Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2005. Том 46, № 3

УДК 517.55

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ В ЛИНЕЙНО ВЫПУКЛЫХ ПОЛИЭДРАХ

В. П. Кривоколеско, А. К. Цих

Аннотация: Для системы из k эрмитовых и k линейных форм вводится понятие смешанного левиана (определителя Леви). На языке таких левианов получена интегральная формула для функций, голоморфных в линейно выпуклых полиэдрах.

Ключевые слова: линейно выпуклая область, интегральное представление, смешанный левиан.

1. Введение

Область $D \subset \mathbb{C}^n$ называется *линейно выпуклой* [1, § 8], если для каждой точки z^0 ее границы ∂D существует комплексно $(n-1)$-мерная аналитическая плоскость, проходящая через z^0 и не пересекающая D (заметим, что некоторые авторы используют термин «слабая линейчатая выпуклость», см., например, [2]).

Рассмотрим в пространстве $\mathbb{C}^n$ ограниченную линейно выпуклую область полиэдрального вида (линейно выпуклый полиэдр)

$$G = \{z : g^l(z, \bar z) < 0,\ l = 1, \dots, N\},$$

где функции $g^l(z,\bar z)$ дважды непрерывно дифференцируемы в окрестности замыкания этой области. Граница ∂G области G состоит из граней

$$S^l = \{z \in \overline{G} : g^l(z, \bar z) = 0\}, \quad l = 1, \dots, N.$$

Будем предполагать, что G имеет *кусочно-регулярную границу*: на всяком непустом ребре

$$S^{j_1 \cdots j_k} := S^{j_1} \cap \dots \cap S^{j_k} = \{\zeta \in \partial G : g^{j_1}(\zeta, \bar\zeta) = 0, \dots, g^{j_k}(\zeta, \bar\zeta) = 0\}$$

выполняется неравенство $\bar\partial g^{j_1} \wedge \dots \wedge \bar\partial g^{j_k} \neq 0$.

Ориентация граней $S^1, \dots, S^N$ индуцирована ориентацией границы ∂G, и $\partial G = \bigcup\limits_{i=1}^{N} S^i$. В свою очередь, ориентация каждой грани S^i, $i = 1, \dots, N$, индуцирует ориентацию $(2n-2)$-мерного ребра S^{ij}, $\partial S^i = \bigcup\limits_j S^{ij}$, и с учетом ориентации имеем $S^{ij} = -S^{ji}$. Индуктивным образом определяется ориентация ребра $S^{j_1 \cdots j_k}$, которая фактически задается порядком следования граней $S^{j_1}, \dots, S^{j_k}$.

Первый автор выполнил работу при содействии Совета по грантам Президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (код проекта НШ–1212.2003.1), второй автор — гранта Минвуза РФ (С.-Петербург) (код проекта Е 02–1–138).

Напомним вначале интегральную формулу Л. А. Айзенберга [1, формула (8.6)] в ограниченной регулярной линейно выпуклой области (т. е. при $N = 1$):

$$G = \{z \in \mathbb{C}^n : g(z, \bar{z}) < 0\}.$$

Мы запишем ее в слегка измененной инвариантной форме:

$$f(z) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\partial G} \frac{f(\zeta) L(g)}{\langle \nabla g(\zeta), \zeta - z \rangle^n} \frac{d\bar{\zeta} \wedge d\zeta}{\bar{\partial} g},$$

где выражение $\frac{d\bar{\zeta} \wedge d\zeta}{\bar{\partial} g}$, суженное на границу ∂G, представляет собой корректно определенную $(n, n-1)$-форму, которая в тех точках границы ∂G, где

$$g_{\bar{p}} := \frac{\partial g(\zeta, \bar{\zeta})}{\partial \bar{\zeta}_p} \neq 0,$$

определяется формулой

$$\frac{d\bar{\zeta} \wedge d\zeta}{\bar{\partial} g} = \frac{(-1)^{p-1} d\bar{\zeta}[p] \wedge d\zeta}{g_{\bar{p}}},$$

а $L(g)$ — определитель Леви (левиан) функции $g(\zeta, \bar{\zeta})$ (или гиперповерхности $\partial G = \{z : g(z, \bar{z}) = 0\}$), записываемый в виде

$$L(g) = -\begin{vmatrix} 0 & g_{\bar{1}} & \dots & g_{\bar{n}} \\ g_1 & g_{1\bar{1}} & \dots & g_{1\bar{n}} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ g_n & g_{n\bar{1}} & \dots & g_{n\bar{n}} \end{vmatrix}. \tag{1}$$

Здесь $g_{i\bar{j}}$ обозначает вторую производную $\frac{\partial^2 g}{\partial \zeta_i \partial \bar{\zeta}_j}$.

При получении интегральной формулы для ограниченной кусочно-регулярной линейно выпуклой области нам потребуется понятие *смешанных левианов* для системы функций (гиперповерхностей). Оно навеяно известной конструкцией Минковского для смешанных объемов системы выпуклых тел в евклидовом пространстве [3]. Существует также алгебраический аспект понятия смешанного объема в виде смешанного дискриминанта (инварианта) системы квадратичных форм [4]. А именно, если $Q_1, \dots, Q_k$ — система квадратичных форм переменных $x_1, \dots, x_n$, то *смешанным дискриминантом порядка* $I = (i_1, \dots, i_k)$ называется коэффициент $D_I = D_I(Q_1, \dots, Q_k)$ в представлении

$$\det(\lambda_1 Q_1 + \dots + \lambda_k Q_k) = \sum_I D_I \lambda^I = \sum_{i_1, \dots, i_k} D_{i_1 \dots i_k} \lambda^{i_1} \dots \lambda^{i_k}.$$

Известно, что определитель Леви для гиперповерхности $\{z : g(z, \bar{z}) = 0\}$ связан со свойством ее псевдовыпуклости и с точностью до положительного множителя равен [1, § 8] произведению собственных значений формы Леви

$$Q = \sum_{j,k} \frac{\partial^2 g(\zeta, \bar{\zeta})}{\partial \zeta_j \partial \bar{\zeta}_k} \eta_j \overline{\eta_k},$$

суженной на касательную в точке ζ комплексную гиперплоскость

$$\pi = \{\eta : \langle \nabla g(\zeta), \eta \rangle = 0\},$$

где

$$\nabla g(\zeta) = \left(\frac{\partial g(\zeta,\bar\zeta)}{\partial \zeta_1}, \dots, \frac{\partial g(\zeta,\bar\zeta)}{\partial \zeta_n}\right).$$

С другой стороны, по аналогии с общей теорией инвариантов [5] определитель Леви (1) можно трактовать как инвариант системы форм, состоящей из квадратичной эрмитовой формы Q и линейной формы $l(\eta) = \langle \nabla g(\zeta), \eta\rangle$; таким образом, мы можем записать $L(g) = L(Q, l)$. Если система форм состоит из эрмитовой квадратичной формы $Q = \sum\limits_{j,s=1}^{n} c_{js}\eta_j\bar\eta_s$ и набора линейных форм $l_i = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}\eta_j$, $i = 1, \dots, k$, то можно рассмотреть следующий инвариант системы:

$$L(Q, l_1, \dots, l_k) = -\begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & \overline{a_{11}} & \dots & \overline{a_{1n}} \\ \dots & \ddots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \overline{a_{k1}} & \dots & \overline{a_{kn}} \\ a_{11} & \dots & a_{k1} & c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \dots & \ddots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{1n} & \dots & a_{kn} & c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix}.$$

Теперь мы можем ввести такое

Определение. *Смешанным левианом порядка $I = (i_1, \dots, i_k)$ семейства функций* $g^1, \dots, g^k$ называется коэффициент $L_I = L_I(g^1, \dots, g^k)$ в представлении

$$L(\lambda_1 Q_1 + \dots + \lambda_k Q_k, l_1, \dots, l_k) = \sum_I L_I \lambda^I,$$

где $Q_i = \sum\limits_{j,s=1}^{n} \frac{\partial g^i}{\partial \zeta_j \partial \bar\zeta_s}\eta_j\bar\eta_s$ — эрмитова форма, сопоставленная g^i, а l_i — линейная форма $\langle \nabla g^i(\zeta), \eta\rangle$.

Заметим, что при $k = n$

$$\begin{aligned} L(\lambda_1 Q_1 + \dots + \lambda_n Q_n, l_1, \dots, l_n) &= L_{0\dots0}(g^1, \dots, g^n) \\ &= (-1)^{(n-1)} \cdot \begin{vmatrix} g^1_{\bar 1} & \cdots & g^1_{\bar n} \\ \dots & \ddots & \dots \\ g^n_{\bar 1} & \dots & g^n_{\bar n} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} g^1_1 & \dots & g^1_n \\ \dots & \ddots & \dots \\ g^n_1 & \dots & g^n_n \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Например, если в системе $g^1, \dots, g^n$ каждая функция g^j зависит лишь от $\zeta_j, \overline{\zeta}_j$, то

$$L_{0\dots0}(g^1, \dots, g^n) = (-1)^{(n-1)} \cdot \left|\frac{\partial g^1}{\partial \zeta_1}\right|^2 \cdot \dots \cdot \left|\frac{\partial g^n}{\partial \zeta_n}\right|^2 = (-1)^{(n-1)} \cdot \left|g^1_1\right|^2 \cdot \dots \cdot \left|g^n_n\right|^2.$$

В этом случае всякий поднабор $g^1, \dots, g^k$, $k < n$, вообще не имеет нетривиальных смешанных левианов.

Прежде чем сформулировать основную теорему, введем для мультииндекса $J = (j_1, \dots, j_k)$ следующее отношение двух дифференциальных форм:

$$\omega_J := \frac{d\bar\zeta \wedge d\zeta}{\bar\partial g^{j_1} \wedge \dots \wedge \bar\partial g^{j_k}},$$

сужение которого на ребро $S^J = S^{j_1} \cap \dots \cap S^{j_k}$ представляет собой корректно определенную форму со свойством

$$\bar\partial g^{j_1} \wedge \dots \wedge \bar\partial g^{j_k} \wedge \omega_J = d\bar\zeta \wedge d\zeta.$$

В подходящих координатах в тех точках ребра S^J, где

$$\Delta^{p_1\dots p_k}_{j_1\dots j_k} := \begin{vmatrix} g^{j_1}_{\bar p_1} & \dots & g^{j_1}_{\bar p_k} \\ \dots & \ddots & \dots \\ g^{j_k}_{\bar p_1} & \dots & g^{j_k}_{\bar p_k} \end{vmatrix} \neq 0,$$

форма ω_J определяется формулой

$$\omega_J = \frac{(-1)^{\frac{k(k+1)}{2}} \cdot (-1)^{p_1+\dots+p_k} d\bar\zeta[p_1,\dots,p_k] \wedge d\zeta}{\Delta^{p_1\dots p_k}_{j_1\dots j_k}}. \tag{2}$$

Здесь $d\bar\zeta[p_1,\dots,p_k]$ — внешнее произведение дифференциалов $d\bar\zeta_1,\dots,d\bar\zeta_n$, среди которых отсутствуют $d\bar\zeta_{p_1},\dots,d\bar\zeta_{p_k}$.

Основной результат настоящей статьи составляет следующая теорема, в которой мы исходим из того, что ориентация объемлющего пространства $\mathbb{C}^n$ определяется порядком координат $z_1,\bar z_1,\dots,z_n,\bar z_n$.

Теорема. *Пусть $G = \{z : g^l(z,\bar z) < 0,\ l = 1,\dots,N\}$ — ограниченная кусочно-регулярная линейно выпуклая область в $\mathbb{C}^n$. Тогда всякая функция $f(z)$, голоморфная в области G и непрерывная на $\overline{G}$, представима в G в виде*

$$f(z) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{\sharp J=k}{}' \sum_{|I|=n-k} \frac{I!}{(2\pi i)^n} \int\limits_{S^J} \frac{f(\zeta) L_I(g^{j_1},\dots,g^{j_k})}{\prod\limits_{t=1}^{k} \langle \nabla g^{j_t}, \zeta - z\rangle^{i_t+1}} \cdot \omega_J, \tag{3}$$

где $\sum\limits_{\sharp J=k}{}'$ означает суммирование по упорядоченным мультииндексам J длины $k : 1 \leqslant j_1 < \dots < j_k \leqslant N$; $\sum\limits_{|I|=n-k}$ — суммирование по мультииндексам $I = (i_1,\dots,i_k)$ со свойством $|I| := i_1 + \dots + i_k = n-k; L_I$ — смешанный левиан порядка I и введено обозначение $I! = i_1! \cdot \ldots \cdot i_k!$.

В случае, когда $G = G_1 \times \dots \times G_n$ — полиобласть ($G_l = \{g^l(z_l,\bar z_l) < 0\}$), имеется лишь один нетривиальный смешанный левиан $L_{0\dots0}(g^1,\dots,g^n)$, соответствующий $J = (1,\dots,n)$, $I = (0,\dots,0)$, и (3) превращается в формулу Коши, так как

$$\frac{(-1)^{n-1} L_{0\dots0}(g^1,\dots,g^n)\omega_J}{\prod\limits_{j=1}^{n} \langle \nabla g^j, \zeta - z\rangle} = \frac{d\zeta}{\prod\limits_{j=1}^{n} (\zeta_j - z_j)}.$$

Аналогично для аналитического полиэдра Вейля

$$G = \bigl\{z : g^l(z,\bar z) = |h^l(z,\bar z)|^2 - r_l^2 < 0,\ l = 1,\dots,N\bigr\}, \tag{4}$$

где функции $h^l(z)$ голоморфны в области $D \Supset G$, также нетривиальными могут быть лишь смешанные левианы вида $L_{0\dots0}(g^{j_1},\dots,g^{j_n})$. Действительно, для функций вида

$$g^1(\zeta,\bar\zeta) = |h^1(\zeta)|^2, \dots, g^k(\zeta,\bar\zeta) = |h^k(\zeta)|^2$$

имеем

$$L(\lambda_1 Q_1 + \dots + \lambda_k Q_k, l_1, \dots, l_k)$$

$$= - \begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & h^1 \cdot \overline{h^1_1} & \dots & h^1 \cdot \overline{h^1_n} \\ \dots & \ddots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & h^k \cdot \overline{h^k_1} & \dots & h^k \cdot \overline{h^k_n} \\ \overline{h^1} \cdot h^1_1 & \dots & \overline{h^k} \cdot h^k_1 & \sum\limits_{t=1}^{k} \lambda_t \cdot h^t_1 \cdot \overline{h^t_1} & \dots & \sum\limits_{t=1}^{k} \lambda_t \cdot h^t_1 \cdot \overline{h^t_n} \\ \dots & \ddots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ \overline{h^1} \cdot h^1_n & \dots & \overline{h^k} \cdot h^k_n & \sum\limits_{t=1}^{k} \lambda_t \cdot h^t_n \cdot \overline{h^t_1} & \dots & \sum\limits_{t=1}^{k} \lambda_t \cdot h^t_n \cdot \overline{h^t_n} \end{vmatrix}.$$

Очевидно, при $0 < k < n$ указанный определитель равен нулю, а при $k = n$

$$L(\lambda_1 Q_1 + \dots + \lambda_n Q_n, l_1, \dots, l_n) = L_{0\dots 0}(g^1, \dots, g^n)$$

$$= (-1)^{(n-1)} \cdot |h^1|^2 \cdot \ldots \cdot |h^n|^2 \cdot \begin{vmatrix} \overline{h^1_1} & \dots & \overline{h^1_n} \\ \dots & \ddots & \dots \\ \overline{h^n_1} & \dots & \overline{h^n_n} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} h^1_1 & \dots & h^n_1 \\ \dots & \ddots & \dots \\ h^1_n & \dots & h^n_n \end{vmatrix}.$$

Таким образом, мы приходим к следующему утверждению.

Следствие. *Если аналитический полиэдр* (4) *линейно выпуклый, то для функций, голоморфных в нем и непрерывных вплоть до границы, справедливо интегральное представление*

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \sum_{1 \leqslant j_1 < \dots < j_n \leqslant N} \int\limits_{S^{j_1 \dots j_n}} f(\zeta) \frac{\operatorname{Jac}(h^{j_1}, \dots, h^{j_n})}{\prod\limits_{t=1}^{n} \langle \nabla h^{j_t}, \zeta - z \rangle} d\zeta, \tag{5}$$

где $\operatorname{Jac}(h^{j_1}, \dots, h^{j_n})$ — *якобиан соответствующей системы функций.*

Заметим, что интегральное представление (5) похоже на универсальное представление Вейля (т. е. представление в аналитическом полиэдре, необязательно линейно выпуклом), хотя существенно отличается от него. Известно, что интегральные представления Коши и Вейля (для случая $N = n$) связаны между собой законом преобразования локального вычета при переходе к другим образующим идеала (см. [6, разд. 16.2]). Представление (5) можно интерпретировать как новое проявление закона преобразования для локальных вычетов.

Авторы благодарны В. А. Степаненко и В. М. Трутневу за полезные замечания.

2. Некоторые вспомогательные формулы

Здесь мы приведем и докажем полуфабрикат формулы (3), с помощью которого в следующем разделе и будет обосновано утверждение основной теоремы.

Предложение. *Пусть* $G = \{z : g^l(z, \bar z) < 0,\ l = 1, \dots, N\}$ — *ограниченная кусочно-регулярная линейно выпуклая область в* $\mathbb{C}^n$. *Тогда всякая функция* $f(z)$*, голоморфная в области* G *и непрерывная на* $\overline{G}$*, представима в* G *в виде*

$$f(z) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leqslant j_1 < \dots < j_k \leqslant N} \int\limits_{S^{j_1 \dots j_k}} f(\zeta) \mu^{j_1 \dots j_k} \omega_J, \tag{6}$$

$$\mu^{j_1\cdots j_k} = \frac{(-1)^{q-1}}{\prod\limits_{t=1}^{k}\langle\nabla g^{j_t}, \zeta - z\rangle} \int\limits_{\substack{\lambda_1+\cdots+\lambda_k=1\\ \lambda_1\geqslant 0,\ldots,\lambda_k\geqslant 0}} R^{j_1\cdots j_k}(\zeta,\bar\zeta,\lambda)\,d\lambda[q], \tag{7}$$

где q — любое из чисел $1,\ldots,k$; в свою очередь,

$$R^{j_1\cdots j_k}(\zeta,\bar\zeta,\lambda) = -\begin{vmatrix} 0 & \ldots & 0 & g^{j_1}_{\bar 1} & \ldots & g^{j_1}_{\bar n}\\ \ldots & \ddots & \ldots & \ldots & \ddots & \ldots\\ 0 & \ldots & 0 & g^{j_k}_{\bar 1} & \ldots & g^{j_k}_{\bar n}\\ g^{j_1}_1 & \ldots & g^{j_k}_1 & c_{11} & \ldots & c_{1n}\\ \ldots & \ddots & \ldots & \ldots & \ddots & \ldots\\ g^{j_1}_n & \ldots & g^{j_k}_n & c_{n1} & \ldots & c_{nn}\end{vmatrix} \tag{8}$$

с элементами

$$c_{js} = \sum_{t=1}^{k}\lambda_t\cdot\frac{g^{j_t}_{j\bar s}}{\langle\nabla g^{j_t}, \zeta - z\rangle}. \tag{9}$$

Для доказательства представления (6) нам потребуются простые формулы исчисления на внешней алгебре, которые будут даны в нижеследующих леммах.

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} f_{11}x_1 + \cdots + f_{1n}x_n = 0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ f_{k1}x_1 + \cdots + f_{kn}x_n = 0,\end{cases} \tag{10}$$

где переменные x являются элементами некоторой внешней алгебры над полем $\mathbb{C}$. Предположим, что для выбранного упорядоченного набора $p = \{p_1,\ldots,p_k\} \subset \{1,\ldots,n\}$ будет

$$\Delta_p := \begin{vmatrix} f_{1p_1} & \ldots & f_{1p_k}\\ \ldots & \ddots & \ldots\\ f_{kp_1} & \ldots & f_{kp_k}\end{vmatrix} \neq 0. \tag{11}$$

Тогда в соответствии с правилом Крамера соотношения (10) можно переписать в виде

$$x_{p_i} = -\frac{1}{\Delta_p}\cdot\sum_{\substack{s=1\\ s\notin p}}^{n}\Delta_{p(\hat i,s)}\cdot x_s, \quad i = 1,\ldots,k, \tag{12}$$

где $p(\hat i, s)$ — упорядоченный набор, полученный из p заменой p_i на s.

К соотношениям (12) можно добавить $n-k$ тождеств $x_s = x_s$, $s \notin p$, в результате вместе с (12) получим n тождеств, которые можно записать унифицированным способом. Для этого при помощи коэффициентов системы (10) рассмотрим определитель $D = \det(a_{ij})$ порядка n, в котором строка коэффициентов первого уравнения системы (10) является p_1-й строкой определителя D, аналогично строка коэффициентов второго уравнения системы (10) является p_2-й строкой определителя, и т. д., а в строках с номерами $i \notin \{p_1,\ldots,p_k\}$ и в столбах с номерами $j = 1,\ldots,n$ полагаем

$$a_{ij} = \delta^j_i = \begin{cases} 0, & i \neq j,\\ 1, & i = j.\end{cases}$$

Заметим, что

$$D = \Delta_p. \tag{13}$$

Лемма 1. *Пусть в* (10) *для упорядоченного набора* $p = \{p_1, \dots, p_k\}$ *определитель* (11) *не равен нулю. Тогда для всех* $j = 1, 2 \dots, n$ *справедливы соотношения*

$$x_j = \frac{1}{\Delta_p} \cdot \sum_{\substack{s=1 \\ s \notin p}}^{n} (-1)^{j-s} M_{sj} \cdot x_s, \tag{14}$$

где M_{sj} — *миноры* D.

Доказательство. Очевидно, $M_{sj} = \Delta_p \cdot \delta_s^j$ при условии $s, j \notin p = \{p_1, \dots, p_k\}$. Поэтому для $j \notin p$ тождество $x_j = x_j$ записывается в виде (14). Чтобы обосновать (14) для $j \in p$, достаточно воспользоваться (12) и доказать равенство

$$M_{sj} = (-1)^{j-s-1} \Delta_{p(\hat{\imath}, s)}, \quad j = p_i \in p, \ s \notin p. \tag{15}$$

Отметим, что для $s \notin p$ в $M_{sj} = M_{sp_i}$ часть единиц находятся на главной диагонали и занимают места

$$(1,1), \dots, (\min(s,j)-1, \min(s,j)-1); (\max(s,j), \max(s,j)), \dots, (n-1, n-1),$$

а остальные располагаются под или над главной диагональю, сдвинувшись на одну позицию вниз или вверх. Число последних единиц равно

$$\max(s,j) - \min(s,j) - (t+1) = |s-j| - t - 1,$$

где t — число элементов из набора $p_1, \dots, p_k$, располагающихся между s и $j = p_i$. Заметим, что между вычеркнутым p_i-столбцом и s-столбцом располагается ровно t столбцов без единиц. Раскрывая M_{sp_i} по строкам, содержащим единицы, и вспоминая определение $\Delta_{p(\hat{\imath}, s)}$, получим (15).

Замечание. Если при выполнении (11) вместо (10) рассмотреть систему

$$\begin{cases} f_{11}x_1 + \dots + f_{1n}x_n + f_{1,n+1}y_1 + \dots + f_{1,n+m}y_m = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_{k1}x_1 + \dots + f_{kn}x_n + f_{k,n+1}y_1 + \dots + f_{k,n+m}y_m = 0, \end{cases} \tag{16}$$

то вместо (14) получим соотношения вида

$$x_j = \frac{1}{\Delta_p} \cdot \sum_{\substack{s=1 \\ s \notin p}}^{n} (-1)^{j-s} M_{sj} \cdot x_s + \sum_{l=1}^{m} b_{jl} \cdot y_l.$$

Лемма 2. *Если* $x_1, \dots, x_n$ *удовлетворяют соотношениям* (10), *то для любой пары упорядоченных наборов* $p = \{p_1, \dots, p_k\}$, $r = \{r_1, \dots, r_k\}$ *имеет место равенство*

$$(-1)^{|r|} \begin{vmatrix} f_{1p_1} & \dots & f_{1p_k} \\ \dots & \ddots & \dots \\ f_{kp_1} & \dots & f_{kp_k} \end{vmatrix} x[r_1, \dots, r_k] = (-1)^{|p|} \begin{vmatrix} f_{1r_1} & \dots & f_{1r_k} \\ \dots & \ddots & \dots \\ f_{kr_1} & \dots & f_{kr_k} \end{vmatrix} x[p_1, \dots, p_k], \tag{17}$$

где $|p| = p_1 + \dots + p_k$, $|r| = r_1 + \dots + r_k$.

Доказательство. Если оба определителя в (17) равны нулю, то равенство (17) очевидным образом выполняется. Поэтому предположим, что хотя бы один из них, скажем Δ_p, не равен нулю. Обозначим $t := n - k$, и пусть

$$x[r] = x_{j_1} \wedge \dots \wedge x_{j_t}, \quad x[p] = x_{i_1} \wedge \dots \wedge x_{i_t}.$$

Согласно лемме 1

$$x[r] = \frac{(-1)^{|j|+|i|}}{\Delta_p^t} \cdot \begin{vmatrix} M_{i_1 j_1} & \dots & M_{i_1 j_t} \\ \dots & \ddots & \dots \\ M_{i_t j_1} & \dots & M_{i_t j_t} \end{vmatrix} x_{i_1} \wedge \dots \wedge x_{i_t}. \tag{18}$$

где $|i| = i_1 + \dots + i_t$, $|j| = j_1 + \dots + j_t$. Теперь воспользуемся известным равенством Якоби (см. [7, разд. 14])

$$\widetilde{M} = D^{t-1} \cdot M',$$

где $\widetilde{M}$ и M' определяются по минору M порядка t определителя D следующим образом: M' — дополнительный минор к M, а $\widetilde{M}$ — ассоциированный минор (определитель из миноров M_{ij} для D). Обозначая в нашем случае для определителя $D = \det(a_{ij})$ через $D_p^r(a_{ij})$ минор из строк с номерами $i \in p$ и столбцов с номерами $j \in r$ соответственно, а через $D_{[p]}^{[r]}(a_{ij})$ — дополнительный минор, получим

$$D_{[p]}^{[r]}(M_{ij}) = D^{t-1} D_p^r(a_{ij}).$$

Напомним, что в определителе D строка с номером p_i — это i-я строка коэффициентов в (10), следовательно, $D_p^r(a_{ij}) = \Delta_r$. Далее, ввиду (13) $D = \Delta_p$, поэтому равенство (18) переписывается в виде

$$x[r] = \frac{(-1)^{|j|+|i|}}{\Delta^t} \cdot D_{[p]}^{[r]}(M_{ij}) x[p] = \frac{(-1)^{|p|+|r|}}{\Delta_p} \cdot \Delta_r x[p],$$

равносильном (17) (здесь мы воспользовались тем, что (p, i) и (r, j) — две дополнительные пары одного множества $\{1, \dots, n\}$ и потому $|p| + |i| = |r| + |j|$).

Лемма 3. *Предположим, что в* (10) $k = 1$, *причем*

$$f_{1p} \neq 0 \text{ и } \sum_{m=1}^{n} \alpha_m \cdot f_{1m} = 1.$$

Тогда

$$\sum_{m=1}^{n} (-1)^{m-1} \alpha_m \cdot x[m] = \frac{(-1)^{p-1}}{f_{1p}} \cdot x[p]. \tag{19}$$

Формула (19) получается с учетом (17):

$$\sum_{m=1}^{n} (-1)^{m-1} \alpha_m \cdot x[m] = \sum_{m=1}^{n} (-1)^{m-1} \alpha_m \cdot \frac{(-1)^{m+p} f_{1m}}{f_{1p}} \cdot x[p]$$
$$= \frac{(-1)^{p-1}}{f_{1p}} \cdot \sum_{m=1}^{n} \alpha_m f_{1m} \cdot x[p] = \frac{(-1)^{p-1}}{f_{1p}} \cdot x[p].$$

Лемма 4. *Пусть* $u_m = \sum\limits_{s=1}^{n} c_{ms} x_s$, $m = 1, \dots, n-k$, *и переменные* x_s *удовлетворяют условиям* (10) *и* (11). *Тогда*

$$u_1 \wedge \dots \wedge u_{n-k} = \frac{(-1)^{\frac{k(k+1)}{2} + |p|}}{\Delta_p} \cdot \begin{vmatrix} f_{11} & \dots & f_{1n} \\ \dots & \ddots & \dots \\ f_{k1} & \dots & f_{kn} \\ c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \dots & \ddots & \dots \\ c_{(n-k)1} & \dots & c_{(n-k)n} \end{vmatrix} \cdot x[p_1, \dots, p_k]. \tag{20}$$

Для доказательства обозначим $n-k$ через t. По определению

$$u_1\wedge\dots\wedge u_t=\sum_{1\leqslant s_1<\dots<s_t\leqslant n}\begin{vmatrix} c_{1s_1} & \dots & c_{1s_t}\\ \dots & \ddots & \dots\\ c_{ts_1} & \dots & c_{ts_t}\end{vmatrix} x_{s_1}\wedge\dots\wedge x_{s_t}.$$

Аналогично тому, как по $(k\times n)$-матрице (f_{ij}) мы строили определитель $D=\det(a_{ij})$, построим определитель $\det(b_{ms})$ по $(t\times n)$-матрице (c_{ms}). Отметим, что каждому набору $1\leqslant s_1<\dots<s_{n-k}\leqslant n$ однозначно соответствует дополнительный набор $1\leqslant r_1<\dots<r_k\leqslant n$, и поэтому

$$u_1\wedge\dots\wedge u_t=\sum_{1\leqslant r_1<\dots<r_k\leqslant n} D^{[r_1\dots r_k]}_{[1\dots k]}(b_{ms})\cdot x[r_1,\dots,r_k].$$

По лемме 2 и формуле Лапласа получаем

$$\begin{aligned} &u_1\wedge\dots\wedge u_t\\ &=\sum_{1\leqslant r_1<\dots<r_k\leqslant n} D^{[r_1\dots r_k]}_{[1\dots k]}(b_{ms})\cdot\frac{(-1)^{|p|+|r|}}{\Delta_p}\cdot\begin{vmatrix} f_{1r_1} & \dots & f_{1r_k}\\ \dots & \ddots & \dots\\ f_{kr_1} & \dots & f_{kr_k}\end{vmatrix} x[p_1,\dots,p_k]\\ &=\frac{(-1)^{\frac{(1+k)k}{2}}\cdot(-1)^{|p|}}{\Delta_p}\cdot\begin{vmatrix} f_{11} & \dots & f_{1n}\\ \dots & \ddots & \dots\\ f_{k1} & \dots & f_{kn}\\ c_{11} & \dots & c_{1n}\\ \dots & \ddots & \dots\\ c_{(n-k)1} & \dots & c_{(n-k)n}\end{vmatrix}\cdot x[p_1,\dots,p_k],\end{aligned}$$

т. е. требуемую формулу (20).

Теперь мы можем приступить к непосредственному доказательству предложения. Будем стартовать с известной формулы Коши — Фантаппье — Лере (см. [1, 8, 9]): *пусть G — ограниченная область в $\mathbb{C}^n$ с кусочно-регулярной границей, и пусть для фиксированного $z\in G$ определена непрерывно дифференцируемая по $\zeta\in\partial G$ вектор-функция $w(\zeta,z)=(w_1(\zeta,z),\dots,w_n(\zeta,z))$, так что для любого $\zeta\in\partial G$ имеет место неравенство*

$$\langle w(\zeta,z),\zeta-z\rangle\neq 0; \tag{21}$$

тогда для любой функции $f(z)$, голоморфной в G и непрерывной в $\overline{G}$, имеет место формула

$$f(z)=\frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\int\limits_{\zeta\in\partial G} f(\zeta)\cdot\frac{\sum\limits_{m=1}^{n}(-1)^{m-1}w_m(\zeta,z)\cdot dw[m]}{\langle w(\zeta,z),\zeta-z\rangle^n}\wedge d\zeta. \tag{22}$$

Для областей с гладкими границами эта формула имеет завершенный вид, в то время как для областей с кусочно-регулярными границами, как правило, ее можно привести к более совершенному виду. Мы будем следовать Г. М. Хенкину [9], предложившему схему указанного приведения. Чтобы кратко пояснить суть этой схемы, уточним, что в формулировке результата Коши — Фантаппье — Лере непрерывная дифференцируемость по $\zeta\in\partial G$ вектор-функции $w(\zeta,z)$ предполагает ее непрерывность на границе ∂G и гладкость на каждом гладком куске $S^l \subset \partial G$ коразмерности 1. Зачастую в конкретных ситуациях на кусках S^l имеются естественные кандидаты $w^l(\zeta, z)$ на место координат вектор-функции $w(\zeta, z)$ с условием (21), но они не всегда составляют непрерывную вектор-функцию на всей границе. Поэтому на основе идеи Лере в работах Норге и Г. М. Хенкина было предложено рассмотреть на стыках $S^J = S^{j_1} \cap \dots \cap S^{j_k}$ коразмерности k выпуклые комбинации соответствующих кандидатов для кусков $S^{j_1}, \dots, S^{j_k}$. Для случая, когда полиэдральная область

$$G = \{z : g^l(z, \bar{z}) < 0,\ l = 1, \dots, N\}$$

является линейно выпуклой, в качестве естественного кандидата $w^l(\zeta, z)$ на грани S^l является градиент ∇g^l определяющей S^l функции, который мы возьмем с подходящим нормировочным множителем:

$$w^l(\zeta, z) = \frac{\nabla g^l}{\langle \nabla g^l, \zeta - z\rangle}.$$

Беря для ребра S^J выпуклую комбинацию

$$w^J(\zeta, z, \lambda) = \sum_{t=1}^{k} \lambda_t \cdot \frac{\nabla g^{j_t}}{\langle \nabla g^{j_t}, \zeta - z\rangle}, \tag{23}$$

где $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ пробегает $(k-1)$-мерный симплекс

$$\sigma_{k-1} = \{\lambda : \lambda_1 \geqslant 0, \dots, \lambda_k \geqslant 0; \lambda_1 + \dots + \lambda_k = 1\},$$

согласно теореме Лере [8] получаем (см. [9, п. 4.5])

$$f(z) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \sum_{k=1}^{n} \sum_{\sharp J = k} \int\limits_{S^J \times \sigma_{k-1}} f(\zeta) \sum_{m=1}^{n} (-1)^{m-1} w_m^J(\zeta, z, \lambda) dw^J(\zeta, z, \lambda)[m] \wedge d\zeta. \tag{24}$$

В формуле (24) в каждом слагаемом под интегралом стоит дифференциальная форма степени $2n-1$ соответственно, интегрирование ведется по цепи $S^J \times \sigma_{k-1}$ размерности $2n-1$. Фактически в (24) подынтегральные формы имеют такой же вид, как в (24), с заменой $w(\zeta, z)$ на $w^J(\zeta, z, \lambda)$, поскольку последние удовлетворяют равенству

$$\langle w^J(\zeta, z, \lambda), \zeta - z\rangle = 1 \tag{25}$$

для $(\zeta, z, \lambda) \in \partial G \times G \times \sigma_{k-1}$.

Уравнение $\langle \nabla g^{j_t}, \zeta - z\rangle = 0$ по функции g^{j_t} определяет комплексную гиперплоскость, содержащую точку ζ, причем если ζ принадлежит ребру $S^{j_1 \cdots j_k}$, то указанная гиперплоскость является предельной касательной гиперплоскостью к грани S^{j_t}. Поэтому в силу линейной выпуклости области G знаменатели в (23) не равны нулю для всякого $z \in G$, тем самым вектор-функции $w^J(\zeta, z, \lambda)$ определены при $z \in G$ и непрерывно дифференцируемы по $\zeta \in S^J = S^{j_1 \cdots j_k}$.

Очевидно,

$$dw_m^J(\zeta, z, \lambda) = \sum_{t=1}^{k} \frac{g_m^{j_t}}{\langle \nabla g^{j_t}, \zeta - z\rangle} d\lambda_t + \sum_{s=1}^{n} \big(w_m^J(\zeta, z, \lambda)\big)'_{\bar{s}} d\bar{\zeta}_s + \sum_{s=1}^{n} \big(w_m^J(\zeta, z, \lambda)\big)'_{s} d\zeta_s. \tag{26}$$

Из (25) следует, что для каждого $s = 1, \ldots, n$

$$\sum_{m=1}^{n} \big(w_m^J(\zeta, z, \lambda)\big)'_{\bar{s}} \cdot (\zeta_m - z_m) = 0. \tag{27}$$

Кроме того, для $(\zeta, \lambda) \in S^J \times \sigma_{k-1}$ выполняется система равенств

$$\begin{cases} g_1^{j_1} d\bar{\zeta}_1 + \cdots + g_n^{j_1} d\bar{\zeta}_n + g_1^{j_1} d\zeta_1 + \cdots + g_n^{j_1} d\zeta_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ g_1^{j_k} d\bar{\zeta}_1 + \cdots + g_n^{j_k} d\bar{\zeta}_n + g_1^{j_k} d\zeta_1 + \cdots + g_n^{j_k} d\zeta_n = 0, \\ d\lambda_1 + \cdots + d\lambda_k = 0. \end{cases} \tag{28}$$

Полагая в лемме 3

$$\alpha_m = w_m^J(\zeta, z, \lambda), x_m = dw_m^J(\zeta, z, \lambda), \quad f_{1m} = \zeta_m - z_m,$$

и учитывая при этом, что величины α_m и f_{1m} будут связаны соотношением (25), получим, что в точках, где $\zeta_p \neq z_p$,

$$\sum_{m=1}^{n} (-1)^{m-1} w_m^J(\zeta, z, \lambda) dw^J(\zeta, z, \lambda)[m] \wedge d\zeta = \frac{(-1)^{p-1}}{\zeta_p - z_p} \cdot dw^J(\zeta, z, \lambda)[p] \wedge d\zeta. \tag{29}$$

Далее, вместо выражений

$$w_m^J(\zeta, z, \lambda), \quad dw^J(\zeta, z, \lambda)[m], \quad \big(w_m^J(\zeta, z, \lambda)\big)'_{\bar{s}}, \quad \big(w_m^J(\zeta, z, \lambda)\big)'_{s}$$

будем соответственно писать $w_m, dw[m], (w_m)'_{\bar{s}}, (w_m)'_s$.

Так как граница области G кусочно-регулярна, то в окрестности каждой точки $\zeta \in S^J = S^{j_1 \ldots j_k}$ найдется ненулевой определитель вида

$$\begin{vmatrix} 0 & g_{\bar{p}_1}^{j_1} & \ldots & g_{\bar{p}_k}^{j_1} \\ \ldots & \ldots & \ddots & \ldots \\ 0 & g_{\bar{p}_1}^{j_k} & \ldots & g_{\bar{p}_k}^{j_k} \\ 1 & 0 & \ldots & 0 \end{vmatrix} =: (-1)^{k+2} \cdot \Delta_{j_1 \ldots j_k}^{p_1 \ldots p_k}, \tag{30}$$

составленный из столбцов коэффициентов (28) при дифференциалах $d\lambda_q$, $d\bar{\zeta}_{p_1}, \ldots, d\bar{\zeta}_{p_k}$, где q — любое из чисел $1, \ldots, k$.

Рассмотрим теперь соотношения (28) в качестве системы (16), полагая

$$x_1 = d\lambda_1, \ldots, x_k = d\lambda_k, \quad x_{k+1} = d\bar{\zeta}_1, \ldots, x_{k+n} = d\bar{\zeta}_n, \quad y_1 = d\zeta_1, \ldots, y_n = d\zeta_n.$$

Поскольку в выражениях (29) присутствует произведение $d\zeta$ всех голоморфных дифференциалов $d\zeta_i$, на основе замечания к лемме 1 мы можем рассматривать выражения в (26) и (28) по модулю дифференциалов $d\zeta_i$.

По лемме 4 с учетом (26) и (28) получаем

$$\frac{(-1)^{p-1}}{\zeta_p - z_p}\cdot dw[p]\wedge d\zeta = \frac{(-1)^{p-1}}{\zeta_p - z_p}\cdot\frac{(-1)^{1+\dots+(k+1)+q+(p_1+k)+\dots+(p_k+k)}}{(-1)^{k+2}\cdot\Delta^{p_1\dots p_k}_{j_1\dots j_k}}$$
$$\times\begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & g^{j_1}_{\bar 1} & \dots & g^{j_1}_{\bar n}\\ \dots & \ddots & \dots & \dots & \ddots & \dots\\ 0 & \dots & 0 & g^{j_k}_{\bar 1} & \dots & g^{j_k}_{\bar n}\\ 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0\\ \frac{g^{j_1}_1}{\langle\nabla g^{j_1},\zeta-z\rangle} & \dots & \frac{g^{j_k}_1}{\langle\nabla g^{j_k},\zeta-z\rangle} & (w_1)'_{\bar 1} & \dots & (w_1)'_{\bar n}\\ \dots & \ddots & \dots & \dots & \ddots & \dots\\ \frac{g^{j_1}_{p-1}}{\langle\nabla g^{j_1},\zeta-z\rangle} & \dots & \frac{g^{j_k}_{p-1}}{\langle\nabla g^{j_k},\zeta-z\rangle} & (w_{p-1})'_{\bar 1} & \dots & (w_{p-1})'_{\bar n}\\ \frac{g^{j_1}_{p+1}}{\langle\nabla g^{j_1},\zeta-z\rangle} & \dots & \frac{g^{j_k}_{p+1}}{\langle\nabla g^{j_k},\zeta-z\rangle} & (w_{p+1})'_{\bar 1} & \dots & (w_{p+1})'_{\bar n}\\ \dots & \ddots & \dots & \dots & \ddots & \dots\\ \frac{g^{j_1}_n}{\langle\nabla g^{j_1},\zeta-z\rangle} & \dots & \frac{g^{j_k}_n}{\langle\nabla g^{j_k},\zeta-z\rangle} & (w_n)'_{\bar 1} & \dots & (w_n)'_{\bar n}\end{vmatrix} d\lambda[q]\wedge d\bar\zeta[p_1,\dots,p_k]\wedge d\zeta. \tag{31}$$

Используя (27), запишем $(k+1)$-строку определителя в (31) в виде

$$\frac{\langle\nabla g^{j_1},\zeta-z\rangle}{\langle\nabla g^{j_1},\zeta-z\rangle},\dots,\frac{\langle\nabla g^{j_k},\zeta-z\rangle}{\langle\nabla g^{j_k},\zeta-z\rangle},\sum_{m=1}^{n}(w)'_{\bar 1}\cdot(\zeta_m-z_m),\dots,\sum_{m=1}^{n}(w)'_{\bar n}\cdot(\zeta_m-z_m),$$

затем, вычитая из этой строки линейную комбинацию следующих за ней строк с коэффициентами $\zeta_1-z_1,\dots[p]\dots,\zeta_n-z_n$ соответственно, из (31) получим

$$\frac{(-1)^{p-1}}{\zeta_p - z_p}\cdot dw[p]\wedge d\zeta = \frac{(-1)^{\frac{k(k+1)}{2}}(-1)^k(-1)^{q-1}(-1)^{p_1+\dots+p_k}}{\Delta^{p_1\dots p_k}_{j_1\dots j_k}}$$
$$\times\begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & g^{j_1}_{\bar 1} & \dots & g^{j_1}_{\bar n}\\ \dots & \ddots & \dots & \dots & \ddots & \dots\\ 0 & \dots & 0 & g^{j_k}_{\bar 1} & \dots & g^{j_k}_{\bar n}\\ \frac{g^{j_1}_1}{\langle\nabla g^{j_1},\zeta-z\rangle} & \dots & \frac{g^{j_k}_1}{\langle\nabla g^{j_k},\zeta-z\rangle} & (w_1)'_{\bar 1} & \dots & (w_1)'_{\bar n}\\ \dots & \ddots & \dots & \dots & \ddots & \dots\\ \frac{g^{j_1}_n}{\langle\nabla g^{j_1},\zeta-z\rangle} & \dots & \frac{g^{j_k}_n}{\langle\nabla g^{j_k},\zeta-z\rangle} & (w_n)'_{\bar 1} & \dots & (w_n)'_{\bar n}\end{vmatrix} d\lambda[q]\wedge d\bar\zeta[p_1,\dots,p_k]\wedge d\zeta. \tag{32}$$

Подставляя в (32) выражения для производных

$$(w_m(\zeta,z,\lambda))'_{\bar s} = \sum_{t=1}^{k}\lambda_t\cdot\left(\frac{g^{j_t}_{m\bar s}}{\langle\nabla g^{j_t},\zeta-z\rangle} - \frac{g^{j_t}_m}{\langle\nabla g^{j_t},\zeta-z\rangle^2}\cdot\langle\nabla g^{j_t},\zeta-z\rangle'_{\bar s}\right)$$

и прибавляя к $(k+s)$-му столбцу линейную комбинацию первых k столбцов с коэффициентами $\lambda_t\langle\nabla g^{j_t},\zeta-z\rangle'_{\bar{s}}$, $t=1,\ldots,k$, придем к равенству

$$\frac{(-1)^{p-1}}{\zeta_p-z_p}\cdot dw[p]\wedge d\zeta=\frac{(-1)^{\frac{k(k+1)}{2}}(-1)^{q-1}(-1)^{k}(-1)^{p_1+\cdots+p_k}}{\Delta^{p_1\cdots p_k}_{j_1\cdots j_k}}\cdot\frac{1}{\prod\limits_{t=1}^{k}\langle\nabla g^{j_t},\zeta-z\rangle}$$

$$\times\begin{vmatrix} 0 & \ldots & 0 & g^{j_1}_{\bar 1} & \ldots & g^{j_1}_{\bar n}\\ \ldots & \ddots & \ldots & \ldots & \ddots & \ldots\\ 0 & \ldots & 0 & g^{j_k}_{\bar 1} & \ldots & g^{j_k}_{\bar n}\\ g^{j_1}_{1} & \ldots & g^{j_k}_{1} & \sum\limits_{t=1}^{k}\lambda_t\cdot\frac{g^{j_t}_{1\bar 1}}{\langle\nabla g^{j_t},\zeta-z\rangle} & \ldots & \sum\limits_{t=1}^{k}\lambda_t\cdot\frac{g^{j_t}_{1\bar n}}{\langle\nabla g^{j_t},\zeta-z\rangle}\\ \ldots & \ddots & \ldots & \ldots & \ddots & \ldots\\ g^{j_1}_{n} & \ldots & g^{j_k}_{n} & \sum\limits_{t=1}^{k}\lambda_t\cdot\frac{g^{j_t}_{n\bar 1}}{\langle\nabla g^{j_t},\zeta-z\rangle} & \ldots & \sum\limits_{t=1}^{k}\lambda_t\cdot\frac{g^{j_t}_{n\bar n}}{\langle\nabla g^{j_t},\zeta-z\rangle}\end{vmatrix}$$

$$\times\, d\lambda[q]\wedge d\bar{\zeta}[p_1,\ldots,p_k]\wedge d\zeta.$$

Теперь замечаем, что вычисленное нами выражение (29) не зависит от p, а для каждой точки $\zeta\neq z$ мы можем написать представление вида (29) с некоторым $p\in(1,\ldots,n)$. Поэтому требуемая формула (6) с пояснениями (7)–(9) получается из представлений (24) для $f(z)$ и (2) для ω_J.

3. Доказательство основной теоремы

Для доказательства основной теоремы нам необходимо реализовать интегрирование по λ в формуле (7). Для этого разложим определитель (8) по первым k строкам. Имеем

$$R^{j_1\cdots j_k}(\zeta,\bar\zeta,\lambda)=-\begin{vmatrix} 0 & \ldots & 0 & g^{j_1}_{\bar 1} & \ldots & g^{j_1}_{\bar n}\\ \ldots & \ddots & \ldots & \ldots & \ddots & \ldots\\ 0 & \ldots & 0 & g^{j_k}_{\bar 1} & \ldots & g^{j_k}_{\bar n}\\ g^{j_1}_{1} & \ldots & g^{j_k}_{1} & c_{11} & \ldots & c_{1n}\\ \ldots & \ddots & \ldots & \ldots & \ddots & \ldots\\ g^{j_1}_{n} & \ldots & g^{j_k}_{n} & c_{n1} & \ldots & c_{nn}\end{vmatrix}$$

$$=-\sum_{1\leqslant r_1<\cdots<r_k\leqslant n}(-1)^{(1+\cdots+k)+(k+r_1+\cdots+k+r_k)}\overline{\Delta}^{r_1\cdots r_k}_{j_1\cdots j_k}$$

$$\times\begin{vmatrix} g^{j_1}_{1} & \ldots & g^{j_k}_{1} & c_{1s_1} & \ldots & c_{1s_{n-k}}\\ \ldots & \ddots & \ldots & \ldots & \ddots & \ldots\\ g^{j_1}_{n} & \ldots & g^{j_k}_{n} & c_{ns_1} & \ldots & c_{ns_{n-k}}\end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{\frac{(k+1)(k+2)}{2}}\sum_{1\leqslant r_1<\cdots<r_k\leqslant n}(-1)^{|r|}\overline{\Delta}^{r_1\cdots r_k}_{j_1\cdots j_k}$$

$$\times\begin{vmatrix} g^{j_1}_{1} & \ldots & g^{j_k}_{1} & c_{1s_1} & \ldots & c_{1s_{n-k}}\\ \ldots & \ddots & \ldots & \ldots & \ddots & \ldots\\ g^{j_1}_{n} & \ldots & g^{j_k}_{n} & c_{ns_1} & \ldots & c_{ns_{n-k}}\end{vmatrix},$$

где $r_1,\ldots,r_k$ дополняют $s_1,\ldots,s_{n-k}$ до набора $1,\ldots,n$.

В силу (9) каждый определитель в последней сумме представим в виде

$$\begin{vmatrix} g_1^{j_1} & \dots & g_1^{j_k} & c_{1s_1} & \dots & c_{1s_{n-k}} \\ \dots & \ddots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ g_n^{j_1} & \dots & g_n^{j_k} & c_{ns_1} & \dots & c_{ns_{n-k}} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} g_1^{j_1} & \dots & g_1^{j_k} & \sum\limits_{t=1}^{k} \lambda_t \cdot \frac{g_{1\bar{s}_1}^{j_t}}{\langle \nabla g^{j_t}, \zeta - z\rangle} & \dots & \sum\limits_{t=1}^{k} \lambda_t \cdot \frac{g_{1\bar{s}_{n-k}}^{j_t}}{\langle \nabla g^{j_t}, \zeta - z\rangle} \\ \dots & \ddots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ g_n^{j_1} & \dots & g_n^{j_k} & \sum\limits_{t=1}^{k} \lambda_t \cdot \frac{g_{n\bar{s}_1}^{j_t}}{\langle \nabla g^{j_t}, \zeta - z\rangle} & \dots & \sum\limits_{t=1}^{k} \lambda_t \cdot \frac{g_{n\bar{s}_{n-k}}^{j_t}}{\langle \nabla g^{j_t}, \zeta - z\rangle} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{t_1=1}^{k} \dots \sum_{t_{n-k}=1}^{k} \frac{\lambda_{t_1} \cdot \ldots \cdot \lambda_{t_{n-k}}}{\langle \nabla g^{j_{t_1}}, \zeta - z\rangle \cdot \ldots \cdot \langle \nabla g^{j_{t_{n-k}}}, \zeta - z\rangle}$$

$$\times \begin{vmatrix} g_1^{j_1} & \dots & g_1^{j_k} & g_{1\bar{s}_1}^{j_{t_1}} & \dots & g_{1\bar{s}_{n-k}}^{j_{t_{n-k}}} \\ \dots & \ddots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ g_n^{j_1} & \dots & g_n^{j_k} & g_{n\bar{s}_1}^{j_{t_1}} & \dots & g_{n\bar{s}_{n-k}}^{j_{t_{n-k}}} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{|I|=n-k} \frac{\lambda_1^{i_1} \cdot \ldots \cdot \lambda_k^{i_k}}{\langle \nabla g^{j_1}, \zeta - z\rangle^{i_1} \cdot \ldots \cdot \langle \nabla g^{j_k}, \zeta - z\rangle^{i_k}} \sideset{}{''}\sum_{t_1 \dots t_{n-k}} D_{t_1 \dots t_{n-k}}(J, s_1, \dots, s_{n-k}),$$

где

$$D_{t_1 \dots t_{n-k}}(J, s_1, \dots, s_{n-k}) = \det(\nabla g^{j_1}, \dots, \nabla g^{j_k}, (\nabla g^{j_{t_1}})_{\bar{s}_1}, \dots, (\nabla g^{j_{t_{n-k}}})_{\bar{s}_{n-k}}),$$

а $\sideset{}{''}\sum\limits_{t_1 \dots t_{n-k}}$ означает суммирование, при котором каждое $t_1, \dots, t_{n-k}$ может меняться от 1 до k так, что в наборе $(t_1, \dots, t_{n-k})$ число 1 встречается i_1 раз, число 2 встречается i_2 раз, и т. д., число k встречается i_k раз. Таким образом,

$$R^{j_1 \cdots j_k}(\zeta, \bar{\zeta}, \lambda) = \sum_{|I|=n-k} \frac{\lambda_1^{i_1} \cdot \ldots \cdot \lambda_k^{i_k}}{\langle \nabla g^{j_1}, \zeta - z\rangle^{i_1} \cdot \ldots \cdot \langle \nabla g^{j_k}, \zeta - z\rangle^{i_k}} L_I(g^{j_1}, \dots, g^{j_k}), \quad (33)$$

где $L_I(g^{j_1}, \dots, g^{j_k})$ — смешанный левиан порядка $I = (i_1, \dots, i_k)$ семейства функций $g^{j_1}, \dots, g^{j_k}$, поскольку по определению

$$L_I(g^{j_1}, \dots, g^{j_k})$$
$$= \sum_{1 \leqslant r_1 < \dots < r_k \leqslant n} (-1)^{\frac{(k+1)(k+2)}{2}} (-1)^{r_1 + \dots + r_k} \Delta_{j_1 \dots j_k}^{r_1 \dots r_k} \sideset{}{''}\sum_{t_1 \dots t_{n-k}} D_{t_1 \dots t_{n-k}}(J, s_1, \dots, s_{n-k}).$$

Непосредственным вычислением, используя формулу

$$\int_0^b (b - \mu)^q \cdot \mu^p \, d\mu = \frac{q! \cdot p! \cdot b^{p+q+1}}{(p + q + 1)!},$$

получаем

$$(-1)^{q-1} \cdot \int\limits_{\substack{\lambda_1 + \dots + \lambda_k = 1 \\ \lambda_1 \geqslant 0, \dots, \lambda_k \geqslant 0}} \lambda_1^{i_1} \cdot \lambda_2^{i_2} \cdot \ldots \cdot \lambda_k^{i_k} \, d\lambda[q] = \frac{i_1! \cdot i_2! \cdot \ldots \cdot i_k!}{(i_1 + i_2 + \dots + i_k + k - 1)!}. \quad (34)$$

Тогда с учетом (33) и (34) выражение (7) принимает вид

$$\mu^{j_1\cdots j_k} = \frac{(-1)^{q-1}}{\prod\limits_{t=1}^{k}\langle\nabla g^{j_t}, \zeta - z\rangle} \int\limits_{\substack{\lambda_1+\cdots+\lambda_k=1\\ \lambda_1\geqslant 0,\ldots,\lambda_k\geqslant 0}} R^{j_1\cdots j_k}(\zeta,\bar{\zeta},\lambda)d\lambda[q]$$

$$= \frac{1}{\prod\limits_{t=1}^{k}\langle\nabla g^{j_t}, \zeta - z\rangle} \cdot \sum_{|I|=n-k} \frac{i_1!\cdot i_2!\cdot\ldots\cdot i_k!\cdot L_I(g^{j_1},\ldots,g^{j_k})}{(n-1)!\cdot\langle\nabla g^{j_1},\zeta-z\rangle^{i_1}\cdot\ldots\cdot\langle\nabla g^{j_k},\zeta-z\rangle^{i_k}}$$

$$= \sum_{|I|=n-k} \frac{i_1!\cdot i_2!\cdot\ldots\cdot i_k!\cdot L_I(g^{j_1},\ldots,g^{j_k})}{(n-1)!\cdot\langle\nabla g^{j_1},\zeta-z\rangle^{i_1+1}\cdot\ldots\cdot\langle\nabla g^{j_k},\zeta-z\rangle^{i_k+1}}.$$

Отсюда по формуле (6) следует утверждение теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Айзенберг Л. А., Южаков А. П.* Интегральные представления и вычеты в многомерном комплексном анализе. Наука: Новосибирск, 1979.
2. *Andersson M., Passare M., Sigurdsson R.* Complex convexity and analytic functionals. Basel; Boston; Berlin: Birkhäuser, 2004. (Progr. Math.; 225).
3. *Буземан Г.* Выпуклые поверхности. М.: Наука, 1968.
4. *Александров А. Д.* Смешанные дискриминанты и смешанные объемы // Мат. сб. 1938. Т. 3, № 4. С. 227–251.
5. *Клейн Ф.* Элементарная математика с точки зрения высшей. Т II. Геометрия. М.: Наука, 1987.
6. *Цих А. К.* Многомерные вычеты и их применения. Новосибирск: Наука, 1988.
7. *Gradshtein I. S., Ryzhik I. M.* Table of integrals, series and products. New York: Acad. Press, 1980.
8. *Лере Ж.* Дифференциальное и интегральное исчисление на комплексном аналитическом многообразии. М.: Мир, 1961.
9. *Хенкин Г. М.* Метод интегральных представлений в комплексном анализе // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНИТИ, 1985. Т. 7. С. 23–125. (Итоги науки и техники).

Статья поступила 10 ноября 2004 г.

Кривоколеско Вячеслав Павлович
Красноярский гос. технологический университет, пр. Мира, 82, Красноярск 660049
antonk@ktk.ru

Цих Август Карлович
Красноярский гос. университет, математический факультет,
пр. Свободный, 79, Красноярск 660041
tsikh@lan.krasu.ru