Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2005. Том 46, № 2

УДК 517.9

ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ХИЛЛЕ — ИОСИДЫ НА СЛУЧАЙ ВЫРОЖДЕННЫХ ПОЛУГРУПП В ЛОКАЛЬНО ВЫПУКЛЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

В. Е. Федоров

Аннотация: Получено обобщение теоремы Хилле — Иосиды об инфинитезимальных генераторах равностепенно непрерывных сильно непрерывных полугрупп на случай полугрупп уравнений соболевского типа в локально выпуклых пространствах. Особенно простой вид эти результаты имеют в полурефлексивных пространствах. Кроме того, исследованы фазовые пространства уравнений соболевского типа. Абстрактные результаты приложены к исследованию одного класса начально-краевых задач для неклассических уравнений в частных производных высокого порядка, включающего некоторые задачи теории фильтрации.

Ключевые слова: полугруппы операторов, уравнения соболевского типа, локально выпуклые пространства.

Введение

Пусть $\mathscr{U}$ и $\mathscr{F}$ — отделимые секвенциально полные локально выпуклые линейные топологические пространства, $\mathscr{L}(\mathscr{U};\mathscr{F})$ — пространство линейных непрерывных, а $\mathscr{Cl}(\mathscr{U};\mathscr{F})$ — множество линейных замкнутых плотно определенных операторов. Пусть $L \in \mathscr{L}(\mathscr{U};\mathscr{F})$, $M \in \mathscr{Cl}(\mathscr{U};\mathscr{F})$. Рассмотрим задачу Коши

$$u(0) = u_0 \tag{0.1}$$

для операторно-дифференциального уравнения

$$L\,\dot{u}(t) = Mu(t). \tag{0.2}$$

Если оператор L непрерывно обратим, то уравнение (0.2) можно редуцировать к паре эквивалентных ему уравнений

$$\dot{u}(t) = Su(t), \quad \dot{g}(t) = Tg(t), \tag{0.3}$$

где $S = L^{-1}M \in \mathscr{Cl}(\mathscr{U})$, $\operatorname{dom} S = \operatorname{dom} M$, $T = ML^{-1} \in \mathscr{Cl}(\mathscr{F})$, $\operatorname{dom} T = L[\operatorname{dom} M]$. Задачу Коши для уравнений вида (0.3) удобно исследовать в терминах теории полугрупп операторов. Сразу подчеркнем, что исходному уравнению (0.2) соответствуют два равносильных уравнения на разных пространствах и соответственно две полугруппы.

Равностепенно непрерывные полугруппы операторов в локально выпуклых пространствах исследовались в [1–3]. Одним из основных результатов классической теории полугрупп операторов является теорема Хилле — Иосиды о

Работа поддержана грантом для молодых ученых правительства Челябинской области и грантом Минобразования России (шифр PD02–1.1–82).

взаимно-однозначном соответствии между равностепенно непрерывными сильно непрерывными полугруппами и их инфинитезимальными генераторами [3]. Сформулируем ее в удобном для нас виде. Следуя [4], для краткости оператор $A \in \mathscr{C}l(\mathscr{V})$ будем называть *радиальным*, если выполняются условия:

(i) $\exists a \in \mathbb{R}\ (a, +\infty) \subset \rho(A)$;

(ii) равностепенно непрерывно семейство операторов

$$\{(\mu - a)^n (\mu I - A)^{-n} \in \mathscr{L}(\mathscr{V}) : \mu \in (a, +\infty),\ n \in \mathbb{N}\}.$$

Радиальность оператора A является необходимым и достаточным условием того, что он порождает равностепенно непрерывную сильно непрерывную полугруппу класса (C_0), т. е. является ее генератором.

Однако, как показывают простые примеры, в случае локально выпуклых пространств равностепенная непрерывность полугруппы не является таким же естественным условием, как в случае банаховых пространств, в частности, она не следует из сильной непрерывности полугруппы, чего нельзя сказать об условии локальной равностепенной непрерывности. Полугруппы, удовлетворяющие этому условию, рассматривались разными авторами. При этом было замечено, что даже в достаточно простых случаях резольвента генератора полугруппы может не существовать ни в одной точке. В работе [5] роль резольвенты в теореме о порождении локально равностепенно непрерывной полугруппы класса (C_0) играет достаточно сложное понятие обобщенной резольвенты. В. В. Иванов [6] и Оуши [7] использовали для характеризации порождающих операторов одинаковую, более прозрачную конструкцию, названную *n-резольвентой* [6] (позже — *квазирезольвентой* [8, 9]) и *асимптотической резольвентой* [7].

Сильно непрерывные полугруппы уравнения (0.2) в банаховых пространствах рассматривались в работах [10–13]. При этом было замечено, что характерной чертой полугруппы уравнения с вырожденным оператором при производной является наличие нетривиальных ядер у ее операторов. Другими словами, единицей полугруппы является не тождественный оператор, как в классической теории полугрупп операторов, а проектор на некоторое подпространство. Такие полугруппы мы в дальнейшем будем называть *вырожденными*, либо *полугруппами операторов с ядрами.*

Надо заметить, что различные авторы используют различные подходы при исследовании сильно непрерывных полугрупп уравнения (0.2). В [10, 13] используется теория многозначных линейных операторов для получения достаточных условий существования полугруппы уравнения (0.2). И. В. Мельниковой и М. А. Альшанским [11] теорема Хилле — Иосиды обобщена на случай полугрупп уравнения (0.2) с использованием понятия равномерной корректности задачи Коши.

Методы автора этой работы наследуют и обобщают методы, использованные в работах Г. А. Свиридюка [12, 14]. Достоинством такого подхода можно считать тот факт, что расщепление исходного пространства в прямую сумму изначально не предполагается, оно следует из условий на относительные p-резольвенты. Кроме того, в отличие от работ [10–13] в данной работе полугруппа уравнения (0.2) вырождается не только на ядре оператора L, но и на его M-корневом линеале, который состоит из M-присоединенных векторов высоты не больше p.

Полугруппы уравнения (0.2) в локально выпуклых пространствах, по-видимому, ранее не рассматривались. Цель данной работы — исследовать равностепенно непрерывные сильно непрерывные вырожденные полугруппы, сделав тем самым первый шаг на пути к рассмотрению локально равностепенно непрерывных полугрупп уравнения (0.2). Для этого пришлось обобщить введенное ранее для банаховых пространств понятие (L,p)-радиального [4, 15] оператора на основе условия радиальности, определенного выше. Первые шаги в этом направлении были сделаны в работе [16]. В данной работе результаты [16] получили свое логическое продолжение.

В § 1 введено понятие (L,p)-радиального оператора в локально выпуклых пространствах и изложены вспомогательные сведения, доказанные ранее в [4, 14]. Кроме того, при условии (L,p)-радиальности оператора M в § 2 с помощью аппроксимаций типа Хилле — Уиддера — Поста построена сильно непрерывная полугруппа уравнения (0.2), вырождающаяся на собственных и M-присоединенных векторах оператора L высоты не больше p. Однако полугруппа определена лишь на подпространстве $\widetilde{\mathscr{U}} = \mathscr{U}^0 \oplus \mathscr{U}^1$. При этом $\mathscr{U}^0$ является ядром полугруппы, а ее сужение на $\mathscr{U}^1$ — полугруппой класса (C_0).

Актуальна задача изучения фазового пространства уравнения (0.2), т. е. замыкания множества допустимых начальных значений задачи (0.1), (0.2), поскольку давно замечено, что такие начальные значения заполняют всего лишь некоторое подпространство исходного пространства. В § 3 при условии (L,p)-радиальности оператора M показано, что фазовое пространство уравнения (0.2) совпадает с образом его полугруппы. Заметим, что ранее аналогичный результат даже в случае банаховых пространств был получен при более жестких условиях на операторы L, M [4]. Здесь же развиты и усовершенствованы идеи работы [17].

В § 4 введены дополнительные условия сильной (L,p)-радиальности оператора M справа и слева, достаточные для совпадения соответственно $\mathscr{U} = \mathscr{U}^0 \oplus \mathscr{U}^1$ и $\mathscr{F} = \mathscr{F}^0 \oplus \mathscr{F}^1$ и поэтому достаточные для того, чтобы полугруппа была задана на всем пространстве. В полурефлексивных локально выпуклых пространствах это выполняется уже при условии (L,p)-радиальности оператора M. Идея использования рефлексивности пространства в банаховом случае с $p = 0$ восходит к работе [10], после чего она была использована автором в [4]. Инфинитезимальные генераторы сужений построенных полугрупп на их образы найдены в § 5.

В § 6 сформулированы пять условий в терминах сильно непрерывных полугрупп, необходимых и достаточных для сильной (L,p)-радиальности оператора M. Этот результат совпадает с теоремой Хилле — Иосиды при $L = I$ и поэтому является ее обобщением на случай вырожденных полугрупп. Здесь же установлен тот факт, что в полурефлексивном пространстве (L,p)-радиальность оператора эквивалентна его сильной (L,p)-радиальности справа и слева.

В § 7 полученные абстрактные результаты применяются для исследования класса начально-краевых задач для уравнений в частных производных высокого порядка, включающего в себя некоторые задачи теории фильтрации.

§ 1. Относительно p-радиальный оператор

Напомним, что локально выпуклые пространства $\mathscr{U}$ и $\mathscr{F}$ секвенциально полны, оператор L принадлежит $\mathscr{L}(\mathscr{U};\mathscr{F})$, а оператор $M \in \mathscr{C}l(\mathscr{U};\mathscr{F})$ задан на линеале $\operatorname{dom} M$. В дальнейшем от пространств $\mathscr{U}$ и $\mathscr{F}$ будем требовать также, чтобы для отображений из $\mathscr{F}$ в $\mathscr{U}$ выполнялась теорема о замкнутом графике. Например, пространство $\mathscr{U}$ может быть бочечным, а $\mathscr{F}$ — совершенно полным [18]. (См. по этому поводу также приложение Д. А. Райкова к [18], работы [19, 20] и ссылки в них.)

Опущенные доказательства утверждений этого параграфа можно найти в [4].

Введем обозначения $\rho^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathscr{L}(\mathscr{F}; \mathscr{U})\}$,

$$R^L_\mu(M) = (\mu L - M)^{-1} L, \quad L^L_\mu(M) = L(\mu L - M)^{-1},$$

$$R^L_{(\lambda,p)}(M) = \prod_{k=0}^{p} R^L_{\lambda_k}(M), \quad L^L_{(\lambda,p)}(M) = \prod_{k=0}^{p} L^L_{\lambda_k}(M).$$

Последние два оператора называются *правой* и *левой* (L,p)*-резольвентами*. В дальнейших рассмотрениях нам понадобятся тождества

$$(\mu - \lambda)(\lambda L - M)^{-1} L(\mu L - M)^{-1} = (\lambda L - M)^{-1} - (\mu L - M)^{-1}, \tag{1.1}$$

$$L(\mu L - M)^{-1} M u = M(\mu L - M)^{-1} L u, \quad u \in \operatorname{dom} M. \tag{1.2}$$

Пусть $\ker L \neq \{0\}$, вектор $\varphi_0 \in \ker L \setminus \{0\}$ будем называть *собственным вектором* оператора L. Упорядоченное множество векторов $\{\varphi_0, \varphi_1, \dots\}$ называется *цепочкой* M*-присоединенных векторов* собственного вектора φ_0, если

$$L\varphi_{k+1} = M\varphi_k, \quad k = 0, 1, \dots, \ \varphi_l \notin \ker L, \ l = 1, 2, \dots .$$

Порядковый номер вектора в цепочке начиная с нуля будем называть его *высотой*, а собственные векторы — M*-присоединенными высоты* 0.

Лемма 1.1. *Вектор $\varphi \neq 0$ является M-присоединенным вектором высоты не больше l оператора L тогда и только тогда, когда $\big(R^L_\mu(M)\big)^{l+1}\varphi = 0$.*

Лемма 1.2. *Пусть $\lambda = (\lambda_0, \dots, \lambda_p)$, $\mu = (\mu_0, \dots, \mu_p) \in (\rho^L(M))^{p+1}$, тогда*

(i) $\ker R^L_{(\lambda,p)}(M)$ *есть линейная оболочка множества M-присоединенных высоты, не большей p, векторов оператора L,* $\operatorname{im} R^L_{(\lambda,p)}(M) = \operatorname{im} R^L_{(\mu,p)}(M)$*;*

(ii) *справедливы равенства* $\ker L^L_{(\lambda,p)}(M) = \big\{M\varphi : \varphi \in \ker R^L_{(\lambda,p)}(M) \cap \operatorname{dom} M\big\}$, $\operatorname{im} L^L_{(\lambda,p)}(M) = \operatorname{im} L^L_{(\mu,p)}(M)$.

Обозначим через $\mathscr{U}^0$ ($\mathscr{F}^0$) ядро $\ker R^L_{(\mu,p)}(M)$ $\big(\ker L^L_{(\mu,p)}(M)\big)$, через L_0 (M_0) — сужение оператора L (M) на $\mathscr{U}^0$ ($\operatorname{dom} M_0 = \mathscr{U}^0 \cap \operatorname{dom} M$). Очевидно, что $L_0 : \mathscr{U}^0 \to \mathscr{F}^0$, $M_0 : \operatorname{dom} M_0 \to \mathscr{F}^0$.

Будем говорить, что семейство операторов $\{\Phi(x) \in \mathscr{L}(\mathscr{V}; \mathscr{W}) : x \in X\}$ (X — некоторое множество индексов, $\mathscr{V}, \mathscr{W}$ — локально выпуклые пространства) *равностепенно непрерывно* относительно значений параметра x, если для любой непрерывной на $\mathscr{W}$ полунормы $r(\cdot)$ существует непрерывная на $\mathscr{V}$ полунорма $q(\cdot)$ такая, что $r(\Phi(x)v) \leq q(v)$ для всех $x \in X$, $v \in \mathscr{V}$.

При $a \in \mathbb{R}$ обозначим $\mathbb{R}_{a,+} = (a, +\infty)$, $\mathbb{N}_a = \mathbb{N} \cap \mathbb{R}_{a,+}$.

Определение 1.1. *Слабо* (L,p)*-радиальным* оператором будем называть оператор M, для которого выполняются условия:

(i) $\exists a \in \mathbb{R}\ \mathbb{R}_{a,+} \subset \rho^L(M)$;

(ii) равностепенно непрерывны семейства операторов

$$\left\{R^L_{(m,p)}(M) \prod_{k=0}^{p} (m_k - a) : m = (m_0, \dots, m_p) \in \mathbb{R}^{p+1}_{a,+}\right\},$$

$$\left\{L^L_{(m,p)}(M)\prod_{k=0}^{p}(m_k-a) : m=(m_0,\dots,m_p)\in\mathbb{R}^{p+1}_{a,+}\right\}.$$

Замечание 1.1. Определение 1.1 обобщает аналогичное определение в случае банаховых пространств [4].

Обозначим через $\mathscr{U}^1(\mathscr{F}^1)$ замыкание линеала $\operatorname{im} R^L_{(\mu,p)}(M)\big(\operatorname{im} L^L_{(\mu,p)}(M)\big)$ в топологии пространства $\mathscr{U}(\mathscr{F})$, а через $\widetilde{\mathscr{U}}(\widetilde{\mathscr{F}})$ — замыкание линеала $\mathscr{U}^0\dot{+}\operatorname{im} R^L_{(\mu,p)}(M)$ $\big(\mathscr{F}^0\dot{+}\operatorname{im} L^L_{(\mu,p)}(M)\big)$.

Лемма 1.3. *Пусть оператор M слабо (L,p)-радиален. Тогда*

(i) *длины всех цепочек M-присоединенных векторов оператора L ограничены числом p;*

(ii) $\ker R^L_{(\mu,p)}(M)\cap\operatorname{im} R^L_{(\mu,p)}(M)=\{0\}$, $\ker L^L_{(\mu,p)}(M)\cap\operatorname{im} L^L_{(\mu,p)}(M)=\{0\}$;

(iii) *существует оператор* $M_0^{-1}\in\mathscr{L}(\mathscr{F}^0;\mathscr{U}^0)$;

(iv) $H=M_0^{-1}L_0$, $J=L_0M_0^{-1}$ *нильпотентны степени не больше p;*

(v) $\widetilde{P}u=\lim\limits_{n\to\infty}\big(nR^L_n(M)\big)^{p+1}u=u\ \ \forall u\in\mathscr{U}^1$, $\widetilde{Q}f=\lim\limits_{n\to\infty}(nL^L_n(M))^{p+1}f=f$ $\forall f\in\mathscr{F}^1$;

(vi) $\widetilde{\mathscr{U}}=\mathscr{U}^0\oplus\mathscr{U}^1$, $\widetilde{\mathscr{F}}=\mathscr{F}^0\oplus\mathscr{F}^1$.

Замечание 1.2. Теорема о замкнутом графике используется при доказательстве непрерывности оператора M_0^{-1}.

Замечание 1.3. Проекторами, соответствующими расщеплению пространств $\widetilde{\mathscr{U}}$ и $\widetilde{\mathscr{F}}$, являются операторы $\widetilde{P}$ и $\widetilde{Q}$ соответственно.

Обозначим через $\mathscr{U}^k(\mathscr{F}^k)$, $k=2,3,\dots$, замыкание линеала $\operatorname{im} R^L_{(\mu,p+k-1)}(M)$ $\big(\operatorname{im} L^L_{(\mu,p+k-1)}(M)\big)$ в топологии пространства $\mathscr{U}(\mathscr{F})$.

Лемма 1.4. *Пусть оператор M слабо (L,p)-радиален. Тогда $\mathscr{U}^k=\mathscr{U}^1$, $\mathscr{F}^k=\mathscr{F}^1$, $k=2,3,\dots$.*

Доказательство. Очевидно, что $\mathscr{U}^k\subset\mathscr{U}^1$. Возьмем $u\in\mathscr{U}^1$, тогда существует направленность $\{u_\alpha\}\subset\operatorname{im} R^L_{(\mu,p)}(M)$, сходящаяся к u. Здесь α берется из направленного по возрастанию множества $\mathscr{B}$. Построим направленное по возрастанию множество $\mathscr{B}_1=\mathscr{B}\times\mathbb{N}$, задав на нем отношение частичного порядка: $(\alpha_1,n_1)\ge(\alpha_2,n_2)$, если $\alpha_1\ge\alpha_2$, $n_1\ge n_2$. Рассмотрим направленность $\big\{v_{\alpha,n}=\big(nR^L_n(M)\big)^{m(p+1)}u_\alpha\big\}$, которая в силу леммы 1.2 при достаточно большом $m\in\mathbb{N}$ лежит в $\operatorname{im}\big(R^L_\mu(M)\big)^{p+k}$. Так как

$$\begin{aligned}r(v_{\alpha,n}-u)&\le r\Big(\big(nR^L_n(M)\big)^{m(p+1)}(u_\alpha-u)\Big)\\&\qquad+\sum_{l=1}^{m}r\Big(\big(nR^L_n(M)\big)^{(l-1)(p+1)}\Big(\big(nR^L_n(M)\big)^{p+1}u-u\Big)\Big)\\&\le(1-a/n_1)^{-m(p+1)}q(u_\alpha-u)+\sum_{l=1}^{m}(1-a/n_1)^{(1-l)(p+1)}q\Big(\big(nR^L_n(M)\big)^{p+1}u-u\Big),\end{aligned}$$

$n_1=\min\mathbb{N}_a$, то в силу леммы 1.3(v) получаем включение $\mathscr{U}^1\subset\mathscr{U}^k$.

Лемма 1.5. *Пусть оператор M слабо (L,p)-радиален. Тогда семейство операторов $\{n^{-p}(nL-M)^{-1} : n \in \mathbb{R}_{\varepsilon|a|,+}\}$, $\varepsilon > 1$, равностепенно непрерывно.*

Доказательство. Возьмем $n_1 = \frac{(1+\varepsilon)|a|}{2}$. Согласно тождеству (1.1) имеем $(nL-M)^{-1} = (n_1L-M)^{-1} + (n_1-n)R^L_n(M)(n_1L-M)^{-1}$. По индукции получим

$$(nL-M)^{-1} = \sum_{k=0}^{p}(n_1-n)^k\big(R^L_{n_1}(M)\big)^k(n_1L-M)^{-1} \\ + (n_1-n)^{p+1}R^L_n(M)\big(R^L_{n_1}(M)\big)^p(n_1L-M)^{-1}.$$

Из слабой (L,p)-радиальности оператора M следует, что при всех $n > n_1$ для любой непрерывной в $\mathscr{U}$ полунормы $q(\cdot)$ существуют непрерывные в $\mathscr{F}$ полунормы $r_k(\cdot)$, $k = 0,1,\dots,p+1$,

$$q(n^{-p}(nL-M)^{-1}f) \leq \sum_{k=0}^{p} n^{k-p}\left(1-\frac{n_1}{n}\right)^k q\big(\big(R^L_{n_1}(M)\big)^k(n_1L-M)^{-1}f\big)$$

$$+(-1)^{p+1}(n_1-a)^{-p}\left(\frac{n-n_1}{n-a}\right)\left(1-\frac{n_1}{n}\right)^p q_1((n_1L-M)^{-1}f) \leq \sum_{k=0}^{p+1} c_k r_k(f) = r(f).$$

Понятно, что $r(\cdot)$ — непрерывная в $\mathscr{F}$ полунорма.

§ 2. Разрешающие полугруппы операторов

Наряду с (0.2) рассмотрим эквивалентные ему уравнения

$$R^L_\alpha(M)\dot{u} = (\alpha L - M)^{-1}Mu, \tag{2.1}$$

$$L^L_\alpha(M)\dot{f} = M(\alpha L - M)^{-1}f \tag{2.2}$$

как конкретные интерпретации уравнения

$$A\dot{v} = Bv, \tag{2.3}$$

где $A \in \mathscr{L}(\mathscr{V},\mathscr{W})$, $B \in \mathscr{C}l(\mathscr{V},\mathscr{W})$, $\mathscr{V}$, $\mathscr{W}$ — секвенциально полные локально выпуклые линейные топологические пространства.

Решением уравнения (2.3) назовем функцию $v(\cdot) \in C^1(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathscr{V})$, удовлетворяющую (2.3) при $t \geq 0$.

Определение 2.1. Отображение $V(\cdot) : \overline{\mathbb{R}}_+ \to \mathscr{L}(\mathscr{V})$ называется *разрешающей полугруппой* уравнения (2.3), если

(i) $V(s)V(t)v = V(s+t)v$ для любых $s,t \geq 0$ и любого v из $\mathscr{V}$;

(ii) $v(t) = V(t)v$ есть решение уравнения (2.3) для любого v из плотного в $\mathscr{V}$ линеала.

Полугруппу операторов будем называть *экспоненциально ограниченной* с константой $\omega \in \mathbb{R}$, если семейство операторов $\{e^{-\omega t}V(t) : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$ равностепенно непрерывно.

Определение 2.2. Оператор M *(L,p)-радиален*, если

(i) $\exists a \in \mathbb{R}\ \mathbb{R}_{a,+} \subset \rho^L(M)$;

(ii) равностепенно непрерывны семейства операторов

$$\left\{\left(R^L_{(m,p)}(M)\prod_{k=0}^{p}(m_k-a)\right)^n : m = (m_0,\dots,m_p) \in \mathbb{R}^{p+1}_{a,+},\ n \in \mathbb{N}\right\},$$

$$\left\{\left(L^L_{(m,p)}(M)\prod_{k=0}^{p}(m_k-a)\right)^n : m=(m_0,\dots,m_p)\in\mathbb{R}^{p+1}_{a,+},\ n\in\mathbb{N}\right\}.$$

Замечание 2.1. Определение 2.2 обобщает аналогичное определение в случае банаховых пространств [4].

Замечание 2.2. Если существует оператор $L^{-1}\in\mathscr{L}(\mathscr{F};\mathscr{U})$, а оператор $L^{-1}M$ радиален (или, что равносильно, радиален оператор ML^{-1}), то оператор M (L,p)-радиален. При $p=0$ справедливо и обратное.

Замечание 2.3. Понятно, что из (L,p)-радиальности оператора M следует его слабая (L,p)-радиальность.

Теорема 2.1. *Пусть оператор M (L,p)-радиален. Тогда существует экспоненциально ограниченная с константой a сильно непрерывная разрешающая полугруппа уравнения* (2.1) (*соответственно* (2.2)), *рассматриваемого на подпространстве $\widetilde{\mathscr{U}}$ ($\widetilde{\mathscr{F}}$).*

Доказательство. Рассмотрим аппроксимации типа Хилле — Уиддера — Поста, под которыми будем подразумевать следующие операторы при $t>0$, $k\in\mathbb{N}_{\frac{at}{p+1}}$:

$$U^t_k=\left(\left(L-\frac{t}{k(p+1)}M\right)^{-1}L\right)^{k(p+1)}=\left(\frac{k(p+1)}{t}R^L_{\frac{k(p+1)}{t}}(M)\right)^{k(p+1)},$$

$$F^t_k=\left(L\left(L-\frac{t}{k(p+1)}M\right)^{-1}\right)^{k(p+1)}=\left(\frac{k(p+1)}{t}L^L_{\frac{k(p+1)}{t}}(M)\right)^{k(p+1)}.$$

Вследствие (L,p)-радиальности оператора M получим

$$r\big(U^t_k u\big)\le\left(1+\frac{at}{k(p+1)-at}\right)^{k(p+1)}q(u)\quad\forall t>0,\ \forall k\in\mathbb{N}_{\frac{at}{p+1}}. \tag{2.4}$$

В случае $a\le 0$ имеем равностепенную непрерывность семейства аппроксимаций $\left\{U^t_k : t\ge 0,\ k\in\mathbb{N}_{\frac{at}{p+1}}\right\}$. В случае $a>0$ ситуация сложнее, поэтому мы рассмотрим его, а предыдущий случай можно доказать аналогичным образом с меньшими усилиями. Итак, при $a>0$

$$\left(1+\frac{at}{k(p+1)-at}\right)^{k(p+1)}\le e^{at}\exp\left(\frac{a^2t^2}{k(p+1)-at}\right).$$

Отсюда

$$r(U^t_k u)\le q_T(u)\quad\forall t\in(0,T],\ \forall k\in\mathbb{N}_{\frac{aT}{p+1}}. \tag{2.5}$$

Здесь $q_T(\cdot)=e^{aT}\exp\big(\frac{a^2T^2}{k_1(p+1)-aT}\big)q(\cdot)$, $k_1=\min\mathbb{N}_{\frac{aT}{p+1}}$.

Так же, как для обычных резольвент, легко показать, что

$$\frac{d}{d\mu}\big(\big(R^L_\mu(M)\big)^n u\big)=-n\big(R^L_\mu(M)\big)^{n+1}u.$$

Возьмем $u\in\mathscr{U}$. Тогда

$$\frac{d}{dt}U^t_k u=\left(\frac{k(p+1)}{t}\right)^{k(p+1)-1}(k(p+1))^2(-t^{-2})\big(R^L_{\frac{k(p+1)}{t}}(M)\big)^{k(p+1)}u$$
$$+\left(\frac{k(p+1)}{t}\right)^{k(p+1)}(k(p+1))^2t^{-2}\big(R^L_{\frac{k(p+1)}{t}}(M)\big)^{k(p+1)+1}u$$
$$=\frac{k(p+1)}{t}\left(\frac{k(p+1)}{t}L-M\right)^{-1}MU^t_k u.$$

Пусть $u \in \operatorname{im} R^L_{(\mu,p)}(M)$, т. е. $u = \big(R^L_\beta(M)\big)^{p+1} v$ при некоторых $\beta > a$ и $v \in \mathscr{U}$. Докажем, что тогда $\lim\limits_{t\to 0+} U^t_k u = u$. Сделаем замену $\mu = k(p+1)t^{-1}$ и, как и при доказательстве леммы 1.4, получим

$$\lim_{t\to 0+} r\big(U^t_k u - u\big) = \lim_{\mu\to+\infty} r\Big(\big(\mu R^L_\mu(M)\big)^{k(p+1)} u - u\Big)$$
$$\leq \lim_{\mu\to+\infty} r\left(\sum_{m=0}^{k-1} \big(\mu R^L_\mu(M)\big)^{m(p+1)} \Big(\big(\mu R^L_\mu(M)\big)^{p+1} u - u\Big)\right)$$
$$\leq \lim_{\mu\to+\infty} kq\Big(\big(\mu R^L_\mu(M)\big)^{p+1} u - u\Big) = 0. \quad (2.6)$$

Из (2.5) следует равностепенная непрерывность семейства операторов

$$\left\{U^t_k = \left(\frac{k(p+1)}{t} R^L_{\frac{k(p+1)}{t}}(M)\right)^{k(p+1)} : t \in (0,1]\right\},$$

поэтому по непрерывности мы можем доопределить $U^0_k u = u$ для всех $u \in \mathscr{U}^1$.

Теперь при $u = \big(R^L_\beta(M)\big)^{p+1} v$ рассмотрим разность

$$U^t_k u - U^t_l u = \int_0^t \frac{d}{ds}\Big(U^{t-s}_l U^s_k \big(R^L_\beta(M)\big)^{p+1} v\Big)\, ds$$
$$= (p+1)\int_0^t U^{t-s}_l U^s_k \left(\frac{k}{s} R^L_{\frac{k(p+1)}{s}}(M) - \frac{l}{t-s} R^L_{\frac{l(p+1)}{t-s}}(M)\right)\big(R^L_\beta(M)\big)^p w_1\, ds$$
$$= \int_0^t U^{t-s}_l U^s_k \Big(R^L_{\frac{k(p+1)}{s}}(M) - R^L_{\frac{l(p+1)}{t-s}}(M)\Big)\big(R^L_\beta(M)\big)^{p-1} w_2\, ds$$
$$= \int_0^t \left(\frac{l(p+1)}{t-s} - \frac{k(p+1)}{s}\right) R^L_{\frac{k(p+1)}{s}}(M) R^L_{\frac{l(p+1)}{t-s}}(M)\big(R^L_\beta(M)\big)^{p-1} U^{t-s}_l U^s_k w_2\, ds.$$

Здесь мы пользуемся обозначением $w_k = ((\beta L - M)^{-1}M)^k v = \big(\beta R^L_\beta(M) - I\big)^k v$. Из последних равенств получим

$$r\big(U^t_k u - U^t_l u\big) \leq \int_0^t \left(\frac{1}{\frac{l(p+1)}{t-s} - a} + \frac{1}{\frac{k(p+1)}{s} - a}\right)(\beta - a)^{1-p} q_T(w_2)\, ds$$
$$\leq \frac{T^2}{2}\left(\frac{1}{l(p+1) - aT} + \frac{1}{k(p+1) - aT}\right)(\beta - a)^{1-p} q_T(w_2). \quad (2.7)$$

С учетом (2.5) и плотности $\operatorname{im} R^L_{(\mu,p)}(M)$ в $\mathscr{U}^1$ (2.7) означает существование равномерного по $t \in (0,T]$ предела $s\text{-}\lim\limits_{k\to\infty} U^t_k = U(t) \in \mathscr{L}(\widetilde{\mathscr{U}})$. Определим оператор $U(0)$ по непрерывности, используя равномерную по t сходимость

$$U(0)u = \lim_{t\to 0+} U(t)u = \lim_{t\to 0+}\lim_{k\to\infty} U^t_k u = \lim_{k\to\infty}\lim_{t\to 0+} U^t_k u = \lim_{k\to\infty} U^0_k u = \widetilde{P}.$$

Это следует из (2.6) и того, что ядра операторов $U(t)$ содержат подпространство $\mathscr{U}^0$. Кроме того, подчеркнем, что семейство операторов $\{U(t) : t \geq 0\}$ сильно непрерывно.

Из (2.4) получим экспоненциальную ограниченность с показателем a семейства $\{U(t) : t \geq 0\}$, устремив $k \to \infty$.

Очевидно, что

$$U^t_{kl} = \left(\left(L - \frac{t}{kl(p+1)}M\right)^{-1} L\right)^{(p+1)kl} = \big(U_l^{tk^{-1}}\big)^k. \tag{2.8}$$

Покажем, что $\lim\limits_{l\to+\infty}\big(U_l^{tk^{-1}}\big)^k = \big(U(tk^{-1})\big)^k$. При $u \in \widetilde{\mathscr{U}}$

$$\begin{aligned} r\big(\big(U_l^{tk^{-1}}\big)^k u - (U(tk^{-1}))^k u\big) \\ = r\left(\sum_{m=0}^{k-1}\big(U_l^{tk^{-1}}\big)^{k-m-1}(U(tk^{-1}))^m\big(U_l^{tk^{-1}} - U(tk^{-1})\big)u\right) \\ \leq kq\big(U_l^{tk^{-1}}u - U(tk^{-1})u\big). \end{aligned}$$

Устремив в (2.8) $l \to \infty$, получим $U(t) = (U(tk^{-1}))^k$. Теперь докажем, что $\{U(t) : t \geq 0\}$ — полугруппа. Для $t, s \geq 0$ возьмем последовательности рациональных чисел $t_n = \frac{t_{1,n}}{t_{2,n}} \to t$, $s_n = \frac{s_{1,n}}{s_{2,n}} \to s$ при $n \to \infty$. Тогда

$$\begin{aligned} U(t)U(s) = \lim_{n\to\infty} U\left(\frac{t_{n,1}}{t_{n,2}}\right)U\left(\frac{s_{n,1}}{s_{n,2}}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(U\left(\frac{1}{t_{n,2}s_{n,2}}\right)\right)^{t_{n,1}s_{n,2}+s_{n,1}t_{n,2}} \\ = \lim_{n\to\infty} U\left(\frac{t_{n,1}s_{n,2}+s_{n,1}t_{n,2}}{t_{n,2}s_{n,2}}\right) = U(t+s). \end{aligned}$$

Далее, пусть $k_1 = \min \mathbb{N}_{\frac{aT}{p+1}}$, $u = \big(R^L_\beta(M)\big)^{k_1(p+1)+1}v$ при некоторых $\beta > a$ и $v \in \mathscr{U}$. Тогда в силу (2.7)

$$r\big(U^t_{k_1}u - U(t)u\big) \leq \frac{t^2(\beta-a)^{1-p}}{2(k_1(p+1)-aT)}q_T\big(\big(R^L_\beta(M)\big)^{(k_1-1)(p+1)+1}w_2\big),$$

$$\begin{aligned} U^t_{k_1}u = \left(\frac{k_1(p+1)}{t}\right)^{k_1(p+1)}\left(R^L_{\frac{k_1(p+1)}{t}}(M)\right)^{k_1(p+1)}u \\ = u + \sum_{n=0}^{k_1-1}\sum_{k=1}^{p+1} C^{n(p+1)+k}_{k_1(p+1)}\big(R^L_{\frac{k_1(p+1)}{t}}(M)\big)^{n(p+1)+k}\big(R^L_\beta(M)\big)^{(k_1-n)(p+1)-k+1}w_{n(p+1)+k} \\ = u + k_1(p+1)R^L_{\frac{k_1(p+1)}{t}}(M)\big(R^L_\beta(M)\big)^{k_1(p+1)}w_1 + S(t). \end{aligned} \tag{2.9}$$

Здесь векторы w_k те же, что и раньше. Второе слагаемое в (2.9) можно представить в виде

$$t\big(R^L_\beta(M)\big)^{k_1(p+1)}w_1 + tR^L_{\frac{k_1(p+1)}{t}}(M)\big(R^L_\beta(M)\big)^{k_1(p+1)-1}w_2.$$

Из определения (L,p)-радиальности следует, что

$$\begin{aligned} r\left(\frac{1}{t}\big(tR^L_{\frac{k_1(p+1)}{t}}(M)\big(R^L_\beta(M)\big)^{k_1(p+1)-1}w_2 + S(t)\big)\right) \\ \leq \frac{\mathrm{tq}\big(\big(R^L_\beta(M)\big)^{(k_1-1)(p+1)}w_2\big)}{(k_1(p+1)-at)(\beta-a)^p} + \sum_{k=2}^{p+1} C^k_{k_1(p+1)}\frac{t^{k-1}q\big(\big(R^L_\beta(M)\big)^{(k_1-1)(p+1)+1}w_k\big)}{(k_1(p+1)-at)^k(\beta-a)^{p+1-k}} \\ + \sum_{n=1}^{k_1-1}\sum_{k=1}^{p+1} C^{n(p+1)+k}_{k_1(p+1)}\frac{t^{n(p+1)+k-1}q\big(\big(R^L_\beta(M)\big)^{(k_1-n-1)(p+1)+1}w_{n(p+1)+k}\big)}{(k_1(p+1)-at)^{n(p+1)+k}(\beta-a)^{p+1-k}} = o(t) \end{aligned}$$

при $t \to 0+$. Поэтому

$$r\biggl(\frac{1}{t}(U(t)-I)u - \bigl(R^L_\beta(M)\bigr)^{k_1(p+1)}w_1\biggr) \\ \le r\biggl(\frac{1}{t}\bigl(U^t_{k_1}-I\bigr)u - \bigl(R^L_\beta(M)\bigr)^{k_1(p+1)}w_1\biggr) + r\biggl(\frac{1}{t}\bigl(U(t)-U^t_{k_1}\bigr)u\biggr) \\ \le o(t) + \frac{t(\beta-a)^{1-p}}{2(k_1(p+1)-aT)}q_T\bigl(\bigl(R^L_\beta(M)\bigr)^{(k_1-1)(p+1)+1}w_2\bigr).$$

Устремляем $t \to 0+$ и получаем дифференцируемость $U(t)u$ по t в нуле справа. Отсюда стандартным образом легко получить дифференцируемость полугруппы в любой точке $t_0 > 0$:

$$\frac{d}{dt}\bigg|_{t=t_0} U(t)\bigl(R^L_\beta(M)\bigr)^{k_1(p+1)+1}v = U(t_0)\bigl(R^L_\beta(M)\bigr)^{k_1(p+1)}(\beta L - M)^{-1}Mv. \quad (2.10)$$

Возьмем вектор u из плотного в пространстве $\widetilde{\mathscr{U}}$ согласно лемме 1.4 линеала $\operatorname{im}\bigl(R^L_\mu(M)\bigr)^{k_1(p+1)+1}\dot{+}\mathscr{U}^0$. Тогда

$$R^L_\alpha(M)\frac{d}{dt}(U(t)u) = R^L_\alpha(M)\frac{d}{dt}(U(t)\widetilde{P}u) \\ = R^L_\alpha(M)\frac{d}{dt}\bigl(U(t)\bigl(R^L_\beta(M)\bigr)^{k_1(p+1)+1}v\bigr) \\ = R^L_\alpha(M)U(t)\bigl(R^L_\beta(M)\bigr)^{k_1(p+1)}(\beta L - M)^{-1}Mv = (\alpha L - M)^{-1}MU(t)u.$$

Поэтому полугруппа $\{U(t) \in \mathscr{L}(\widetilde{\mathscr{U}}) : t \ge 0\}$ разрешает уравнение (2.1) на подпространстве $\widetilde{\mathscr{U}}$.

Полугруппа $F(t) = s\text{-}\lim\limits_{k\to\infty} F^t_k$ строится при помощи левых (L,p)-резольвент аналогичным образом.

Замечание 2.4. С помощью замены оператора M на $M - aL$ всегда можно перейти от рассмотрения экспоненциально ограниченной полугруппы операторов к равностепенно непрерывной (и наоборот).

Замечание 2.5. Полугруппы уравнений (0.2) и (2.1) совпадают.

§ 3. Фазовые пространства

Рассмотрим секвенциально полное локально выпуклое пространство $\mathscr{U}$ и функции $u : \mathbb{R} \to \mathscr{U}$, $w : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Их *сверткой* называется интеграл Римана $\int\limits_{\mathbb{R}} u(s)w(t-s)\,ds = u * w : \mathbb{R} \to \mathscr{U}$. Сразу отметим симметричность свертки: $u * w = \int\limits_{\mathbb{R}} w(s)u(t-s)\,ds = w * u$.

Нижний индекс «нуль» при обозначении функционального пространства будет обозначать финитность входящих в него функций.

Лемма 3.1. *Пусть $w \in C^m_0(\mathbb{R};\mathbb{C})$, $u \in C^n([a,b];\mathscr{U})$, $\operatorname{supp} u(t) \subset [a,b]$. Тогда функция $u * w$ принадлежит $C^{m+n}_0(\mathbb{R};\mathscr{U})$, причем $D^k(u*w) = u * D^k w$, $k \le m \in \{0\}\cup\mathbb{N}$, $D^l(u*w) = D^l u * w$, $l \le n \in \{0\}\cup\mathbb{N}$.*

Доказательство леммы стандартно.

Следуя [21], *аппроксимативной единицей* при $\alpha \to \alpha_0$ будем называть семейство неотрицательных функций $\{\Delta_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \alpha \in \mathscr{A}\}$ таких, что, во-первых, при любом $\alpha \in \mathscr{A}$

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \Delta_\alpha(s)\, ds = 1,$$

а во-вторых, для любой окрестности $\mathscr{O}$ нуля

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0} \int\limits_{\mathscr{O}} \Delta_\alpha(s)\, ds = 1.$$

Лемма 3.2. *Пусть функция $u : \mathbb{R} \to \mathscr{U}$ ограничена, $\mathscr{A} \subset \mathbb{R}$, $\alpha_0 \in \overline{\mathscr{A}}$, $\{\Delta_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \alpha \in \mathscr{A}\}$ — аппроксимативная единица при $\alpha \to \alpha_0$. Если при любом $\alpha \in \mathscr{A}$ свертка $u * \Delta_\alpha$ существует и функция $u(t)$ непрерывна на интервале (a, b), то $u * \Delta_\alpha(t)$ поточечно сходится к $u(t)$ на (a, b) при $\alpha \to \alpha_0$.*

Доказательство. Выберем произвольную непрерывную на $\mathscr{U}$ полунорму $q(\cdot)$. По условию $q(u(t)) \leq K_q$ при всех $t \in \mathbb{R}$. В силу непрерывности функции u для произвольных $t \in (a, b)$, $\varepsilon > 0$ можно подобрать $\gamma_q > 0$ такое, что при всех $s \in O_t^{\gamma_q} \subset (a, b)$ справедливо соотношение $q(u(t) - u(s)) < \varepsilon$. Здесь $O_t^{\gamma_q} = \{s \in \mathbb{R} : |s - t| < \gamma_q\}$. Используем симметричность свертки и для всех $t \in (a, b)$ получим

$$\begin{aligned} q(u * \Delta_\alpha(t) - u(t)) &= q\Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}} (u(t-s) - u(t))\Delta_\alpha(s)\, ds\Bigg) \\ &\leq \int\limits_{O_0^{\gamma_q}} q(u(t-s) - u(t))\Delta_\alpha(s)\, ds + \int\limits_{\mathbb{R}\setminus O_0^{\gamma_q}} q(u(t-s) - u(t))\Delta_\alpha(s)\, ds \\ &< \varepsilon \int\limits_{O_0^{\gamma_q}} \Delta_\alpha(s)\, ds + 2K_q \int\limits_{\mathbb{R}\setminus O_0^{\gamma_q}} \Delta_\alpha(s)\, ds \leq \varepsilon + 2K_q \int\limits_{\mathbb{R}\setminus O_0^{\gamma_q}} \Delta_\alpha(s)\, ds. \end{aligned}$$

Так как $\{\Delta_\alpha : \alpha \in \mathscr{A}\}$ — аппроксимативная единица, существует $\beta > 0$ такое, что при $\alpha \in O_{\alpha_0}^{\beta}$

$$\int\limits_{\mathbb{R}\setminus O_0^{\gamma_q}} \Delta_\alpha(s)\, ds < \frac{\varepsilon}{2K_q}.$$

Поэтому для таких α имеем $q(u * \Delta_\alpha(t) - u(t)) < 2\varepsilon$, что и требовалось.

Лемма 3.3. (i) *Если функция $u(\cdot) \in C([0, T]; \mathscr{U}) \cap C^1((0, T]; \mathscr{U})$ удовлетворяет уравнению (2.1) на интервале $(0, T]$, то при $\mu \in \rho^L(M)$*

$$\int\limits_0^t e^{-\mu\tau} u(\tau)\, d\tau = R_\mu^L(M)(u(0) - e^{-\mu t} u(t)); \tag{3.1}$$

(ii) *если функция $f(\cdot) \in C([0, T]; \mathscr{F}) \cap C^1((0, T]; \mathscr{F})$ удовлетворяет уравнению (2.2) на интервале $(0, T]$, то при $\mu \in \rho^L(M)$*

$$\int\limits_0^t e^{-\mu\tau} f(\tau)\, d\tau = L_\mu^L(M)(f(0) - e^{-\mu t} f(t)). \tag{3.2}$$

Доказательство. (i) Ввиду непрерывной дифференцируемости $u(t)$ при $t > 0$, интегрируя по частям, приходим к равенству

$$L\int\limits_{\varepsilon}^{t} e^{-\mu\tau}u(\tau)\,d\tau = -\frac{e^{-\mu\tau}}{\mu}Lu(\tau)\Big|_{\varepsilon}^{t} + \frac{1}{\mu}\int\limits_{\varepsilon}^{t} e^{-\mu\tau}Mu(\tau)\,d\tau.$$

Устремим $\varepsilon \to 0+$ и используем замкнутость оператора M, тогда

$$\mu L\int\limits_{0}^{t} e^{-\mu\tau}u(\tau)\,d\tau = -e^{-\mu t}Lu(t) + Lu(0) + M\int\limits_{0}^{t} e^{-\mu\tau}u(\tau)\,d\tau.$$

Если $\mu \in \rho^L(M)$, то получим требуемое.

(ii) В последнем тождестве положим $u(t) = (\alpha L - M)^{-1}f(t)$, $\alpha \in \rho^L(M)$. Если $\mu \in \rho^L(M)$, то

$$\int\limits_{0}^{t} e^{-\mu\tau}(\alpha L - M)^{-1}f(\tau)\,d\tau = (\alpha L - M)^{-1}\int\limits_{0}^{t} e^{-\mu\tau}f(\tau)\,d\tau$$
$$= (\alpha L - M)^{-1}L_{\mu}^{L}(M)(f(0) - e^{-\mu t}f(t)).$$

Отсюда следует утверждение (ii).

Лемма 3.4 [22]. *Пусть $\varphi(\cdot) \in L((0,T);\mathscr{U})$ и для любой непрерывной в пространстве $\mathscr{U}$ полунормы $q(\cdot)$*

$$\overline{\lim_{\mu\to+\infty}}\frac{\ln q\Big(\int\limits_0^T e^{\mu s}\varphi(s)\,ds\Big)}{\mu} \le h < T,$$

тогда $\varphi(s) = 0$ почти всюду на $[h,T]$.

Зафиксируем произвольное $T > 0$ и будем рассматривать уравнение (2.3) и его решения на отрезке $[0,T]$.

Определение 3.1. Замкнутое множество $\mathscr{P} \subset \mathscr{V}$ называется *фазовым пространством* уравнения (2.3), если

(i) $v(t) \in \mathscr{P}$ $\forall t \in [0,T]$;

(ii) для любого v_0 из некоторого плотного в $\mathscr{P}$ множества существует единственное решение задачи $v(0) = v_0$ для уравнения (2.3).

Теорема 3.1. *Пусть $T_1, T_2 \in \mathbb{R}$. Тогда для любой $u(\cdot) \in C^1((T_1,T_2);\mathscr{U})$ ($f(\cdot) \in C^1((T_1,T_2);\mathscr{F})$), удовлетворяющей уравнению (2.1) (соответственно (2.2)) на интервале (T_1,T_2), для всех $t \in (T_1,T_2)$ имеет место включение*

$$u(t) \in \overline{\bigcap_{s=0}^{\infty}\operatorname{im} R_{(\mu,s)}^{L}(M)} \quad \Big(f(t) \in \overline{\bigcap_{s=0}^{\infty}\operatorname{im} L_{(\mu,s)}^{L}(M)}\Big).$$

Доказательство. Пусть $u(\cdot) \in C^{\infty}((T_1,T_2);\mathscr{U})$ — решение уравнения (2.1). Тогда $R_{\alpha}^{L}(M)\dot{u} = (\alpha L - M)^{-1}Mu = \alpha R_{\alpha}^{L}(M)u - u$. Отсюда $u = R_{\alpha}^{L}(M)\big(\alpha - \frac{d}{dt}\big)u$. По индукции легко доказать, что при любом $k \in \mathbb{N}$

$$u = \big(R_{\alpha}^{L}(M)\big)^{k}\sum_{m=0}^{k}(-1)^{m}C_{k}^{m}\alpha^{k-m}\frac{d^{m}}{dt^{m}}u = \big(R_{\alpha}^{L}(M)\big)^{k}\Big(\alpha - \frac{d}{dt}\Big)^{k}u.$$

Следовательно, $u(t) \in \overline{\bigcap_{s=0}^{\infty} \operatorname{im} R_{(\mu,s)}^{L}(M)}$ $\forall t \in (T_1, T_2)$.

Рассмотрим функцию $\varphi(t) \in C_0^{\infty}(\mathbb{R};\mathbb{R})$, равную $ke^{-(1-t^2)^{-1}}$ при $|t| < 1$ и нулю при $|t| \geq 1$. Здесь $k = \left(\int\limits_{-1}^{1} e^{-(1-s^2)^{-1}}\, ds\right)^{-1}$. Нетрудно убедиться, что $\{\Delta_\alpha = \alpha^{-1}\varphi(\alpha^{-1}t) : \alpha > 0\}$ — аппроксимативная единица при $\alpha \to 0+$.

Доопределим решение $u(\cdot) \in C^1((T_1, T_2); \mathscr{U})$ за пределами отрезка $[T_1 + \varepsilon, T_2 - \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$, нулем на всей прямой. Возьмем $T > 0$ и настолько малое α, чтобы $\Delta_\alpha(s) = 0$ при $|s| \geq T$. Покажем, что свертки доопределенного решения уравнения (2.1) с функциями Δ_α будут решениями уравнения (2.1). Действительно,

$$L(u * \Delta_\alpha)_t = L\frac{d}{dt}\int\limits_{T_1-T}^{T_2+T} u(s)\Delta_\alpha(t-s)\, ds = L\frac{d}{dt}\int\limits_{t-T_2-T}^{t-T_1+T} \Delta_\alpha(s)u(t-s)\, ds$$
$$= L\Delta_\alpha(t - T_1 + T)u(T_1 - T) - L\Delta_\alpha(t - T_2 - T)u(T_2 + T)$$
$$+L\int\limits_{t-T_2-T}^{t-T_1+T} \Delta_\alpha(s)\frac{d}{dt}u(t-s)\, ds = \int\limits_{T_1-T}^{T_2+T} Mu(s)\Delta_\alpha(t-s)\, ds = M(u*\Delta_\alpha) \quad \text{при } t \in \mathbb{R}.$$

Все указанные свертки существуют в силу леммы 3.1 и приведенных тождеств.

Согласно лемме 3.1 $u * \Delta_\alpha \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}; \mathscr{U})$. Доопределенные нулем решения $u(\cdot)$ ограничены и непрерывны на $[T_1 + \varepsilon, T_2 - \varepsilon]$, поэтому по лемме 3.2 получаем, что бесконечно дифференцируемые решения $u * \Delta_\alpha$ на интервале $(T_1 + \varepsilon, T_2 - \varepsilon)$ поточечно стремятся к непрерывно дифференцируемому решению $u(\cdot)$ при $\alpha \to 0+$. Значит, множество $\{u(t) : t \in (T_1 + \varepsilon, T_2 - \varepsilon), u(\cdot)$ — решение из $C^{\infty}((T_1, T_2); \mathscr{U})\}$ плотно в $\{u(t) : t \in (T_1 + \varepsilon, T_2 - \varepsilon), u(\cdot)$ — решение из $C^1((T_1, T_2); \mathscr{U})\}$. Поэтому для решений из класса $C^1((T_1, T_2); \mathscr{U})$ также имеем $u(t) \in \overline{\bigcap_{s=0}^{\infty} \operatorname{im} R_{(\mu,s)}^{L}(M)}$ при $t \in (T_1, T_2)$ в силу произвольности ε.

Для решений уравнения (2.2) теорема доказывается аналогично.

Теорема 3.2. *Пусть оператор* M (L, p)*-радиален. Тогда* $\mathscr{U}^1$ $(\mathscr{F}^1)$ *есть фазовое пространство уравнения* (2.1) (*соответственно* (2.2)).

Доказательство. Включения и равенства

$$\overline{\bigcap_{s=0}^{\infty} \operatorname{im} R_{(\mu,s)}^{L}(M)} \subset \overline{\bigcap_{s=0}^{\infty} \overline{\operatorname{im} R_{(\mu,s)}^{L}(M)}} = \bigcap_{s=0}^{\infty} \overline{\operatorname{im} R_{(\mu,s)}^{L}(M)} = \mathscr{U}^1$$

следуют из леммы 1.4. Поэтому включения $u(t) \in \mathscr{U}^1$ при всех $t \in (0, T)$ выполняются в силу предыдущей теоремы. Принадлежность точек $u(0)$, $u(T)$ множеству $\mathscr{U}^1$ следует из его замкнутости и непрерывности решений в точках $t = 0$, $t = T$ по определению.

Установим единственность решения задачи Коши. Возьмем решение $u(t)$ уравнения (2.1). Из (3.1) для решения, удовлетворяющего условию $u(0) = 0$, при $t = T$ получим

$$R_\mu^L(M)u(T) = \int\limits_0^T e^{\mu(T-\tau)}u(\tau)\, d\tau = \int\limits_0^T e^{\mu s}u(T-s)\, ds.$$

Согласно лемме 1.5 для $\varphi(s) = u(T-s)$ и любой непрерывной в $\mathscr{U}$ полунормы $q(\cdot)$ существует непрерывная в $\mathscr{F}$ полунорма $r(\cdot)$ такая, что

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln q\left(\int\limits_0^T e^{ns}\varphi(s)\,ds\right)}{n} = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln q((nL-M)^{-1}Lu(T))}{n} \leq \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln n^p + \ln r(Lu(T))}{n} = 0.$$

Отсюда по лемме 3.4 $u(t) = 0$ п. в. на $[0,T]$. А так как $u(\cdot)$ — непрерывная функция, то $u(t) = 0$ при всех $t \in [0,T]$.

Отсюда получаем единственность задачи задачи Коши с любым начальным значением. Существование решения задачи Коши для уравнения (2.1) на плотном в $\mathscr{U}^1$ множестве $\operatorname{im}\bigl(R_n^L(M)\bigr)^{k_1(p+1)+1}$ следует из теоремы 2.1.

Для уравнения (2.2) теорема доказывается аналогично. При этом для доказательства единственности используется тождество (3.2).

Замечание 3.1. Ясно, что фазовым пространством уравнения (0.2) будет также $\mathscr{U}^1$.

Замечание 3.2. Из единственности решения задачи Коши следует единственность разрешающей полугруппы. Действительно, две разрешающие полугруппы, например, уравнения (2.1) должны совпадать на плотном множестве $\operatorname{im}\bigl(R_n^L(M)\bigr)^{k_1(p+1)+1} \dot{+} \mathscr{U}^0$, а значит, и на всем пространстве $\widetilde{\mathscr{U}}$. В частности, совпадают полугруппы, полученные аппроксимациями типа Иосиды [16] и аппроксимациями типа Хилле — Уиддера — Поста.

§ 4. Расщепление пространств

Определение 4.1. Оператор M называется *сильно (L,p)-радиальным справа* (*слева*), если он (L,p)-радиален и для любого $u \in \operatorname{dom} M$ и для любой непрерывной в $\mathscr{U}$ полунормы $r(\cdot)$ существует константа c_1, зависящая от u, такая, что

$$r\left((l-a)\prod_{k=0}^{p}(m_k-a)R^L_{(m,p)}(M)(lL-M)^{-1}Mu\right) \leq c_1(u),$$

соответственно для всех f из некоторого плотного в $\mathscr{F}$ линеала $\mathring{\mathscr{F}}$ и для любой непрерывной в $\mathscr{F}$ полунормы $r(\cdot)$ существует константа c_2, зависящая от f, такая, что

$$r\left((l-a)\prod_{k=0}^{p}(m_k-a)M(lL-M)^{-1}L^L_{(m,p)}(M)f\right) \leq c_2(f)$$

при любых $l, m_0, m_1, \ldots, m_p \in \mathbb{R}_{a,+}$.

Замечание 4.1. Определение 4.1 обобщает аналогичное определение в банаховых пространствах [4].

Замечание 4.2. Если оператор L непрерывно обратим, а $S = L^{-1}M$ радиален, то оператор M сильно (L,p)-радиален справа и слева.

Теорема 4.1. *Пусть оператор M сильно (L,p)-радиален справа (слева). Тогда $\mathscr{U}=\mathscr{U}^0\oplus\mathscr{U}^1$ ($\mathscr{F}=\mathscr{F}^0\oplus\mathscr{F}^1$).*

Доказательство. Пусть $u\in\operatorname{dom}M$. Тогда

$$\big(nR_n^L(M)\big)^{p+1}u-\big(lR_l^L(M)\big)^{p+1}u \\ =(l-n)\sum_{k=0}^{p}n^{p-k}l^k\big(R_n^L(M)\big)^{p+1-k}\big(R_l^L(M)\big)^k(lL-M)^{-1}Mu.$$

Отсюда

$$r\Big(\big(nR_n^L(M)\big)^{p+1}u-\big(lR_l^L(M)\big)^{p+1}u\Big) \\ \leq(1/n+1/l)c_1(u)\sum_{k=0}^{p}(1-a/n)^{k-p-1}(1-a/l)^{-k-1}\to 0$$

при $n,l\to\infty$ в силу определения 4.1. Поэтому существует предел

$$Pu=\lim_{n\to\infty}\big(nR_n^L(M)\big)^{p+1}u\quad\forall u\in\operatorname{dom}M.$$

Из того, что $\overline{\operatorname{dom}M}=\mathscr{U}$, а семейство операторов

$$\left\{\big(nR_n^L(M)\big)^{p+1}=\frac{1}{(1-a/n)^{p+1}}\big((n-a)R_n^L(M)\big)^{p+1}:n\in\mathbb{N}_{a+1}\right\}$$

равностепенно непрерывно, следует, что $P\in\mathscr{L}(\mathscr{U})$. Нетрудно убедиться, что P — проектор и $\mathscr{U}=\ker P\oplus\operatorname{im}P=\mathscr{U}^0\oplus\mathscr{U}^1$.

Утверждение теоремы о существовании проектора $Q=s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}\big(nL_n^L(M)\big)^{p+1}$ доказывается аналогично.

Покажем, что в полурефлексивных пространствах условия на операторы, достаточные для справедливости утверждения предыдущей теоремы, можно ослабить.

Теорема 4.2. *Пусть пространство $\mathscr{U}$ ($\mathscr{F}$) полурефлексивно, а оператор M слабо (L,p)-радиален. Тогда $\mathscr{U}=\mathscr{U}^0\oplus\mathscr{U}^1$ ($\mathscr{F}=\mathscr{F}^0\oplus\mathscr{F}^1$).*

Доказательство. Возьмем произвольный вектор $u\in\mathscr{U}$. Из слабой (L,p)-радиальности оператора M вытекает, что для любой непрерывной полунормы $q(\cdot)$ существует непрерывная на пространстве $\mathscr{U}$ полунорма $r(\cdot)$ такая, что для всех $k\in\mathbb{N}_a$

$$q\Big(\big((k-a)R_k^L(M)\big)^{p+1}u\Big)\leq r(u).$$

Таким образом, множество $\mathscr{A}_u=\big\{\big((k-a)R_k^L(M)\big)^{p+1}u:k\in\mathbb{N}_a\big\}\subset\mathscr{U}$ ограничено. Из полурефлексивности пространства $\mathscr{U}$ получаем, что множество $\mathscr{A}_u$ относительно компактно в слабой топологии [3]. Поэтому из $\mathscr{A}_u\subset\mathscr{U}^1$ мы можем выбрать слабо сходящуюся к некоторому вектору $v\in\mathscr{U}$ поднаправленность $\big\{\big((k_\alpha-a)R_{k_\alpha}^L(M)\big)^{p+1}u:\alpha\in\mathscr{B}\big\}$, где $\mathscr{B}$ — направленное по возрастанию множество, а $\{k_\alpha\}$ — поднаправленность последовательности $\mathbb{N}_a$. Из замкнутости линейного подпространства $\mathscr{U}^1$ следует его слабая замкнутость [3], поэтому $v\in\mathscr{U}^1$.

Пусть $v_\alpha=\big((k_\alpha-a)R_{k_\alpha}^L(M)\big)^{p+1}u-v$, тогда

$$w\text{-}\lim_{\alpha\in\mathscr{B}}v_\alpha=0. \tag{4.1}$$

Рассмотрим

$$s\text{-}\lim_{\alpha\in\mathscr{B}}\big(R^L_\mu(M)\big)^{p+1}v_\alpha = s\text{-}\lim_{\alpha\in\mathscr{B}}\big((k_\alpha - a)R^L_{k_\alpha}(M)\big)^{p+1}\big(R^L_\mu(M)\big)^{p+1}u - \big(R^L_\mu(M)\big)^{p+1}v = \big(R^L_\mu(M)\big)^{p+1}(u-v) \quad (4.2)$$

согласно лемме 1.3(v).

Для любого элемента сопряженного к $\mathscr{U}$ пространства $u' \in \mathscr{U}'$ имеем $u'\big((R^L_\mu(M))^{p+1}v_\alpha\big) = v'(v_\alpha)$, где $v' \in \mathscr{U}'$. Отсюда и в силу (4.1), (4.2)

$$w\text{-}\lim_{\alpha\in\mathscr{B}}\big(R^L_\mu(M)\big)^{p+1}v_\alpha = 0 = \big(R^L_\mu(M)\big)^{p+1}(u-v),$$

значит, $u - v \in \mathscr{U}^0$. Таким образом, для произвольного $u \in \mathscr{U}$ имеем $u = z + v$, где $z = u - v \in \mathscr{U}^0$, $v \in \mathscr{U}^1$.

Замечание 4.3. Ясно, что в условиях теорем 4.1 и 4.2 разрешающая полугруппа уравнения (2.1) ((2.2)) задана на всем пространстве $\mathscr{U}$ ($\mathscr{F}$), а ее единицей является проектор $P(Q)$.

Следствие 4.1. *Пусть выполняется одно из следующих двух условий:*
(a) *пространства $\mathscr{U}$ и $\mathscr{F}$ полурефлексивны, а оператор M (L,p)-радиален;*
(b) *оператор M сильно (L,p)-радиален справа и слева.*
Тогда
(i) $LPu = QLu\ \forall u \in \mathscr{U}$;
(ii) $\forall u \in \operatorname{dom} M\ Pu \in \operatorname{dom} M$ *и* $MPu = QMu$.

Доказательство. Соотношение

$$M\big(nR^L_n(M)\big)^{p+1}u = \big(nL^L_\mu(M)\big)^{p+1}Mu \quad \forall u \in \operatorname{dom} M \quad (4.3)$$

(с учетом тождества (1.2)) очевидно. Из него следует, что в соответствии с предыдущей теоремой существуют пределы

$$\lim_{n\to\infty}\big(nR^L_n(M)\big)^{p+1}u = Pu, \quad \lim_{n\to\infty} M\big(nR^L_n(M)\big)^{p+1}u = QMu \quad \forall u \in \operatorname{dom} M.$$

Устремим в (4.3) $n \to \infty$ и в силу замкнутости оператора M получим утверждение (ii). Утверждение (i) доказывается аналогично с использованием непрерывности оператора L.

Обозначим через L_1 (M_1) сужение оператора L (M) на $\mathscr{U}^1$ ($\operatorname{dom} M_1 = \mathscr{U}^1 \cap \operatorname{dom} M$).

Из следствия 4.1 сразу получим

Следствие 4.2. *Пусть выполняется одно из следующих двух условий:*
(a) *пространства $\mathscr{U}$ и $\mathscr{F}$ полурефлексивны, а оператор M (L,p)-радиален;*
(b) *оператор M сильно (L,p)-радиален справа и слева.*
Тогда
(i) $L_1 \in \mathscr{L}(\mathscr{U}^1;\mathscr{F}^1)$;
(ii) $M_k \in \mathscr{C}l(\mathscr{U}^k;\mathscr{F}^k)$, $k = 0, 1$.

Лемма 4.1. *Пусть оператор M сильно (L,p)-радиален справа и слева. Тогда существует оператор $L_1^{-1} \in \mathscr{C}l(\mathscr{F}^1;\mathscr{U}^1)$.*

Доказательство. Инъективность оператора L_1 следует из того, что $\ker L \subset \mathscr{U}^0$. Напомним обозначение $J = L_0 M_0^{-1}$, тогда

$$\big(L^L_n(M)\big)^{p+1} = (J(nJ - I)^{-1})^{p+1}(I - P) + \big(L^{L_1}_n(M_1)\big)^{p+1}P.$$

Так как J нильпотентен степени не больше p, то

$$\operatorname{im} L^L_{(m,p)}(M) = \operatorname{im} L^{L_1}_{(m,p)}(M_1), \quad \mathscr{F}^1 \subset \overline{\operatorname{im} L_1}.$$

Но $\operatorname{im} L_1 \subset \mathscr{F}^1$, следовательно, $\operatorname{im} L_1$ плотен в $\mathscr{F}^1$, а значит, L_1^{-1} плотно определен.

§ 5. Инфинитезимальные генераторы сужений

Введем следующие обозначения:

$$S_1 = L_1^{-1} M_1 : \operatorname{dom} S_1 \to \mathscr{U}^1, \quad \operatorname{dom} S_1 = \operatorname{im} R^{L_1}_\mu(M_1);$$

$$T_1 = M_1 L_1^{-1} : \operatorname{dom} T_1 \to \mathscr{F}^1, \quad \operatorname{dom} T_1 = \operatorname{im} L^{L_1}_\mu(M_1).$$

Именно такой выбор областей определения операторов S_1, T_1 объясняется следующей леммой.

Лемма 5.1. *Пусть $\mu \in \rho^L(M)$, тогда*
(i) $\{u \in \operatorname{dom} M_1 : \exists v \in \mathscr{U}^1 M_1 u = L_1 v\} = \operatorname{im} R^{L_1}_\mu(M_1)$;
(ii) $\{f \in \mathscr{F}^1 : \exists v \in \operatorname{dom} M_1\ L_1 v = f\} = \operatorname{im} L^{L_1}_\mu(M_1)$.

Доказательство. Равносильны равенства $u = (\mu L_1 - M_1)^{-1} L_1 w$ и $M_1 u = L_1(\mu u - w) = L_1 v$, где $v = \mu u - w$. Отсюда следует утверждение (i). Утверждение (ii) вытекает из биективности отображения $\mu L_1 - M_1 : \operatorname{dom} M_1 \to \mathscr{F}^1$ при $\mu \in \rho^L(M)$.

Лемма 5.2. *Пусть выполняется одно из условий:*
(a) *пространства $\mathscr{U}$ и $\mathscr{F}$ полурефлексивны, а оператор M (L,p)-радиален;*
(b) *оператор M сильно (L,p)-радиален справа и слева.*
Тогда операторы S_1 и T_1 замкнуты.

Доказательство. Пусть $\{u_\alpha\} \subset \operatorname{dom} S_1 \subset \operatorname{dom} M_1$, $u_\alpha \to u \in \mathscr{U}^1$, $S_1 u_\alpha \to v \in \mathscr{U}^1$. В силу непрерывности оператора L_1 имеем $L_1 S_1 u_\alpha = M_1 u_\alpha \to L_1 v$. Используя замкнутость оператора M_1, получим, что $u \in \operatorname{dom} M_1$, $M_1 u = L_1 v$. Тогда по лемме 5.1 $u \in \operatorname{dom} S_1$, $S_1 u = v$. Это означает замкнутость оператора S_1.

Предположим, что

$$\{f_\alpha\} \subset \operatorname{dom} T_1 = L_1[\operatorname{dom} M_1], \quad f_\alpha \to f \in \mathscr{F}^1, \quad T_1 f_\alpha \to g \in \mathscr{F}^1.$$

Имеем $f_\alpha = L_1 u_\alpha \to f$, $M_1 u_\alpha \to g$, где $\{u_\alpha\} \subset \operatorname{dom} M_1$ в силу леммы 5.1. Возьмем $\mu \in \rho^L(M) \setminus \{0\}$, тогда $(\mu L_1 - M_1) u_\alpha \to \mu f - g$ и, следовательно, $u_\alpha \to (\mu L_1 - M_1)^{-1}(\mu f - g)$ согласно непрерывности оператора $(\mu L_1 - M_1)^{-1}$. Ввиду замкнутости оператора M_1 имеем

$$g = M_1(\mu L_1 - M_1)^{-1}(\mu f - g) = \mu L_1(\mu L_1 - M_1)^{-1}(\mu f - g) - \mu f + g.$$

Отсюда

$$f = L_1(\mu L_1 - M_1)^{-1}(\mu f - g) \in \operatorname{dom} T_1, \quad T_1 f = g.$$

Таким образом, оператор T_1 замкнут.

Следующая лемма легко доказывается непосредственно.

Лемма 5.3. *Пусть оператор A замкнут в секвенциально полном локально выпуклом пространстве $\mathscr{V}$. Тогда линеал $\mathscr{D}_A = \operatorname{dom} A$, снабженный граф-полунормами $q_A(v) = q(v) + q(Av)$, соответствующими всем непрерывным полунормам $q(\cdot)$ в пространстве $\mathscr{V}$, является секвенциально полным локально выпуклым пространством. При этом $A \in \mathscr{L}(\mathscr{D}_A; \mathscr{V})$.*

Введем обозначения $U_1(t) = U(t)|_{\mathscr{U}^1}$, $F_1(t) = F(t)|_{\mathscr{F}^1}$.

Теорема 5.1. *Пусть выполняется одно из условий:*
(a) *пространства $\mathscr{U}$ и $\mathscr{F}$ полурефлексивны, а оператор M (L,p)-радиален;*
(b) *оператор M сильно (L,p)-радиален справа и слева.*
Тогда инфинитезимальным генератором полугруппы $\{U_1(t) : t \geq 0\}$ ($\{F_1(t) : t \geq 0\}$) является оператор S_1 (T_1).

Доказательство. Возьмем $u = \big(R^L_\beta(M)\big)^{k_1(p+1)+1} v$ при некотором $v \in \mathscr{U}$. По теореме 4.1 или 4.2 соответственно $v = v^0 + v^1$, где $v^0 \in \mathscr{U}^0$, $v^1 \in \mathscr{U}^1$. Поэтому

$$u = \big(R^L_\beta(M)\big)^{k_1(p+1)+1} v^1.$$

Из леммы 4.1 следует, что

$$R^{L_1}_\beta(M_1) = R_\beta(S_1) = (\beta I - S_1)^{-1}.$$

Отсюда $u = (R_\beta(S_1))^{k_1(p+1)+1} v^1$ и $\big(R^L_\beta(M)\big)^{k_1(p+1)}(\beta L - M)^{-1} M v^1 = S_1 u$. Тогда согласно (2.10)

$$U(t)u - u = \int\limits_0^t U(s) S_1 u \, ds \quad \forall u \in \operatorname{im}\big(R_\mu(S_1)\big)^{k_1(p+1)+1}.$$

Отсюда видно, что $Au = S_1 u$ для любого $u \in \operatorname{im}(R_\mu(S_1))^{k_1(p+1)+1}$, где $A = s\text{-}\lim\limits_{t\to 0+} t^{-1}(U_1(t) - I)$.

Покажем, что линеал $\operatorname{im}(R_\mu(S_1))^{k_1(p+1)+1}$ секвенциально плотен в $\mathscr{D}_{S_1}$. Рассмотрим произвольный вектор $u \in \operatorname{dom} S_1$ и последовательность

$$\{v_k = (kR_k(S_1))^{(k_1+1)(p+1)} u : k \in \mathbb{N}_a\} \subset \operatorname{im}(R_\mu(S_1))^{k_1(p+1)+1}.$$

Заметим сначала, что для любого $w \in \mathscr{U}^1$ будет $(kR_k(S_1))^{(k_1+1)(p+1)} w \to w$ при $k \to \infty$. Действительно,

$$\begin{aligned} r((kR_k(S_1))^{(k_1+1)(p+1)} w - w) &\leq \sum_{l=0}^{k_1} r((kR_k(S_1))^{l(p+1)}((kR_k(S_1))^{p+1} w - w)) \\ &\leq \sum_{l=0}^{k_1} (1 - a/k_1)^{-l(p+1)} q((kR_k(S_1))^{p+1} w - w) \to 0 \end{aligned}$$

при $k \to \infty$ в силу леммы 1.3(v). Здесь $k_1 = \min \mathbb{N}_a$. Поэтому для любой полунормы $q_{S_1}(\cdot)$

$$\begin{aligned} &q_{S_1}((kR_k(S_1))^{(k_1+1)(p+1)} u - u) \\ &\quad = q((kR_k(S_1))^{(k_1+1)(p+1)} u - u) + q((kR_k(S_1))^{(k_1+1)(p+1)} S_1 u - S_1 u) \to 0 \end{aligned}$$

при $k \to \infty$, что и требовалось.

Таким образом, оператор A совпадает с непрерывным оператором S_1 на секвенциально плотном в секвенциально полном локально выпуклом пространстве $\mathscr{D}_{S_1}$ линеале $\operatorname{im}(R_\mu(S_1))^{k_1(p+1)+1}$. Он может быть единственным образом продолжен на все пространство по непрерывности. Поэтому $Au = S_1 u$ $\forall u \in \operatorname{dom} S_1$.

В силу (L,p)-радиальности при любом $n \in \mathbb{N}_a$ существует резольвента

$$(nI - S_1)^{-1} = R_n^{L_1}(M_1) \in \mathscr{L}(\mathscr{U}^1).$$

С другой стороны, согласно [3] резольвента инфинитезимального генератора $A - aI$ равностепенно непрерывной полугруппы $\{U_1^t = e^{-at}U_1(t) : t \geq 0\}$ класса (C_0) при $\mu > 0$ существует и равна

$$(\mu I - (A - aI))^{-1}u = \int\limits_0^\infty e^{-\mu t} U_1^t u\, dt \quad \forall u \in \mathscr{U}^1.$$

Поэтому при $\lambda > a$

$$(\lambda I - A)^{-1}u = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t} U_1(t) u\, dt \quad \forall u \in \mathscr{U}^1.$$

Таким образом, оператор $nI - A$ отображает и $\operatorname{dom} S_1$, и $\operatorname{dom} A$ на пространство $\mathscr{U}^1$ биективно. Отсюда следует, что $\operatorname{dom} S_1 = \operatorname{dom} A$.

(Для полугруппы $\{F_1(t) : t \geq 0\}$ инфинитезимальный генератор находится аналогично.)

Следствие 5.1. *В условиях теоремы* 5.1 *операторы S_1 и T_1 радиальны.*

Замечание 5.1. В частности, в условиях теоремы 5.1 операторы S_1 и T_1 плотно определены, т. е. $S_1 \in \mathscr{C}l(\mathscr{U}^1)$, $T_1 \in \mathscr{C}l(\mathscr{F}^1)$.

Замечание 5.2. Таким образом, если ввести в рассмотрение понятие сильно p-радиального справа и слева оператора S ($S = M$, $\mathscr{U} = \mathscr{F}$, $L = I$ в определении 4.1), то оно совпадет с понятием радиального оператора S. В случае полурефлексивных пространств $\mathscr{U}$ и $\mathscr{F}$ p-радиальность оператора S ($S = M$, $\mathscr{U} = \mathscr{F}$, $L = I$ в определении 2.2) равносильна его радиальности.

§ 6. Обобщение теоремы Хилле — Иосиды

Пусть $\mathscr{U}$ и $\mathscr{F}$ — отделимые секвенциально полные локально выпуклые пространства такие, что для отображений из $\mathscr{F}$ в $\mathscr{U}$ выполняется теорема о замкнутом графике. Выделим пять условий.

(A1) *Существуют две экспоненциально ограниченные сильно непрерывные полугруппы $\{U(t) \in \mathscr{L}(\mathscr{U}) : t \geq 0\}$ и $\{F(t) \in \mathscr{L}(\mathscr{F}) : t \geq 0\}$ операторов с ядрами.*

Положим $P = U(0)$, $Q = F(0)$. Очевидно, что P и Q — проекторы. Введем обозначения: $\mathscr{U}^0 = \ker P$, $\mathscr{U}^1 = \operatorname{im} P$, $\mathscr{F}^0 = \ker Q$, $\mathscr{F}^1 = \operatorname{im} Q$; имеем $\mathscr{U} = \mathscr{U}^0 \oplus \mathscr{U}^1$, $\mathscr{F} = \mathscr{F}^0 \oplus \mathscr{F}^1$. Через $\{U_1(t) : t \geq 0\}$ и $\{F_1(t) : t \geq 0\}$ обозначим сужения соответствующих полугрупп на подпространства $\mathscr{U}^1$ и $\mathscr{F}^1$. Сужения являются невырожденными полугруппами. По теореме Хилле — Иосиды [3] равностепенно непрерывные полугруппы $\{e^{-\omega t}U_1(t) : t \geq 0\}$ и $\{e^{-\omega t}F_1(t) : t \geq 0\}$ обладают инфинитезимальными генераторами $\widetilde{S}_1$ и $\widetilde{T}_1$ соответственно, являющимися радиальными операторами с константой $a = 0$. Поэтому генераторами полугрупп $\{U_1(t) : t \geq 0\}$ и $\{F_1(t) : t \geq 0\}$ будут операторы $S_1 = \widetilde{S}_1 + \omega I$ и $T_1 = \widetilde{T}_1 + \omega I$, которые, как нетрудно заметить, также радиальны с константой $a = \omega$.

(A2) *Существует инъективный оператор $L_1 \in \mathscr{L}(\mathscr{U}^1; \mathscr{F}^1)$ с плотным в $\mathscr{U}^1$ образом, при этом $L_1[\operatorname{dom} S_1] \subset \operatorname{dom} T_1 \subset \operatorname{im} L_1$ и $L_1 S_1 u = T_1 L_1 u$ для всех $u \in \operatorname{dom} S_1$.*

(A3) *Существует биективный оператор $M_0 \in \mathscr{C}l(\mathscr{U}^0; \mathscr{F}^0)$.*

Отсюда следует существование оператора $M_0^{-1} \in \mathscr{L}(\mathscr{F}^0; \mathscr{U}^0)$.

(A4) *Существует оператор $L_0 \in \mathscr{L}(\mathscr{U}^0; \mathscr{F}^0)$ такой, что оператор $H = M_0^{-1} L_0$ нильпотентен степени не больше $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.*

(A5) $L = L_0(I-P) + L_1 P$; $M = M_0(I-P) + L_1 S_1 P$, $\operatorname{dom} M = \operatorname{dom} M_0 \dot{+} \operatorname{dom} S_1$.

Теорема 6.1. *Оператор M сильно (L,p)-радиален справа и слева тогда и только тогда, когда выполнены все условия* (A1)–(A5).

Доказательство. Необходимость условий (A1)–(A5) показана раньше. Докажем их достаточность. Имеем

$$(\mu L - M)^{-1} = -\sum_{k=0}^{p} \mu^k H^k M_0^{-1}(I-Q) + (\mu I - S_1)^{-1} L_1^{-1} Q,$$

$$\left(R^L_{(\mu,p)}(M)\right)^n = \mathbb{O}(I-P) + \prod_{k=0}^{p} (R_{\mu_k}(S_1))^n P,$$

$$\left(L^L_{(\mu,p)}(M)\right)^n = \mathbb{O}(I-Q) + \prod_{k=0}^{p} (R_{\mu_k}(T_1))^n Q,$$

где $\mu_k > a$, $k = \overline{0,p}$. Далее,

$$M(\lambda L - M)^{-1} L^L_{(\nu,p)}(M) f = R_\lambda(T_1) \prod_{k=0}^{p} R_{\nu_k}(T_1) T_1 F^0 f,$$

$$R^L_{(\nu,p)}(M)(\lambda L - M)^{-1} M u = R_\lambda(S_1) \prod_{k=0}^{p} R_{\nu_k}(S_1) S_1 U^0 u,$$

где $\mu, \lambda, \nu_k > a$, $k = \overline{0,p}$. При этом вектор f взят из плотного в пространстве $\mathscr{F}$ линеала $\mathring{\mathscr{F}} = \mathscr{F}^0 \dot{+} \operatorname{dom} T_1$, а u — из линеала $\operatorname{dom} M$. Из включения $\operatorname{dom} T_1 \subset \operatorname{im} L_1$ и радиальности операторов S_1, T_1 получим сильную (L,p)-радиальность оператора M справа и слева.

Замечание 6.1. На смысл условий (A1)–(A4) можно посмотреть с другой точки зрения. В § 1–5 мы по паре операторов (L, M) строили пару полугрупп $(\{U(t)\}, \{F(t)\})$. Теперь же видно, что по полугруппам мы не можем восстановить пару операторов хотя бы потому, что, изменив в (A4) L_0, мы получим, вообще говоря, другую пару операторов, порождающую ту же пару полугрупп.

Замечание 6.2. Пусть $\mathscr{U} = \mathscr{F}$, $L = I$. Тогда условия (A2)–(A5) становятся тривиальными и с учетом замечания 5.2 теорема 6.1 будет совпадать с теоремой Хилле — Иосиды о генераторах C_0-непрерывных полугрупп. Таким образом, мы получили обобщение теоремы Хилле — Иосиды.

Следствие 6.1. *Если пространства $\mathscr{U}$ и $\mathscr{F}$ полурефлексивны, то оператор M (L,p)-радиален в том и только в том случае, когда он сильно (L,p)-радиален справа и слева.*

Доказательство. Как мы убедились, в случае полурефлексивных пространств из (L,p)-радиальности оператора M имеем выполнение условий (A1)–(A5).

Следствие 6.2. (i) *Из сильной (L,p)-радиальности оператора M справа и слева следует его сильная $(L,p+q)$-радиальность справа и слева при любом $q \in \mathbb{N}$;* (ii) *если пространства $\mathscr{U}$ и $\mathscr{F}$ полурефлексивны, то из (L,p)-радиальности оператора M вытекает его $(L,p+q)$-радиальность при любом $q \in \mathbb{N}$.*

Для доказательства достаточно обратить внимание, что константа p среди достаточных условий сильной (L,p)-радиальности справа и слева присутствует лишь в условии (A4).

§ 7. Приложение

Пусть

$$P_n(y) = \sum_{i=0}^{n} c_i y^i, \quad Q_m(y) = \sum_{j=0}^{m} d_j y^j, \quad m \geq n,$$

$\Omega \subset \mathbb{R}^s$ — ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞, набор операторов A, $B_1, \dots, B_r$ регулярно эллиптический [23], где

$$(Au)(x) = \sum_{|\alpha| \leq 2r} a_\alpha(x) D^\alpha u(x), \quad a_\alpha \in C^\infty(\overline{\Omega}),$$

$$(B_l u)(x) = \sum_{\alpha \leq r_l} b_{l\alpha}(x) D^\alpha u(x), \quad b_{l\alpha}(x) \in C^\infty(\partial\Omega), \quad l = \overline{1,r}.$$

Потребуем самосопряженности оператора $A_1 \in \mathscr{C}l(L_2(\Omega))$ с областью определения $\operatorname{dom} A_1 = W_{2,\{B_l\}}^{2r}(\Omega)$ [23], $A_1 u = Au$, $u \in \operatorname{dom} A_1$, а также ограниченности справа его спектра (достаточные условия см., например, в [24]).

Рассмотрим начально-краевую задачу

$$P_n(A) u_t(x,t) = Q_m(A) u(x,t), \quad (x,t) \in \Omega \times [0,T], \tag{7.1}$$

$$B_l A^k u(x,t) = 0, \quad k = \overline{0, m-1},\ l = \overline{1,r},\ (x,t) \in \partial\Omega \times [0,T], \tag{7.2}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \Omega. \tag{7.3}$$

Положим $\mathscr{F} = L_2(\Omega)$,

$$\mathscr{U} = \big\{u \in W_2^{2rn} : B_l A^k u(x) = 0,\ k = \overline{0,n-1},\ l = \overline{1,r},\ x \in \partial\Omega\big\},$$

где $W_2^\gamma = W_2^\gamma(\Omega)$ — пространство Соболева, $\gamma = 0, 1, \dots$. Операторы L и M зададим следующим образом: $L = P_n(A)$, $M = Q_m(A)$,

$$\operatorname{dom} M = \big\{u \in W_2^{2rm} : B_l A^k u(x) = 0,\ k = \overline{0,m-1},\ l = \overline{1,r},\ x \in \partial\Omega\big\}.$$

Тогда задача (7.1)–(7.3) редуцируется к задаче (0.1), (0.2).

Через $\{\varphi_k : k \in \mathbb{N}\}$ обозначим ортонормированные в смысле скалярного произведения $(\cdot,\cdot)$ в $L_2(\Omega)$ собственные функции оператора A_1, занумерованные по невозрастанию собственных значений $\{\lambda_k : k \in \mathbb{N}\}$ с учетом их кратности.

Потребуем, чтобы числа λ_k, являющиеся корнями многочлена $P_n(\lambda)$, не были корнями $Q_m(\lambda)$. Тогда нетрудно показать, что при выполнении условия $(-1)^{m-n}\operatorname{Re}(d_m/c_n) < 0$ оператор M $(L,0)$-радиален. Кроме того, условие расщепления пространств $\mathscr{U}$ и $\mathscr{F}$ в прямые суммы выполняется в силу их гильбертовости.

Полугруппа рассматриваемой задачи имеет вид

$$U(t) = \sum_{k:P_n(\lambda_k)\neq 0} \exp\left(\frac{Q_m(\lambda_k)}{P_n(\lambda_k)}t\right)(\cdot,\varphi_k)\varphi_k,$$

причем

$$\mathscr{U}^0 = \operatorname{span}\{\varphi_k : P_n(\lambda_k) = 0\}, \quad \mathscr{U}^1 = \overline{\operatorname{span}}\{\varphi_k : P_n(\lambda_k) \neq 0\}.$$

Частным случаем задачи (7.1)–(7.3) является задача

$$(\lambda - \Delta)u_t(x,t) = \alpha\Delta u(x,t) - \beta\Delta^2 u(x,t), \quad (x,t) \in \Omega \times [0,T],$$
$$\frac{d}{dn}u(x,t) = \frac{d}{dn}\Delta u(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times [0,T],$$
$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \Omega,$$

для уравнения, моделирующего эволюцию свободной поверхности фильтрующейся жидкости [25].

Замечание 7.1. Граничные условия в последней задаче можно заменить на $u(x,t) = \Delta u(x,t) = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Schwartz L.* Lectures on mixed problems in partial differential equations and the representation of semi-groups. Bombay: Tata Institute of Fundamental Research, 1958.
2. *Komatsu H.* Semi-groups of operators in locally convex spaces // J. Math. Soc. Japan. 1964. V. 16, N 2. P. 230–262.
3. *Иосида К.* Функциональный анализ. М.: Мир, 1967.
4. *Федоров В. Е.* Вырожденные сильно непрерывные полугруппы операторов // Алгебра и анализ. 2000. Т. 12, № 3. С. 173–200.
5. *Komura T.* Semigroups of operators in locally convex spaces // J. Funct. Anal. 1968. V. 2, N 2. P. 258–296.
6. *Иванов В. В.* Резольвентная последовательность в вопросах порождения суммируемых полугрупп операторов // Докл. АН СССР. 1973. Т. 213, № 3. С. 282–285.
7. *Ouchi S.* Semi-groups of operators in locally convex spaces // J. Math. Soc. Japan. 1973. V. 25, N 2. P. 265–276.
8. *Иванов В. В.* Полугруппы линейных операторов в локально выпуклом пространстве // Теория операторов в функциональных пространствах. Новосибирск: Наука, 1977. Т. 1. С. 121–153.
9. *Иванов В. В.* Равномерно суммируемые полугруппы операторов. I. Порождение полугрупп // Тр. Ин-та математики СО РАН. Исследования по геометрии и математическому анализу. 1987. Т. 7. С. 117–131.
10. *Yagi A.* Generation theorems of semigroups for multivalued linear operators // Osaka J. Math. 1991. V. 28, N 2. P. 385–410.
11. *Мельникова И. В., Альшанский М. А.* Корректность вырожденной задачи Коши в банаховом пространстве // Докл. АН. 1994. Т. 336, № 1. С. 17–20.
12. *Свиридюк Г. А.* Линейные уравнения типа Соболева и сильно непрерывные полугруппы разрешающих операторов с ядрами // Докл. АН. 1994. Т. 337, № 5. С. 581–584.
13. *Favini A., Yagi A.* Degenerate differential equations in Banach spaces. New York; Basel; Hong Kong: Marcel Dekker Inc., 1999.
14. *Свиридюк Г. А.* К общей теории полугрупп операторов // Успехи мат. наук. 1994. Т. 49, № 4. С. 47–74.

15. *Федоров В. Е.* Линейные уравнения типа Соболева с относительно p-радиальными операторами // Докл. АН. 1996. Т. 351, № 3. С. 316–318.
16. *Федоров В. Е.* Сильно непрерывные полугруппы уравнений соболевского типа в локально выпуклых пространствах // Неклассические уравнения математической физики. Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 2000. Т. 1. С. 32–40.
17. *Федоров В. Е.* О гладкости решений линейных уравнений соболевского типа // Дифференц. уравнения. 2001. Т. 37, № 12. С. 1646–1649.
18. *Робертсон А., Робертсон В.* Топологические векторные пространства. М.: Мир, 1967.
19. *Забрейко П. П., Смирнов Е. И.* К теореме о замкнутом графике // Сиб. мат. журн. 1977. Т. 18, № 2. С. 304–313.
20. *De Wilde M.* Closed graph theorems and webbed spaces. London etc.: Pitman, 1978. (Res. Notes Math.; 19).
21. *Зорич В. А.* Математический анализ. М.: Наука, 1984. Т. 2.
22. *Титчмарш Е.* Введение в теорию интегралов Фурье. М.: Гостехиздат, 1948.
23. *Трибель Х.* Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. М.: Мир, 1980.
24. *Функциональный анализ.* Сер. Справочная математическая библиотека. Под ред. С. Г. Крейна. М.: Наука, 1972.
25. *Дзекцер Е. С.* Обобщение уравнения движения грунтовых вод со свободной поверхностью // Докл. АН СССР. 1972. Т. 202, № 5. С. 1031–1033.

Статья поступила 26 марта 2002 г., окончательный вариант — 20 декабря 2003 г.

Федоров Владимир Евгеньевич
Челябинский гос. университет, ул. Бр. Кашириных, 129, Челябинск 454021
kar@csu.ru