоря, лишь обобщенное решение. Основной целью статьи является получение для задачи (0.1), (0.2) априорной энергетической оценки погрешности полудискретного метода Галёркина при отсутствии каких-либо специальных условий на проекционные подпространства (конечномерные подпространства пространства V, в которых должны принимать значения приближенные решения). Полученная оценка гарантирует сильную сходимость приближенных решений к точному в энергетической норме с определенной скоростью при единственном условии предельной плотности последовательности проекционных подпространств в V. Эта оценка конкретизируется в статье для метода конечных элементов и для другого варианта метода Галёркина, идея которого восходит к [1] (метод Галёркина в форме Михлина). В статье также имеется доказательство существования и единственности обобщенного решения задачи (0.1), (0.2), что необходимо для полноты и корректности изложения.

До сих пор для метода Галёркина в применении к гиперболическим уравнениям второго порядка и уравнениям, близким к ним по своим свойствам (динамические задачи механики и т. п.), в том числе к линейным уравнениям, при произвольном выборе предельно плотной последовательности проекционных подпространств и при условиях существования лишь обобщенного точного решения единственным известным результатом о сходимости в энергетическом пространстве оставался классический результат о слабой ($*$-слабой) сходимости приближенных решений (см. [2, с. 752; 3, с. 24; 4, с. 299; 5, с. 214]). Этот результат широко используется при доказательстве существования точных обобщенных решений гиперболических уравнений; однако с точки зрения обоснования метода Галёркина как конструктивного средства приближенного решения задач интерес представляют, главным образом, доказательство сильной сходимости приближенных решений к точному и получение оценок скорости этой сходимости. В [6] для линейных и в [7, 8] для квазилинейных (менее общего вида, чем (0.1)) абстрактных гиперболических уравнений второго порядка при условиях существования лишь обобщенного точного решения получены энергетические оценки скорости сходимости метода Галёркина в форме Михлина. Наиболее же распространенным вариантом метода Галёркина является метод конечных элементов. Энергетические оценки погрешности этого метода для гиперболических уравнений второго порядка неоднократно приводились в литературе (см., например, [9, с. 294; 10, с. 222; 11–15]). Но, насколько нам известно, такие оценки всегда устанавливались при более высокой гладкости точного решения, чем гладкость обобщенного решения (речь идет, конечно, о содержательных оценках, т. е. гарантирующих сильную сходимость приближенных решений к точному). В [16] для линейных и в [17–19] для квазилинейных абстрактных гиперболических уравнений второго порядка получены энергетические оценки погрешности метода Галёркина при отсутствии каких-либо специальных условий на проекционные подпространства. Эти оценки также получены при более высокой гладкости точного решения, чем гладкость обобщенного решения.

Факт существования обобщенного решения задачи (0.1), (0.2) при условиях, принятых в настоящей работе, в свою очередь, нетривиален и не является следствием каких-либо известных, более общих, теорем существования. Вопросы математического обоснования нелинейных эволюционных задач той же структуры, но более частного вида рассматривались в [2; 3, с. 16–42; 20], а также в наших работах [7, 21]. В настоящей статье доказательство существования точного обобщенного решения проводится совместно с выводом оценки погрешности метода Галёркина. Схема построений здесь вкратце такова: сначала с использованием усреднений по Стеклову свободного члена устанавливается энергетическая оценка разности между двумя приближенными решениями исходной задачи, построенными методом Галёркина, доставляющая результат о сильной сходимости последовательности приближенных решений и соответственно о существовании точного обобщенного решения; затем оценка погрешности метода

Галёркина получается предельным переходом в оценке разности между приближенными решениями. Отметим, что при применении вместо этого классической методики построения обобщенных решений нелинейных эволюционных задач на основе метода Галёркина, когда устанавливается и используется только слабая ($*$-слабая) сходимость приближенных решений в энергетическом пространстве (см. [2, с. 751–759; 3, с. 22–27]), для обеспечения возможности предельного перехода в нелинейном члене приходится налагать специальное условие на оператор B (условие слабой непрерывности, в определенном смысле, отображения «$u \to B(\cdot, u(\cdot))$»). При нашей методике построения обобщенного решения такого специального условия не требуется и никаких трудностей с обоснованием предельного перехода в нелинейном члене не возникает.

В статье используются стандартные обозначения пространств $\mathscr{L}(X;Y)$ и $C^k([0,T];X)$, где X и Y — банаховы пространства, $k \in \mathbb{N}$ или $k=0$, $[0,T]$ — отрезок оси $\mathbb{R}$ (см., например, [3, с. 579]), а также следующие обозначения: $\mathscr{L}(X) = \mathscr{L}(X;X)$; $\mathscr{B}(X)$ — пространство симметричных билинейных форм $b(\cdot,\cdot\cdot)$ в X, для которых

$$\|b\|_{\mathscr{B}(X)} = \sup_{\|x_1\|_X = \|x_2\|_X = 1} |b(x_1, x_2)| < \infty;$$

$L(0,T;X)$ — пространство интегрируемых по Бохнеру функций $v : [0,T] \to X$ с нормой

$$\|v\|_{L(0,T;X)} = \int\limits_0^T \|v(t)\|_X \, dt;$$

$W^k(0,T;X)$ ($k \in \mathbb{N}$) — пространство функций из $C^{k-1}([0,T];X)$, имеющих на $[0,T]$ производные k-го порядка в смысле распределений (см. [3, с. 20]) из $L(0,T;X)$.

1. Исходные условия

На отрезке $[0,T] \subset \mathbb{R}$ будем рассматривать задачу (0.1), (0.2) в вещественном сепарабельном гильбертовом пространстве H. В уравнении (0.1) $A(t)$ ($0 \le t \le T$) — неограниченные самосопряженные положительно определенные в H операторы с общей областью определения $D(A)$. В силу теоремы Гайнца (см. [22, с. 177]) все операторы $(A(t))^{1/2}$ ($0 \le t \le T$) также имеют общую область определения, которую обозначим через V. Предполагается, что существует некоторый самосопряженный положительно определенный в H оператор A_0, область определения которого совпадает с $D(A)$, который имеет компактный в H обратный оператор A_0^{-1}, такой, что для всех $v \in D(A)$, $t \in [0,T]$

$$\|A_0 v\|_H \le a_0 \|A(t) v\|_H, \tag{1.1}$$

где a_0 — константа, не зависящая от v и t. Введем на V энергетическое скалярное произведение, порожденное оператором A_0, и соответствующую норму: $(v_1, v_2)_V = \big(A_0^{1/2} v_1, A_0^{1/2} v_2\big)_H$, $\|v\|_V = (v,v)_V^{1/2}$, $v_1, v_2, v \in V$. Тем самым превратим V в сепарабельное гильбертово пространство. Обозначим через $a(t,\cdot,\cdot\cdot)$ и $\|\cdot\|_{(t)}$ соответственно энергетическое скалярное произведение и энергетическую норму, порожденные оператором $A(t)$, т. е. $a(t, v_1, v_2) = \big((A(t))^{1/2} v_1, (A(t))^{1/2} v_2\big)_H$, $\|v\|_{(t)} = \|(A(t))^{1/2} v\|_H$, $t \in [0,T]$, $v_1, v_2, v \in V$. Будем считать, что функция «$t \to a(t,\cdot,\cdot\cdot)$» принадлежит $W^2(0,T;\mathscr{B}(V))$. Оператор B в уравнении (0.1) нелинейный, действует из $[0,T] \times V$ в H и имеет производную Фреше

$DB(t,v) \in \mathscr{L}(\mathbb{R} \oplus V; H)$ в каждой точке $(t,v) \in [0,T] \times V$, причем для любого $r \geq 0$ функция «$t \to \beta(t,r)$», где $\beta(t,r) = \sup\limits_{\|v\|_V \leq r} \|DB(t,v)\|_{\mathscr{L}(\mathbb{R}\oplus V;H)}$, суммируема на $[0,T]$. Свободный член f уравнения (0.1) принадлежит $L(0,T;H)$.

Задача (0.1), (0.2) является абстрактной формулировкой начально-краевых задач для широкого класса квазилинейных эволюционных уравнений математической физики второго порядка по времени. В качестве простых конкретных примеров нелинейных уравнений, входящих в этот класс, укажем уравнение, возникающее в релятивистской квантовой механике (см. [3, с. 16]), и интегро-дифференциальное уравнение колебаний призматического стержня (см. [20]). Конечно, в этот класс также входят линейные гиперболические уравнения второго порядка достаточно общего вида. Абстрактные нелинейные задачи той же структуры, что (0.1), (0.2), но с нелинейностями более частного вида (с потенциальными нелинейными операторами и т. п.) рассматривались в [2, 7, 8, 21].

Отметим для дальнейшего некоторые следствия принятых условий. Из неравенства (1.1) по теореме Гайнца следует, что для всех $v \in V$, $t \in [0,T]$

$$\|v\|_V \leq a_0^{1/2} \|v\|_{(t)}. \tag{1.2}$$

Так как «$t \to a(t,\cdot,\cdot\cdot)$»$\in W^2(0,T;\mathscr{B}(V))$, то «$t \to a(t,\cdot,\cdot\cdot)$»$\in C^1([0,T];\mathscr{B}(V))$. Обозначим $a_1 = \max\limits_{0\leq t\leq T} \|a(t,\cdot,\cdot\cdot)\|_{\mathscr{B}(V)}$, $a_2 = \max\limits_{0\leq t\leq T} \|a'(t,\cdot,\cdot\cdot)\|_{\mathscr{B}(V)}$ (здесь и ниже «$t \to a'(t,\cdot,\cdot\cdot)$» — производная первого порядка функции «$t \to a(t,\cdot,\cdot\cdot)$»). Тогда для всех $v \in V$, $t \in [0,T]$

$$\|v\|_{(t)} \leq a_1^{1/2} \|v\|_V, \tag{1.3}$$

$$|a'(t,v,v)| \leq a_2 \|v\|_V^2. \tag{1.4}$$

Из условий на оператор B в силу формулы конечных приращений (см. [23, с. 483]) следует, что для всех $t \in [0,T]$, $r \geq 0$ и $v_1, v_2 \in V$ таких, что $\|v_i\|_V \leq r$ $(i = 1,2)$,

$$\|B(t,v_1) - B(t,v_2)\|_H \leq \beta(t,r)\|v_1 - v_2\|_V. \tag{1.5}$$

Кроме того, действуя по аналогии с доказательством леммы 2 в [21], из условий на оператор B нетрудно вывести существование такой функции $\beta_0 : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$, что для всех $t \in [0,T]$, $r \geq 0$ и $v \in V$ таких, что $\|v\|_V \leq r$,

$$\|B(t,v)\|_H \leq \beta_0(r). \tag{1.6}$$

Функция β_0 здесь может быть следующей:

$$\beta_0(r) = \max\left\{ \int\limits_0^{t_0} \beta(\tau,r)\,d\tau, \int\limits_{t_0}^{T} \beta(\tau,r)\,d\tau \right\} + \beta(t_0,r)r + \|B(t_0,0)\|_H,$$

где t_0 — любое такое фиксированное число из $[0,T]$, что $\beta(t_0,r) < \infty$ для любого $r \geq 0$ (легко видеть, что такое t_0 существует и, более того, множество всех таких t_0 есть подмножество полной меры отрезка $[0,T]$).

В заключение этого раздела сформулируем определение обобщенного решения задачи (0.1), (0.2).

Определение. Пусть $T_0 \in (0,T]$. Функцию $u : [0,T_0] \to V$ будем называть *обобщенным решением задачи* (0.1), (0.2) *на отрезке* $[0,T_0]$, если $u \in$

$C^1([0,T_0];H)\cap C^0([0,T_0];V)$, $u(0)=0$ и для любой функции $v\in W^1(0,T_0;H)\cap L(0,T_0;V)$ такой, что $v(T_0)=0$, выполнено равенство

$$\int_0^{T_0}[-(u'(t),v'(t))_H+a(t,u(t),v(t))+(B(t,u(t)),v(t))_H]\,dt=\int_0^{T_0}(f(t),v(t))_H\,dt. \tag{1.7}$$

2. Усреднения по Стеклову свободного члена

При доказательстве основных результатов настоящей работы будут использоваться усреднения f_ε свободного члена уравнения (0.1), которые мы сейчас определим. Продолжим функцию f на $(T,+\infty)$ равенством $f(t)=0$, $t>T$, и на $(-\infty,0)$ равенством $f(t)=-f(-t)$, $t<0$. Для любого $\varepsilon>0$ положим по определению

$$f_\varepsilon(t)=\frac{1}{2\varepsilon}\int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon}f(\tau)\,d\tau\equiv\frac{1}{2\varepsilon}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}f(t+\tau)\,d\tau$$

(f_ε — усреднение по Стеклову функции f; см., например, [24, с. 156]). Очевидно, что $f_\varepsilon\in W^1(0,T;H)$ и для почти всех $t\in[0,T]$

$$f'_\varepsilon(t)=\frac{1}{2\varepsilon}(f(t+\varepsilon)-f(t-\varepsilon)). \tag{2.1}$$

Обозначим $\Delta f_\varepsilon=f-f_\varepsilon$. По определению функции f_ε

$$\Delta f_\varepsilon(t)=\frac{1}{2\varepsilon}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}(f(t)-f(t+\tau))\,d\tau. \tag{2.2}$$

Обозначим через ω_{f,T_0}, где T_0 — любое фиксированное число из $(0,T]$, интегральный модуль непрерывности функции f на отрезке $[0,T_0]$ (ср. [24, с. 215]):

$$\omega_{f,T_0}(\varepsilon)=\sup_{|\tau|\le\varepsilon}\int_0^{T_0}\|f(t+\tau)-f(t)\|_H\,dt,\quad \varepsilon>0. \tag{2.3}$$

Легко показать, пользуясь плотностью пространства $C^0([0,T_0];H)$ в $L(0,T_0;H)$ и равномерной непрерывностью на $[0,T_0]$ любой функции из $C^0([0,T_0];H)$, что

$$\omega_{f,T_0}(\varepsilon)\to 0\quad \text{при } \varepsilon\to 0. \tag{2.4}$$

Из (2.1)–(2.3) следуют оценки

$$\|f'_\varepsilon\|_{L(0,T_0;H)}\le\varepsilon^{-1}\omega_{f,T_0}(\varepsilon),\quad \|\Delta f_\varepsilon\|_{L(0,T_0;H)}\le\omega_{f,T_0}(\varepsilon). \tag{2.5}$$

Эти оценки будут использоваться в дальнейшем. Также отметим, что в силу нечетности продолженной функции f

$$f_\varepsilon(0)=0. \tag{2.6}$$

3. Приближенные решения

Зададим произвольную последовательность $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ конечномерных подпространств пространства V. Обозначим через $A_n(t)$ действующий в V_n оператор, определенный из тождества $(A_n(t)v_n, w_n)_H = a(t, v_n, w_n)$, $v_n, w_n \in V_n$, и через P_n — ортопроектор на V_n в смысле скалярного произведения пространства H. Аппроксимируем исходную задачу (0.1), (0.2) по методу Галёркина последовательностью задач

$$u_n''(t) + A_n(t)u_n(t) + P_nB(t, u_n(t)) = P_nf(t) \quad (0 \leq t \leq T), \tag{3.1}$$

$$u_n(t) \in V_n \ (0 \leq t \leq T), \quad u_n(0) = u_n'(0) = 0, \tag{3.2}$$

где $n = 1, 2, \ldots$. Решение u_n задачи (3.1), (3.2), соответствующей некоторому значению n, назовем *приближенным решением задачи* (0.1), (0.2), *построенным методом Галёркина*. Рассмотрим также для любого $\varepsilon > 0$ последовательность задач, аналогичных (3.1), (3.2), с f_ε вместо f:

$$u_{\varepsilon,n}''(t) + A_n(t)u_{\varepsilon,n}(t) + P_nB(t, u_{\varepsilon,n}(t)) = P_nf_\varepsilon(t) \quad (0 \leq t \leq T), \tag{3.3}$$

$$u_{\varepsilon,n}(t) \in V_n \quad (0 \leq t \leq T), \quad u_{\varepsilon,n}(0) = u_{\varepsilon,n}'(0) = 0, \tag{3.4}$$

где $n = 1, 2, \ldots$.

Следуя в основном [2, с. 753–756] и [3, с. 23–24, 30–33], нетрудно показать, что существуют числа $T_0 \in (0, T]$, $M_1 > 0$ и $M_2 > 0$, не зависящие от n, ε и от выбора последовательности подпространств $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$, такие, что при любом $n \in \mathbb{N}$ задача (3.1), (3.2) имеет на отрезке $[0, T_0]$ единственное решение $u_n \in W^2(0, T_0; V_n)$, причем для этого решения выполнена априорная оценка

$$\max_{0 \leq t \leq T_0} (\|u_n'(t)\|_H + \|u_n(t)\|_V) \leq M_1, \tag{3.5}$$

и при любых $\varepsilon > 0$ и $n \in \mathbb{N}$ задача (3.3), (3.4) имеет на отрезке $[0, T_0]$ единственное решение $u_{\varepsilon,n} \in W^3(0, T_0; V_n)$, причем для этого решения выполнены априорные оценки

$$\max_{0 \leq t \leq T_0} (\|u_{\varepsilon,n}'(t)\|_H + \|u_{\varepsilon,n}(t)\|_V) \leq M_1, \tag{3.6}$$

$$\max_{0 \leq t \leq T_0} (\|u_{\varepsilon,n}''(t)\|_H + \|u_{\varepsilon,n}'(t)\|_V) \leq M_2(\|f_\varepsilon'\|_{L(0,T_0;H)} + 1). \tag{3.7}$$

При выводе оценок (3.5) и (3.6) вместо обычно используемой в подобных случаях леммы Гронуолла — Беллмана приходится использовать, по причине большой общности нелинейного оператора B, обобщение этой леммы — лемму Бихари (см. [25, с. 189, теорема 3]); здесь возникает ограничение на T_0. Оценка (3.7) выводится с помощью леммы Гронуолла — Беллмана (см. [25, с. 188, теорема 2]), при этом в полной мере используются условия, наложенные на оператор B в разд. 1 (дифференцируемость оператора по Фреше и суммируемость функции $\beta(\cdot, r)$ при любом $r \geq 0$), а также условие «$t \to a(t, \cdot, \cdot\cdot)$»$\in W^2(0, T; \mathscr{B}(V))$. Далее T_0, M_1 и M_2 — любые фиксированные числа, реализующие все только что сформулированные утверждения.

Укажем два важных частных случая уравнения (0.1), для которых сформулированные утверждения об однозначной разрешимости задач (3.1), (3.2) и (3.3), (3.4) и априорные оценки (3.5)–(3.7) справедливы при $T_0 = T$. Это, во-первых, линейное уравнение с $B(t, u(t)) = B_0(t)u(t)$, где, например, $B_0 \in C^1([0, T]; \mathscr{L}(V; H))$, и, во-вторых, нелинейное уравнение, рассматривавшееся в

[7], с единичным операторным коэффициентом при $u''(t)$ (уравнение с потенциальным нелинейным оператором). Задача Коши для этого последнего уравнения может интерпретироваться как абстрактная формулировка начально–краевых задач математической физики, получаемых на основе вариационного принципа Гамильтона — Остроградского (по этому вопросу см. [2, с. 749–751]); ее конкретными реализациями являются, в частности, начально-краевые задачи, рассматривавшиеся в [3, с. 16–42; 20]. В указанных случаях оценки (3.5) и (3.6) выводятся без использования леммы Бихари — в случае линейного уравнения с помощью леммы Гронуолла [26, с. 191], а в случае уравнения с потенциальным нелинейным оператором еще проще, см. [7, с. 1225], — и ограничение на T_0 не возникает. Итак, в этих случаях всюду ниже можно считать, что $T_0 = T$.

4. Величина ρ_n

Примем обозначения: $R_n = E - Q_n$, где E — тождественный оператор в V, Q_n — ортопроектор пространства V на V_n (в смысле скалярного произведения $(\cdot, \cdot\cdot)_V$); $\rho_n = \left\|R_n A_0^{-1}\right\|_{\mathscr{L}(H;V)}$. В разд. 5 погрешность метода Галёркина (3.1), (3.2) для задачи (0.1), (0.2) будет оценена в терминах величины ρ_n.

Лемма. *Если последовательность подпространств $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ предельно плотна в V (т. е. для любого $v \in V$ будет $\|R_n v\|_V \to 0$ при $n \to \infty$), то $\rho_n \to 0$ при $n \to \infty$.*

Доказательство. В разд. 1 было принято условие компактности оператора A_0^{-1} в H. Вследствие этого условия A_0^{-1} компактен и как оператор, действующий из H в V. Действительно, пусть $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ — произвольная ограниченная последовательность элементов H, $\|v_k\|_H \le M_0$ для любого $k \in \mathbb{N}$, где M_0 — константа, не зависящая от k. В силу компактности в H оператора A_0^{-1} существует подпоследовательность $\left\{A_0^{-1} v_{k_i}\right\}_{i=1}^{\infty}$ последовательности $\left\{A_0^{-1} v_k\right\}_{k=1}^{\infty}$, сильно сходящаяся в H. Тогда

$$
\begin{aligned}
&\left\|A_0^{-1} v_{k_i} - A_0^{-1} v_{k_j}\right\|_V^2 = \left\|A_0^{-1/2} v_{k_i} - A_0^{-1/2} v_{k_j}\right\|_H^2 \\
&\quad = \left(v_{k_i} - v_{k_j}, A_0^{-1} v_{k_i} - A_0^{-1} v_{k_j}\right)_H \le (\|v_{k_i}\|_H + \|v_{k_j}\|_H)\left\|A_0^{-1} v_{k_i} - A_0^{-1} v_{k_j}\right\|_H \\
&\qquad\qquad \le 2M_0 \left\|A_0^{-1} v_{k_i} - A_0^{-1} v_{k_j}\right\|_H \to 0 \quad \text{при } i, j \to \infty,
\end{aligned}
$$

т. е. подпоследовательность $\left\{A_0^{-1} v_{k_i}\right\}_{i=1}^{\infty}$ сильно сходится и в V. Это и означает, что A_0^{-1} компактен как оператор, действующий из H в V.

Обозначим $S^0 = \{w \in H \mid \|w\|_H = 1\}$. В силу компактности A_0^{-1} как оператора, действующего из H в V, множество $S = A_0^{-1} S^0$ компактно в V. Но хорошо известно (см., например, [27, с. 228]), что если множество, расположенное в метрическом пространстве, компактно, то при любом $\varepsilon > 0$ для него существует конечная ε-сеть. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$, и пусть $S_{\varepsilon/2}$ — конечная $(\varepsilon/2)$-сеть для S в V. Тогда для любого $v \in S$ существует такой элемент $\varphi_{v,\varepsilon/2} \in S_{\varepsilon/2}$, что $\|v - \varphi_{v,\varepsilon/2}\|_V \le \varepsilon/2$. Так как последовательность подпространств $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ предполагается предельно плотной в V, то для любого $\varphi \in S_{\varepsilon/2}$ будет $\|R_n \varphi\|_V \to 0$, $n \to \infty$. Отсюда в силу конечности множества $S_{\varepsilon/2}$ следует, что существует такое $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, что $\|R_n \varphi\|_V \le \varepsilon/2$ при всех натуральных $n \ge n_\varepsilon$ и при всех $\varphi \in S_{\varepsilon/2}$. Тогда при любом натуральном $n \ge n_\varepsilon$ и любом $v \in S$ имеем

$$
\begin{aligned}
\|R_n v\|_V &\le \|R_n(v - \varphi_{v,\varepsilon/2})\|_V + \|R_n \varphi_{v,\varepsilon/2}\|_V \\
&\le \|v - \varphi_{v,\varepsilon/2}\|_V + \|R_n \varphi_{v,\varepsilon/2}\|_V \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Таким образом, показано, что $\sup\limits_{v\in S}\|R_n v\|_V \to 0$, $n\to\infty$. Но

$$\sup_{v\in S}\|R_n v\|_V = \sup_{w\in S^0}\left\|R_n A_0^{-1} w\right\|_V = \left\|R_n A_0^{-1}\right\|_{\mathscr{L}(H;V)} = \rho_n.$$

Итак, $\rho_n \to 0$, $n\to\infty$, что и требовалось доказать.

Во многих случаях при конкретном выборе подпространств V_n величину ρ_n можно оценить сверху (по крайней мере асимптотически) некоторой известной величиной, стремящейся к нулю при $n\to\infty$, или даже точно вычислить. Пусть, например, задача (0.1), (0.2) — первая начально-краевая задача для гиперболического уравнения с частными производными второго порядка в цилиндре $\Omega\times[0,T]$, где $\Omega\subset\mathbb{R}^m$ $(m\in\mathbb{N})$ — ограниченная область с гладкой границей, и полудискретное приближенное решение этой задачи строится методом конечных элементов. В данном случае $H = L^2(\Omega)$, $A(t)$ $(0\le t\le T)$ — эллиптические операторы второго порядка с гладкими коэффициентами, заданные на $D(A) = H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$, $V = H_0^1(\Omega)$ (здесь и ниже используются обозначения пространств Соболева, принятые в [3, 28]). Оператор A_0 определим на $D(A)$ равенством $A_0 = -\nabla^2$, где ∇^2 — оператор Лапласа. Для метода конечных элементов характерно следующее аппроксимационное свойство подпространств V_n (см., например, [28, с. 135]):

$$\min_{v_n\in V_n}\|v - v_n\|_{H^1(\Omega)} \le c h_n \|v\|_{H^2(\Omega)}, \tag{4.1}$$

где v — любая функция из $H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$, c — константа, не зависящая от v и n, h_n — максимальный из диаметров конечных элементов, порождающих подпространство V_n. В силу второго основного неравенства для эллиптических операторов (см. [5, с. 118]) нормы $\|\cdot\|_{H^2(\Omega)}$ и $\|A_0\cdot\|_H$ эквивалентны на $D(A)$ и из (4.1) следует оценка

$$\rho_n = O(h_n). \tag{4.2}$$

Вернемся к исходной абстрактной задаче (0.1), (0.2) и рассмотрим другой вариант метода Галёркина, идея которого восходит к [1] и разрабатывалась в [29–32, 6–8] (метод Галёркина в форме Михлина), когда в качестве V_n берутся собственные подпространства оператора A_0. В этом случае операторы $A_0^{1/2}$ и R_n перестановочны на $D(A)$ и справедливо равенство $\left\|R_n A_0^{-1/2}\right\|_{\mathscr{L}(H)} = \mu_n^{-1/2}$, где μ_n — минимальное из собственных значений оператора A_0, соответствующих его собственным элементам, не принадлежащим V_n. Так как, очевидно, определение величины ρ_n можно переписать в виде $\rho_n = \left\|A_0^{1/2} R_n A_0^{-1}\right\|_{\mathscr{L}(H)}$, то имеем в данном случае $\rho_n = \left\|R_n A_0^{1/2} A_0^{-1}\right\|_{\mathscr{L}(H)} = \left\|R_n A_0^{-1/2}\right\|_{\mathscr{L}(H)} = \mu_n^{-1/2}$. Итак, для метода Галёркина в форме Михлина величина ρ_n выражается точным равенством

$$\rho_n = \mu_n^{-1/2}. \tag{4.3}$$

5. Основные результаты

Напомним, что в разд. 3 мы условились обозначать через T_0 любое фиксированное число из $(0,T]$, не зависящее от выбора последовательности подпространств $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$, такое, что $[0,T_0]$ — общий отрезок однозначной разрешимости всех задач (3.1), (3.2) и (3.3), (3.4) и выполнения априорных оценок (3.5)–(3.7) для решений всех этих задач. Там же были указаны частные случаи уравнения (0.1), когда можно считать, что $T_0 = T$.

Основные результаты настоящей работы содержатся в следующей теореме.

Теорема. *Обобщенное решение u задачи* (0.1), (0.2) *на отрезке* $[0, T_0]$ *существует и единственно, и при произвольном выборе последовательности подпространств* $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ *погрешность метода Галёркина* (3.1), (3.2) *для задачи* (0.1), (0.2) *допускает оценку*

$$\max_{0 \le t \le T_0} \left(\|u'(t) - u_n'(t)\|_H + \|u(t) - u_n(t)\|_V \right) \le C_1 \omega_{f,T_0}\left(\rho_n^{1/2}\right) + C_2 \rho_n^{1/2}, \tag{5.1}$$

где n — любое натуральное число, C_1 и C_2 — положительные константы, не зависящие от n, ω_{f,T_0} — интегральный модуль непрерывности функции f на отрезке $[0, T_0]$ (*см.* (2.3)).

Замечание. Если последовательность подпространств $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ предельно плотна в V, то согласно доказанной лемме $\rho_n \to 0$, $n \to \infty$, а поэтому (см. (2.4)) и $\omega_{f,T_0}\left(\rho_n^{1/2}\right) \to 0$, $n \to \infty$, и оценка (5.1) гарантирует, что $u_n \to u$ сильно в $C^1([0, T_0]; H) \cap C^0([0, T_0]; V)$, $n \to \infty$.

Доказательство теоремы. Прежде всего отметим некоторые факты, нужные для дальнейшего. Пусть n — любое натуральное число, t — любое число из $[0, T_0]$, v — любой элемент пространства V и w — любая функция из $C^1([0, T_0]; V)$. Обозначим через $Q_n(t)$ ортопроектор пространства V на V_n в смысле скалярного произведения $a(t, \cdot, \cdot\cdot)$ и через $R_n(t)$ — оператор $E - Q_n(t)$, где E — тождественный оператор в V. Вследствие леммы 2 из [33] функция «$t \to Q_n(t)$» имеет на $[0, T_0]$ ограниченную в смысле нормы пространства $\mathscr{L}(V)$ производную и справедливо равенство

$$a(t, Q_n'(t)v, v) = a'(t, R_n(t)v, Q_n(t)v). \tag{5.2}$$

Используя (5.2) с $v = w(t)$, проведем преобразования:

$$\begin{aligned}
\left(\|w(t)\|_{(t)}^2 - \|R_n(t)w(t)\|_{(t)}^2\right)' &= \left(\|Q_n(t)w(t)\|_{(t)}^2\right)' = (a(t, Q_n(t)w(t), w(t)))' \\
&= a'(t, Q_n(t)w(t), w(t)) + a(t, Q_n'(t)w(t), w(t)) \\
&\quad + a(t, Q_n(t)w'(t), w(t)) + a(t, Q_n(t)w(t), w'(t)) \\
&= a'(t, Q_n(t)w(t), w(t)) + a'(t, R_n(t)w(t), Q_n(t)w(t)) + 2a(t, w(t), Q_n(t)w'(t)) \\
&= a'(t, w(t), w(t)) - a'(t, R_n(t)w(t), R_n(t)w(t)) + 2a(t, w(t), Q_n(t)w'(t)).
\end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned}
2a(t, w(t), Q_n(t)w'(t)) &= \left(\|w(t)\|_{(t)}^2 - \|R_n(t)w(t)\|_{(t)}^2\right)' \\
&\quad - a'(t, w(t), w(t)) + a'(t, R_n(t)w(t), R_n(t)w(t)).
\end{aligned} \tag{5.3}$$

В силу леммы Обэна — Нитше (см. [28, с. 139])

$$\|R_n(t)v\|_H \le \|(A(t))^{1/2} R_n(t) (A(t))^{-1}\|_{\mathscr{L}(H)} \|R_n(t)v\|_{(t)}. \tag{5.4}$$

С помощью (1.3) и (1.1) легко показать, что

$$\|(A(t))^{1/2} R_n(t) (A(t))^{-1}\|_{\mathscr{L}(H)} \le a_0 a_1^{1/2} \rho_n. \tag{5.5}$$

Из (5.4) и (5.5) следует неравенство

$$\|R_n(t)v\|_H \le a_0 a_1^{1/2} \rho_n \|R_n(t)v\|_{(t)}. \tag{5.6}$$

Отсюда, в свою очередь, с помощью (1.3) получаем, что

$$\|R_n(t)v\|_H \le a_0 a_1 \rho_n \|R_n v\|_V$$

и тем более
$$\|R_n(t)v\|_H \le a_0 a_1 \rho_n \|v\|_V. \tag{5.7}$$
Пусть ε — любое положительное число и τ — любое число из $[0, T_0]$. Учитывая (2.6), запишем $f_\varepsilon(\tau) = \int\limits_0^\tau f'_\varepsilon(t)\,dt$. Отсюда
$$\|f_\varepsilon(\tau)\|_H \le \|f'_\varepsilon\|_{L(0,T_0;H)}. \tag{5.8}$$

Перейдем к доказательству существования обобщенного решения задачи (0.1), (0.2) и выводу оценки (5.1) (то и другое совместим в едином рассуждении). Сначала будем считать, что последовательность $\{V_n\}_{n=1}^\infty$ проекционных подпространств метода Галёркина предельно плотна в V и монотонна, т. е. $V_n \subset V_s$ для любых $n, s \in \mathbb{N}$ таких, что $n < s$. Пусть ε — любое положительное число, n и s — любые натуральные числа такие, что $n < s$. Обозначим $\Delta u_{\varepsilon,s,n} = u_{\varepsilon,s} - u_{\varepsilon,n}$, $\Delta u_{\varepsilon,n} = u_n - u_{\varepsilon,n}$, $\Delta u_{\varepsilon,s} = u_s - u_{\varepsilon,s}$. Будем также использовать обозначение $|[v]| = \max\limits_{0\le t\le T_0}(\|v'(t)\|_H + \|v(t)\|_V)$, $v \in C^1([0,T_0];H) \cap C^0([0,T_0];V)$.

Суть нижеследующих построений состоит в получении и использовании оценки для $|[u_s - u_n]|$ (оценка (5.24) ниже). При выводе этой оценки будем исходить из очевидного равенства
$$u_s - u_n = \Delta u_{\varepsilon,s,n} - \Delta u_{\varepsilon,n} + \Delta u_{\varepsilon,s}. \tag{5.9}$$

Оценим сначала $|[\Delta u_{\varepsilon,s,n}]|$ (затем $|[\Delta u_{\varepsilon,n}]|$ и $|[\Delta u_{\varepsilon,s}]|$). Почленно вычтем равенство (3.3) из такого же равенства с s вместо n и почленно умножим скалярно в H полученное равенство на $2Q_n(t)\Delta u'_{\varepsilon,s,n}(t) \in V_n$. Учитывая предположение $V_n \subset V_s$ (в силу которого $Q_n(t)\Delta u'_{\varepsilon,s,n}(t) \in V_s$), запишем вновь полученное соотношение в виде
$$\begin{aligned}&2(\Delta u''_{\varepsilon,s,n}(t), \Delta u'_{\varepsilon,s,n}(t))_H + 2a(t, \Delta u_{\varepsilon,s,n}(t), Q_n(t)\Delta u'_{\varepsilon,s,n}(t))\\ &= 2(\Delta u''_{\varepsilon,s,n}(t), R_n(t)u'_{\varepsilon,s}(t))_H + 2(B(t,u_{\varepsilon,n}(t)) - B(t,u_{\varepsilon,s}(t)), Q_n(t)\Delta u'_{\varepsilon,s,n}(t))_H.\end{aligned} \tag{5.10}$$

Положим в (5.3) $w = \Delta u_{\varepsilon,s,n}$, тогда получим равенство
$$\begin{aligned}2a(t, \Delta u_{\varepsilon,s,n}(t), Q_n(t)\Delta u'_{\varepsilon,s,n}(t)) &= \big(\|\Delta u_{\varepsilon,s,n}(t)\|^2_{(t)} - \|R_n(t)u_{\varepsilon,s}(t)\|^2_{(t)}\big)'\\ &- a'(t, \Delta u_{\varepsilon,s,n}(t), \Delta u_{\varepsilon,s,n}(t)) + a'(t, R_n(t)u_{\varepsilon,s}(t), R_n(t)u_{\varepsilon,s}(t)).\end{aligned} \tag{5.11}$$

Подставим (5.11) в (5.10) и почленно проинтегрируем полученное равенство по $t \in [0,\tau]$, где τ — любое число из $[0,T_0]$. Тогда будем иметь
$$\begin{aligned}&\|\Delta u'_{\varepsilon,s,n}(\tau)\|^2_H + \|\Delta u_{\varepsilon,s,n}(\tau)\|^2_{(\tau)} = 2\int\limits_0^\tau (\Delta u''_{\varepsilon,s,n}(t), R_n(t)u'_{\varepsilon,s}(t))_H\,dt\\ &+ 2\int\limits_0^\tau (B(t,u_{\varepsilon,n}(t)) - B(t,u_{\varepsilon,s}(t)), Q_n(t)\Delta u'_{\varepsilon,s,n}(t))_H\,dt + \|R_n(\tau)u_{\varepsilon,s}(\tau)\|^2_{(\tau)}\\ &+ \int\limits_0^\tau a'(t, \Delta u_{\varepsilon,s,n}(t), \Delta u_{\varepsilon,s,n}(t))\,dt - \int\limits_0^\tau a'(t, R_n(t)u_{\varepsilon,s}(t), R_n(t)u_{\varepsilon,s}(t))\,dt \equiv \sum_{i=1}^5 \Phi_i.\end{aligned} \tag{5.12}$$

Далее оценим сверху поочередно все слагаемые, составляющие правую часть равенства (5.12). Ниже обозначаем: c_i $(i=\overline{1,10})$ — различные положительные константы, не зависящие от n,s,ε,τ и от выбора последовательности подпространств $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$; $c_{i,\varepsilon}=c_i(\|f'_\varepsilon\|_{L(0,T_0;H)}+1)$ $(i=\overline{1,5},7,8)$. Для слагаемого Φ_1, используя (3.7) и (5.7), имеем

$$\begin{aligned}\Phi_1&=2\int_0^\tau(\Delta u''_{\varepsilon,s,n}(t),R_n(t)u'_{\varepsilon,s}(t))_H\,dt\\&\le 2\int_0^\tau(\|u''_{\varepsilon,s}(t)\|_H+\|u''_{\varepsilon,n}(t)\|_H)\|R_n(t)u'_{\varepsilon,s}(t)\|_H\,dt\\&\le 4T_0M_2^2(\|f'_\varepsilon\|_{L(0,T_0;H)}+1)^2a_0a_1\rho_n=c_{1,\varepsilon}^2\rho_n.\end{aligned}\tag{5.13}$$

Слагаемое Φ_2 оценим с помощью (1.5), (3.6), (5.7) и (3.7):

$$\begin{aligned}\Phi_2&=2\int_0^\tau(B(t,u_{\varepsilon,n}(t))-B(t,u_{\varepsilon,s}(t)),\Delta u'_{\varepsilon,s,n}(t)-R_n(t)u'_{\varepsilon,s}(t))_H\,dt\\&\le 2\int_0^\tau\beta(t,M_1)\|\Delta u_{\varepsilon,s,n}(t)\|_V(\|\Delta u'_{\varepsilon,s,n}(t)\|_H+\|R_n(t)u'_{\varepsilon,s}(t)\|_H)\,dt\\&\le 2\int_0^\tau\beta(t,M_1)\|\Delta u_{\varepsilon,s,n}(t)\|_V(\|\Delta u'_{\varepsilon,s,n}(t)\|_H+c_{2,\varepsilon}\rho_n)\,dt.\end{aligned}\tag{5.14}$$

Чтобы получить оценку слагаемого

$$\Phi_3=\|R_n(\tau)u_{\varepsilon,s}(\tau)\|_{(\tau)}^2=a(\tau,u_{\varepsilon,s}(\tau),R_n(\tau)u_{\varepsilon,s}(\tau)),$$

почленно умножим скалярно в H соотношение (3.3) с s вместо n и с τ вместо t на $R_n(\tau)u_{\varepsilon,s}(\tau)$ и запишем полученное соотношение с учетом того, что $R_n(\tau)u_{\varepsilon,s}(\tau)=u_{\varepsilon,s}(\tau)-Q_n(\tau)u_{\varepsilon,s}(\tau)\in V_s$ (здесь вновь используется предположение $V_n\subset V_s$, в силу которого $Q_n(\tau)u_{\varepsilon,s}(\tau)\in V_s$):

$$\begin{aligned}&(u''_{\varepsilon,s}(\tau),R_n(\tau)u_{\varepsilon,s}(\tau))_H+a(\tau,u_{\varepsilon,s}(\tau),R_n(\tau)u_{\varepsilon,s}(\tau))\\&\qquad+(B(\tau,u_{\varepsilon,s}(\tau)),R_n(\tau)u_{\varepsilon,s}(\tau))_H=(f_\varepsilon(\tau),R_n(\tau)u_{\varepsilon,s}(\tau))_H.\end{aligned}$$

Выразим отсюда $a(\tau,u_{\varepsilon,s}(\tau),R_n(\tau)u_{\varepsilon,s}(\tau))$ и оценим полученное выражение с помощью (5.8), (3.7), (1.6), (3.6) и (5.6):

$$\begin{aligned}&a(\tau,u_{\varepsilon,s}(\tau),R_n(\tau)u_{\varepsilon,s}(\tau))=(f_\varepsilon(\tau)-u''_{\varepsilon,s}(\tau)-B(\tau,u_{\varepsilon,s}(\tau)),R_n(\tau)u_{\varepsilon,s}(\tau))_H\\&\le(\|f'_\varepsilon\|_{L(0,T_0;H)}+M_2(\|f'_\varepsilon\|_{L(0,T_0;H)}+1)+\beta_0(M_1))\cdot a_0a_1^{1/2}\rho_n\|R_n(\tau)u_{\varepsilon,s}(\tau)\|_{(\tau)}\\&\le c_{3,\varepsilon}\rho_n\Phi_3^{1/2}.\end{aligned}$$

Итак, $\Phi_3\le c_{3,\varepsilon}\rho_n\Phi_3^{1/2}$, и, следовательно,

$$\Phi_3\le c_{3,\varepsilon}^2\rho_n^2.\tag{5.15}$$

Слагаемое Φ_4 оценим с помощью (1.4) и слагаемое Φ_5 — с помощью (1.4), (1.2), (5.15):

$$\Phi_4\le a_2\int_0^\tau\|\Delta u_{\varepsilon,s,n}(t)\|_V^2\,dt,\tag{5.16}$$

$$\Phi_5 \le a_0 a_2 \int\limits_0^\tau \|R_n(t) u_{\varepsilon,s}(t)\|^2_{(t)}\,dt \le a_0 a_2 T_0 c^2_{3,\varepsilon}\rho_n^2 = c^2_{4,\varepsilon}\rho_n^2. \tag{5.17}$$

Теперь оценим всю правую часть равенства (5.12) сверху с помощью (5.13)–(5.17), а второе слагаемое в левой части равенства (5.12) снизу с помощью (1.2). После дальнейших элементарных оценок получим из (5.12) неравенство

$$\|\Delta u'_{\varepsilon,s,n}(\tau)\|^2_H + \|\Delta u_{\varepsilon,s,n}(\tau)\|^2_V \le c^2_{5,\varepsilon}\big(\rho_n + \rho_n^2\big) + \int\limits_0^\tau F(t)\big(\|\Delta u'_{\varepsilon,s,n}(t)\|^2_H + \|\Delta u_{\varepsilon,s,n}(t)\|^2_V\big)\,dt, \tag{5.18}$$

где F — суммируемая на $[0,T_0]$ функция, вид которой не зависит от n,s,ε,τ и от выбора последовательности подпространств $\{V_n\}_{n=1}^\infty$. Из определения ρ_n следует, что $\rho_n \le \|A_0^{-1/2}\|_{\mathscr{L}(H)} = c_6$, поэтому

$$c_{5,\varepsilon}\big(\rho_n + \rho_n^2\big)^{1/2} \le c_{7,\varepsilon}\rho_n^{1/2}. \tag{5.19}$$

Применяя к (5.18) лемму Гронуолла — Беллмана (см. [25, с. 188, теорема 2]) и учитывая (5.19), получаем искомую оценку для $|[\Delta u_{\varepsilon,s,n}]|$:

$$|[\Delta u_{\varepsilon,s,n}]| \le c_{8,\varepsilon}\rho_n^{1/2}. \tag{5.20}$$

Оценим теперь $|[\Delta u_{\varepsilon,n}]|$ и $|[\Delta u_{\varepsilon,s}]|$. Почленно вычтем (3.3) из (3.1), почленно умножим скалярно в H полученное равенство на $2\Delta u'_{\varepsilon,n}(t)$ и проинтегрируем вновь полученное равенство по $t \in [0,\tau]$, где τ — любое число из $[0,T_0]$. Тогда будем иметь

$$\|\Delta u'_{\varepsilon,n}(\tau)\|^2_H + \|\Delta u_{\varepsilon,n}(\tau)\|^2_{(\tau)} = 2\int\limits_0^\tau (\Delta f_\varepsilon(t), \Delta u'_{\varepsilon,n}(t))_H\,dt + 2\int\limits_0^\tau (B(t,u_{\varepsilon,n}(t)) - B(t,u_n(t)), \Delta u'_{\varepsilon,n}(t))_H\,dt + \int\limits_0^\tau a'(t, \Delta u_{\varepsilon,n}(t), \Delta u_{\varepsilon,n}(t))\,dt. \tag{5.21}$$

Здесь, как и выше (см. разд. 2), $\Delta f_\varepsilon = f - f_\varepsilon$. Оценим сверху поочередно все слагаемые, составляющие правую часть равенства (5.21) (при оценке второго слагаемого используем (1.5), (3.5) и (3.6), а при оценке третьего — (1.4)). Второе слагаемое в левой части (5.21) оценим снизу с помощью (1.2). В результате из (5.21) вытекает, что

$$\|\Delta u'_{\varepsilon,n}(\tau)\|^2_H + a_0^{-1}\|\Delta u_{\varepsilon,n}(\tau)\|^2_V \le 2\int\limits_0^\tau \|\Delta f_\varepsilon(t)\|_H \|\Delta u'_{\varepsilon,n}(t)\|_H\,dt + 2\int\limits_0^\tau \beta(t,M_1)\|\Delta u_{\varepsilon,n}(t)\|_V \|\Delta u'_{\varepsilon,n}(t)\|_H\,dt + a_2\int\limits_0^\tau \|\Delta u_{\varepsilon,n}(t)\|^2_V\,dt.$$

Отсюда после дальнейших элементарных оценок с помощью леммы Гронуолла — Беллмана получаем искомую оценку для $|[\Delta u_{\varepsilon,n}]|$:

$$|[\Delta u_{\varepsilon,n}]| \le c_9\|\Delta f_\varepsilon\|_{L(0,T_0;H)}. \tag{5.22}$$

Конечно, для $|[\Delta u_{\varepsilon,s}]|$ справедлива такая же оценка:

$$|[\Delta u_{\varepsilon,s}]| \le c_9 \|\Delta f_\varepsilon\|_{L(0,T_0;H)}. \tag{5.23}$$

Наконец, оценим $|[u_s - u_n]|$. Из (5.9), (5.20), (5.22) и (5.23) следует оценка

$$|[u_s - u_n]| \le c_8(\|f'_\varepsilon\|_{L(0,T_0;H)} + 1)\rho_n^{1/2} + 2c_9\|\Delta f_\varepsilon\|_{L(0,T_0;H)}.$$

Оценим правую часть этого неравенства с помощью (2.5), тогда

$$|[u_s - u_n]| \le c_8(\varepsilon^{-1}\omega_{f,T_0}(\varepsilon) + 1)\rho_n^{1/2} + 2c_9\omega_{f,T_0}(\varepsilon).$$

Полагая здесь $\varepsilon = \rho_n^{1/2}$, получим искомую оценку

$$|[u_s - u_n]| \le c_{10}\omega_{f,T_0}\big(\rho_n^{1/2}\big) + c_8\rho_n^{1/2}. \tag{5.24}$$

Так как последовательность подпространств $\{V_n\}_{n=1}^\infty$ предполагается предельно плотной в V, согласно доказанной в разд. 4 лемме $\rho_n \to 0$, $n \to \infty$. Тогда в силу (2.4) и $\omega_{f,T_0}\big(\rho_n^{1/2}\big) \to 0$, $n \to \infty$. Таким образом,

$$c_{10}\omega_{f,T_0}\big(\rho_n^{1/2}\big) + c_8\rho_n^{1/2} \to 0, \quad n \to \infty,$$

и оценка (5.24) означает, что последовательность $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ фундаментальна в пространстве $C^1([0,T_0];H) \cap C^0([0,T_0];V)$ с нормой $|[\cdot]|$. Следовательно, в силу полноты этого пространства существует такая функция $u \in C^1([0,T_0];H) \cap C^0([0,T_0];V)$, что

$$u_n \to u \text{ сильно в } C^0([0,T_0];V), \quad n \to \infty, \tag{5.25}$$

$$u'_n \to u' \text{ сильно в } C^0([0,T_0];H), \quad n \to \infty. \tag{5.26}$$

Из (5.25) и (1.5) следует, что

$$B(\cdot, u_n(\cdot)) \to B(\cdot, u(\cdot)) \text{ сильно в } L(0,T_0;H), \quad n \to \infty. \tag{5.27}$$

Стандартным образом (см. [2, с. 758; 3, с. 26]), используя (5.25)–(5.27) и начальное условие $u'_n(0) = 0$ (см. (3.2)), осуществляем предельный переход в (3.1) (предельный переход в нелинейном члене не представляет трудности благодаря (5.27)) и в результате устанавливаем тождество (1.7). Из начального условия $u_n(0) = 0$ (см. (3.2)) предельным переходом получаем $u(0) = 0$. Таким образом, функция u является обобщенным решением задачи (0.1), (0.2) на отрезке $[0,T_0]$. Переходя в (5.24) к пределу при $s \to \infty$, получаем оценку (5.1) с $C_1 = c_{10}$, $C_2 = c_8$.

До сих пор в этом доказательстве предполагалось, что последовательность подпространств $\{V_n\}_{n=1}^\infty$ предельно плотна в V и монотонна. Но эти предположения не ограничивают общности ситуации, в которой справедлива оценка (5.1), так как, очевидно, любое отдельно взятое конечномерное подпространство $V_n \subset V$ можно включить в некоторую предельно плотную в V и монотонную последовательность конечномерных подпространств пространства V, а константы $C_1 = c_{10}$ и $C_2 = c_8$, реализующие оценку (5.1), не зависят от выбора последовательности подпространств $\{V_n\}_{n=1}^\infty$. Итак, оценка (5.1) фактически установлена для произвольной последовательности $\{V_n\}_{n=1}^\infty$ конечномерных подпространств пространства V.

Для завершения доказательства теоремы остается доказать, что обобщенное решение задачи (0.1), (0.2) на отрезке $[0,T_0]$ единственно. Доказательство этого факта основано на следующем утверждении: если $g \in L(0, T_0; H)$, то обобщенное решение y линейной задачи

$$y''(t) + A(t)y(t) = g(t), \quad y(0) = y'(0) = 0 \tag{5.28}$$

на отрезке $[0, T_0]$ единственно, причем для любого $t \in [0, T_0]$

$$\|y(t)\|_V \le C\|g\|_{L(0,t;H)}, \tag{5.29}$$

где C — константа, зависящая только от a_0 и a_2. Это утверждение устанавливается без труда (поскольку речь идет о линейной задаче) методами работ [4, с. 296–302; 5, с. 201–205, 210–213] с использованием неравенств (1.2) и (1.4).

Докажем единственность обобщенного решения задачи (0.1), (0.2) на отрезке $[0, T_0]$. Пусть u и v — два обобщенных решения задачи (0.1), (0.2) на отрезке $[0, T_0]$. Обозначим $M = \max\{\max\limits_{0\le t\le T_0} \|u(t)\|_V, \max\limits_{0\le t\le T_0} \|v(t)\|_V\}$. Разность $y = u - v$ является обобщенным решением на отрезке $[0, T_0]$ задачи вида (5.28) с $g(t) = B(t, v(t)) - B(t, u(t))$. Применяя оценку (5.29) и затем неравенство (1.5), получаем, что для любого $t \in [0, T_0]$

$$\|y(t)\|_V \le C \int\limits_0^t \|B(\tau, v(\tau)) - B(\tau, u(\tau))\|_H \, d\tau \le C \int\limits_0^t \beta(\tau, M)\|y(\tau)\|_V \, d\tau,$$

откуда в силу леммы Гронуолла — Беллмана следует, что $y(t) \equiv 0$ на $[0, T_0]$. Таким образом, $u = v$, т. е. обобщенное решение задачи (0.1), (0.2) на отрезке $[0, T_0]$ единственно. Теорема доказана полностью.

6. Примеры

Проиллюстрируем применимость оценки (5.1) при конкретном выборе проекционных подпространств V_n. Для рассмотренной в разд. 4 ситуации, когда задача (0.1), (0.2) — первая начально-краевая задача для гиперболического уравнения с частными производными второго порядка в цилиндре $\Omega \times [0, T]$, где Ω — область в $\mathbb{R}^m$ ($m \in \mathbb{N}$), и полудискретное приближенное решение этой задачи строится методом конечных элементов при условии, что свободный член f принадлежит $L(0, T; L^2(\Omega))$, из (5.1), пользуясь (4.2) и тем, что $\omega_{f,T_0}(O(\varepsilon)) = O(\omega_{f,T_0}(\varepsilon))$, $\varepsilon > 0$ (это соотношение — простое следствие определения интегрального модуля непрерывности, ср. [24, с. 213, 216]), получаем оценку погрешности

$$\max_{0\le t\le T_0}(\|u'(t) - u_n'(t)\|_{L^2(\Omega)} + \|u(t) - u_n(t)\|_{H^1(\Omega)}) = O\big(\omega_{f,T_0}\big(h_n^{1/2}\big) + h_n^{1/2}\big),$$

где h_n — максимальный из диаметров конечных элементов, порождающих проекционное подпространство $V_n \subset H_0^1(\Omega)$. Подобные приведенной оценки (при $f \in L(0, T; L^2(\Omega))$) до сих пор были, по-видимому, неизвестны даже для линейных уравнений.

Для метода Галёркина в форме Михлина (также см. разд. 4) оценка (5.1) согласно (4.3) означает, что

$$\max_{0\le t\le T_0}(\|u'(t) - u_n'(t)\|_H + \|u(t) - u_n(t)\|_V) = O\big(\omega_{f,T_0}\big(\mu_n^{-1/4}\big) + \mu_n^{-1/4}\big), \tag{6.1}$$

где μ_n — минимальное из собственных значений оператора A_0, соответствующих его собственным элементам, не принадлежащим проекционному подпространству V_n. Аналоги оценки (6.1) для абстрактных гиперболических уравнений менее общего вида, чем рассмотренное здесь, устанавливались в [6–8]. В отличие от [6–8] здесь для выполнения оценки (6.1) не требуется, чтобы операторы $A(t)$ и A_0 составляли острый угол.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Михлин С. Г.* По поводу метода Ритца // Докл. АН СССР. 1956. Т. 106, № 3. С. 391–394.
2. *Ворович И. И.* О некоторых прямых методах в нелинейной теории колебаний пологих оболочек // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1957. Т. 21, № 6. С. 747–784.
3. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972.
4. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971.
5. *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.
6. *Железовская Л. А., Железовский С. Е., Кириченко В. Ф., Крысько В. А.* О скорости сходимости метода Бубнова — Галёркина для гиперболических уравнений // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26, № 2. С. 323–333.
7. *Железовский С. Е.* Метод Бубнова — Галёркина для абстрактной квазилинейной задачи о стационарном действии // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31, № 7. С. 1222–1231.
8. *Железовский С. Е.* О скорости сходимости метода Галёркина для одного класса квазилинейных эволюционных задач / Ред. Сиб. мат. журн. Новосибирск, 1998. 19 с. Деп. в ВИНИТИ 08.01.98, № 24–В98.
9. *Стренг Г., Фикс Дж.* Теория метода конечных элементов. М.: Мир, 1977.
10. *Марчук Г. И., Агошков В. И.* Введение в проекционно-сеточные методы. М.: Наука, 1981.
11. *Dendy J. E., Jr.* An analysis of some Galerkin schemes for the solution of nonlinear time-dependent problems // SIAM J. Numer. Anal. 1975. V. 12, N 4. P. 541–565.
12. *Dendy J. E., Jr.* Galerkin's method for some highly nonlinear problems // SIAM J. Numer. Anal. 1977. V. 14, N 2. P. 327–347.
13. *Geveci T.* On the convergence of Galerkin approximation schemes for second-order hyperbolic equations in energy and negative norms // Math. Comput. 1984. V. 42, N 166. P. 393–415.
14. *Kok B., Geveci T.* The convergence of Galerkin approximation schemes for second–order hyperbolic equations with dissipation // Math. Comput. 1985. V. 44, N 170. P. 379–390.
15. *Злотник А. А.* Оценки скорости сходимости проекционно-сеточных методов для гиперболических уравнений второго порядка // Вычислительные процессы и системы. М.: Наука, 1991. Вып. 8. С. 116–167.
16. *Железовский С. Е.* Оценки скорости сходимости метода Галёркина для абстрактного гиперболического уравнения // Мат. заметки. 2001. Т. 69, № 2. С. 223–234.
17. *Железовский С. Е., Букесова Н. Н.* Оценки погрешности проекционного метода для абстрактного квазилинейного гиперболического уравнения // Изв. вузов. Математика. 1999. № 5. С. 94–96.
18. *Ляшко А. Д., Железовский С. Е.* Корректность одной операторно-дифференциальной схемы и обоснование метода Галёркина для гиперболических уравнений // Сиб. журн. вычисл. математики. 2000. Т. 3, № 4. С. 357–368.
19. *Железовский С. Е., Ляшко А. Д.* Оценки погрешности метода Галёркина для квазилинейных гиперболических уравнений // Дифференц. уравнения. 2001. Т. 37, № 7. С. 941–949.
20. *Морозов Н. Ф.* Исследование колебаний призматического стержня под действием поперечной нагрузки // Изв. вузов. Математика. 1965. № 3. С. 121–125.
21. *Железовский С. Е.* О существовании и единственности решения и о скорости сходимости метода Бубнова — Галёркина для одной квазилинейной эволюционной задачи в гильбертовом пространстве // Изв. вузов. Математика. 1998. № 10. С. 37–45.
22. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1967.
23. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1981.
24. *Ахиезер Н. И.* Лекции по теории аппроксимации. М.: Наука, 1965.
25. *Беккенбах Э., Беллман Р.* Неравенства. М.: Мир, 1965.
26. *Гаевский Х., Грёгер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1978.
27. *Люстерник Л. А., Соболев В. И.* Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1965.
28. *Сьярле Ф.* Метод конечных элементов для эллиптических задач. М.: Мир, 1980.
29. *Михлин С. Г.* Численная реализация вариационных методов. М.: Наука, 1966.
30. *Джишкариани А. В.* О быстроте сходимости метода Бубнова — Галёркина // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1964. Т. 4, № 2. С. 343–348.
31. *Вайникко Г. М.* Некоторые оценки погрешности метода Бубнова — Галёркина I. Асимптотические оценки // Уч. зап. Тарт. ун-та. 1964. № 150. С. 188–201.

32. *Зарубин А. Г.* О скорости сходимости метода Фаэдо — Галёркина для квазилинейных нестационарных операторных уравнений // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26, № 12. С. 2051–2059.

33. *Смагин В. В.* Оценки погрешности полудискретных приближений по Галёркину для параболических уравнений с краевым условием типа Неймана // Изв. вузов. Математика. 1996. № 3. С. 50–57.

Статья поступила 8 декабря 2003 г.

Железовский Сергей Евгеньевич
Саратовский гос. социально-экономический университет,
кафедра прикладной математики,
ул. Радищева, 89, Саратов 410003
jelezovsky@ssea.runnet.ru