Сибирский математический журнал
Июль—август, 2005. Том 46, № 4

УДК 517.544

ЭФФЕКТИВНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КАРЛЕМАНА ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ГРУПП РАСХОДЯЩЕГОСЯ ТИПА

Е. П. Аксентьева, Ф. Н. Гарифьянов

Аннотация: Рассматривается фуксова группа первого рода, содержащая только гиперболические преобразования. Получено эффективное решение (выражающееся в явном виде через преобразования группы) краевой задачи Карлемана на фундаментальном многоугольнике, где обратный сдвиг индуцирован порождающими преобразованиями группы. При этом используется автоморфная форма, построенная в [1]. Указана возможность обобщения этого метода на случай групп, содержащих эллиптические и параболические преобразования.

Ключевые слова: краевые задачи для аналитических функций, группы дробно-линейных преобразований.

1. Решение краевой задачи Римана для автоморфных функций и сводящейся к ней задачи Карлемана впервые получено в работах [2, 3] для случая конечнопорожденных функциональных групп дробно-линейных преобразований. Общее решение выражалось через автоморфный аналог ядра Коши, существование которого доказал еще Вейерштрасс [4]. В работах [5, с. 179–232; 6] рассмотрены элементарные группы, а также группы дробно-линейных преобразований сходящегося типа:

$$\sigma_0(z) = z, \quad \sigma_k(z) = \frac{\alpha_k z + \beta_k}{\gamma_k z + \delta_k}, \quad \alpha_k\delta_k - \beta_k\gamma_k = 1, \quad \gamma_k \neq 0,\ k = 1, 2, \dots, \tag{1}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left|\gamma_k^{-2}\right| < \infty. \tag{2}$$

Здесь решение задачи Римана построено эффективно в том смысле, что оно выражается в явном виде через преобразования группы (подробнее об этих задачах см. в обзорной работе [7]). Для групп расходящегося типа, когда неравенство (2) не выполняется, ранее предложенные методы не позволяют получить решение краевых задач в явном виде. В этом случае расходится квазиавтоморфный аналог ядра Коши

$$K(z,\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma_k'(\tau)}{\sigma_k(\tau) - z},$$

а именно он является основным аппаратом исследования задачи Римана для групп (1), (2).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 02–01–00914).

В данной работе мы предлагаем устранить возникший пробел, вводя новый метод исследования на примере решения краевой задачи Карлемана в случае фуксовой группы первого рода, которая является группой расходящегося типа. При этом используются автоморфная форма измерения $(-4m)$, построенная в [1], и метод интегральных уравнений, примененный в [8, 9].

2. Пусть Γ — фуксова группа первого рода гиперболических дробно-линейных преобразований (1) с главной окружностью ∂U, $U = \{z : |z| < 1\}$. Такие группы позволяют униформизировать любую алгебраическую функцию, риманова поверхность которой имеет род $g \geq 2$ [10, с. 257]. Рассматриваемая группа является группой расходящегося типа [11, с. 226], но для нее выполняется неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left|\gamma_k^{-4}\right| < \infty. \tag{3}$$

Границу ∂D внутренности ее фундаментального многоугольника $D \subset U$ можно привести к виду с расположением сторон [12, с. 257]:

$$a_1 b_1 a_1' b_1' \ldots a_g b_g a_g' b_g', \quad g \geq 2.$$

Здесь стороны a_j, a_j'; b_j, b_j', $j = \overline{1, g}$, попарно конгруэнтны и связаны порождающими группу Γ преобразованиями σ_j, $j = \overline{1, 2g}$. В дальнейшем попарно конгруэнтные стороны будем обозначать также через l_j, l_j', $j = \overline{1, 2g}$, а вершины — через t_j, $j = \overline{1, 4g}$. Каждая вершина является общей для четного числа $4g$ фундаментальных конгруэнтных многоугольников, сходящихся в этой точке.

Пусть функция $\alpha(t)$ на сторонах l_j, $j = \overline{1, 2g}$, совпадает с порождающими преобразованиями группы: $\alpha(l_j) = l_j'$, и такова, что $\alpha[\alpha(t)] = t$. Введем инволютивный оператор

$$W_m : \varphi(t) \to [\alpha'(t)]^m \varphi[\alpha(t)], \quad t \in \partial D \backslash \{t_j\},\ m \in \mathbb{Z}.$$

Рассмотрим следующую задачу Карлемана о «скачке».

В области D найти аналитическую функцию $\Phi(z)$, непрерывную в $\overline{D}$, кроме вершин t_j, $j = \overline{1, 4g}$, в которых функция $\Phi(z)$ допускает логарифмические особенности, и удовлетворяющую граничному условию

$$\Phi^+ = W_0 \Phi^+ + h, \tag{4}$$

где функция $h(t) \in H_0(\partial D)$ [13, с. 32] *с разрывами первого рода в вершинах.*

Заметим, что задача Карлемана в общем случае в силу известного метода факторизации Ф. Д. Гахова сводится к задаче (4).

Задача (4) эквивалентна рассмотренной в [14] задаче Римана о скачке на римановой поверхности рода g, полученной отождествлением конгруэнтных сторон границы ∂D. Необходимыми и достаточными условиями разрешимости задачи (4) являются

$$h + W_0 h = 0, \tag{5}$$

$$\int_{\partial D} h^+(t) \eta_j(t)\, dt = 0, \quad j = \overline{1, g}, \tag{6}$$

где $\eta_j(z)$, $j = \overline{1, g}$, — все линейно независимые аналитические в D и непрерывные в $\overline{D}$ решения однородной союзной краевой задачи $W_1 \eta^+ = \eta^+$. Будем считать, что условия (5), (6) выполнены. Достаточно найти одно решение задачи (4), так как общее решение определено с точностью до произвольной постоянной.

При исследовании задачи (4) используем [1] автоморфную форму $f_{2m}(z)$ веса $(-4m)$. Для этого разобьем совокупность преобразований (1) на два непересекающихся множества. Пусть

$$\sigma_k = \sigma_{j_1}^{\pm k_1} \sigma_{j_2}^{\pm k_2} \dots \sigma_{j_n}^{\pm k_n},$$

где $k_1, k_2, \dots, k_n$ — натуральные числа и $1 \le j_1, j_2, \dots, j_n \le 2g$. Рассмотрим число $\lambda_k = k_1 + k_2 + \dots + k_n$. Таких чисел бесконечно много, но при фиксированном k все они либо четны, либо нечетны. Впредь под числом λ_k будем подразумевать наименьшее из таких чисел. Преобразование $\sigma_k(z)$ назовем преобразованием первого типа ($\sigma_k \in \mathrm{I}$), если число λ_k нечетно. Тогда для функции

$$f_{2m}(z) = \sum_{\sigma_k \in \mathrm{I}} \left[\frac{\sigma_k'(z)}{[\sigma_k(z) - z]^2} \right]^m, \quad m \ge 2,$$

справедливы равенства

$$f_{2m}[\sigma_j(z)] = (\gamma_j z + \delta_j)^{4m} f_{2m}(z) \Longleftrightarrow f_{2m}^+ = W_{2m} f_{2m}^+. \tag{7}$$

Рассмотрим некоторые свойства функции $f_{2m}(z)$ для фуксовой группы Γ первого рода, содержащей только гиперболические преобразования.

1°. *При $k \to \infty$ существует такая последовательность $m_k \to \infty$, что $f_{2m_k}(z) \not\equiv 0$.*

Доказательство. Поскольку гиперболические преобразования фуксовой группы первого рода имеют неподвижные точки только на главной окружности ∂U, то $\beta_k \neq 0$. Представим функцию $f_{2m}(z)$ в виде

$$f_{2m}(z) = \sum_{\sigma_k \in \mathrm{I}} \frac{1}{[\gamma_k z^2 + z(\delta_k - \alpha_k) - \beta_k]^{2m}},$$

откуда

$$f_{2m}(0) = \sum_{\sigma_k \in \mathrm{I}} \frac{1}{\beta_k^{2m}}.$$

Остальное следует из леммы 1.

Лемма 1. *Пусть*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \theta_k^m = 0 \quad \forall m = 1, 2, 3, \dots, \ \theta_k \in \mathbb{C}, \tag{8}$$

причем ряд в (8) при $m = 1$ сходится абсолютно. Тогда $\theta_k = 0$ при любом k.

Доказательство проведем от противного. Так как $\theta_k \to 0$, существуют числа θ_k с наибольшим модулем ($k = k_0, k_1, \dots, k_n$). Пусть вначале такой член ряда единственный ($k = k_0$). Разделим равенство (8) на $\theta_{k_0}^m$:

$$1 + \sum_{k \neq k_0} (\theta_k / \theta_{k_0})^m = 0.$$

Переходя к пределу при $m \to \infty$, получим противоречие. Если таких членов ряда несколько, то

$$\lim \left(1 + \sum_{k=1}^{n} e^{2\pi i \alpha_k m} \right) = 0$$

при $m \to \infty$, где $\alpha_k \in [0,1)$, что невозможно.

Последнее вытекает из следующего утверждения. *Не существует конечного набора комплексных чисел* $\omega_k = e^{2\pi i \alpha_k}$, $k = \overline{1,n}$, $\alpha_k \in [0,1)$, *таких, что*

$$\operatorname{Re} \sum_{k=1}^{n} \omega_k^m < 0 \tag{9}$$

при всех $m > M$, M *— натуральное число, зависящее от набора чисел.*

Доказательство этого утверждения проводится индукцией по n. При $n = 1$ утверждение очевидно. Предположим, что оно верно для $n-1$, но неверно для n. Тогда существуют такие точки ω_k, $k = \overline{1,n}$, единичной окружности, для которых выполняется (9). Если число α_1 в неравенстве (9) рационально, $\alpha_1 = p/q$, $p, q \in \mathbb{N}$, то, взяв $m = sq$, для $\widetilde{\omega}_k = \omega_k^q$ и любого натурального $s > M/q$ получим

$$\operatorname{Re} \sum_{k=2}^{n} \widetilde{\omega}_k^s < 0, \tag{10}$$

что противоречит предположению индукции.

Если число α_1 иррационально, то воспользуемся приближением иррациональных чисел последовательностью подходящих дробей

$$\frac{p_\mu}{q_\mu}, \quad \text{где } p_\mu, q_\mu \in \mathbb{N}, \quad \left|\alpha_1 - \frac{p_\mu}{q_\mu}\right| < \frac{1}{2q_\mu^2}.$$

Поскольку $|\omega_k| = 1$, $k = \overline{1,n}$, можно выбрать сходящиеся подпоследовательности $\omega_k^{q_{\mu_\nu}} \to \widetilde{\omega}_k$ при $\nu \to \infty$. Тогда $\widetilde{\omega}_1 = 1$. Возьмем в (9) $m = sq_{\mu_\nu} > M$ для любого $s \in \mathbb{N}$. Переходя к пределу в (9) при $\nu \to \infty$, получим противоречащее индукции неравенство (10). Лемма 1 доказана.

2°. *Функция $f_{2m}(z)$ аналитична в $\overline{D}$.*

Свойство следует из того, что $\overline{D}$ не содержит предельных точек группы и $f_{2m}(z)$ может иметь полюсы только в неподвижных точках гиперболических преобразований.

3°. *Функция $f_{2m}(z)$ имеет $N_0 = 4m(g-1)$ нулей в $\overline{D}$.*

Действительно, у функции $f_{2m}(z)$ в $\overline{D}$ столько же нулей, сколько их имеет аналитический дифференциал $f_{2m}(z)(dz)^{2m}$ измерения $2m$, т. е. N_0 [15, с. 66].

3. Исследуем задачу (4). Введем функцию $\Phi_1(z) = \Phi(z) f_{2m}(z)$, где $f_{2m}(z)$ нетривиальна. Для нее в силу (4), (7) получим краевое условие

$$\Phi_1^+ = W_{2m} \Phi_1^+ + h f_{2m}. \tag{11}$$

Функция $\Phi_1(z)$ принадлежит классу аналитических в D функций, допускающих логарифмические особенности в вершинах $t_j, j = \overline{1,4g}$, и обращающихся в нуль в нулях $z_k, k = \overline{1,N_0}$, функции $f_{2m}(z)$.

Сначала найдем все решения задачи (11), не фиксируя их нули z_k. Общее решение задачи (11) имеет вид

$$\Phi_1(z) = \sum_{j=1}^{l} C_j \psi_j(z) + \Phi_*(z), \tag{12}$$

где C_j — произвольные постоянные, $\psi_j(z)$, $j=\overline{1,l}$, — все линейно независимые решения соответствующей однородной задачи

$$\psi^+ = W_{2m}\psi^+, \tag{13}$$

а $\Phi_*(z)$ — частное решение задачи (11).

Определим число l. Согласно [14] имеем $l-l'=\kappa-g+1$, где l' — число линейно независимых решений однородной союзной к (13) задачи, а $\kappa=\operatorname{ind}G(t)=\operatorname{ind}[\alpha'(t)]^{2m}$, т. е. $\kappa=[\kappa_1]$, где $[\dots]$ — целая часть,

$$\kappa_1=\frac{1}{2\pi}\left(\sum\nolimits' \arg G(t_j-0)-\sum\nolimits'' \arg G(t_j+0)\right).$$

При этом учитывается, что все вершины t_j, $j=\overline{1,4g}$, конгруэнтны, а в суммах $\sum'$ и $\sum''$ берутся только те вершины, которые принадлежат сторонам a_j, b_j, $j=\overline{1,g}$. Так как $\operatorname{ind}\alpha'(t)=2g-2$ [8], то, опираясь на геометрический смысл функции $\alpha'(t)$, получаем, что $\kappa=(2g-2)2m$, откуда $l'=0$, $l=(4m-1)(g-1)$.

Частное решение задачи (11) ищем в виде интеграла

$$\Phi_*(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D} G(\tau,z)\varphi(\tau)\,d\tau \tag{14}$$

с неизвестной плотностью $\varphi(t)\in H_0(\partial D)$ при дополнительном условии

$$\varphi+W_{2m}\varphi=0. \tag{15}$$

Ядро

$$G(\tau,z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{[\sigma_k'(z)]^{2m}}{\sigma_k(z)-\tau},\quad m\geq 1,$$

есть θ-ряд измерения $(-4m)$ по z. Он сходится в силу (3) абсолютно и равномерно по $\tau\in\partial D$ и $z\in\overline{U_r}=\{z:|z|\leq r<1\}$, если из ряда удалить конечное число членов, имеющих в $\overline{U_r}$ полярные линии $\sigma_k(\partial D)$. Ввиду основного свойства тэта-ряда [10, с. 112] имеем

$$G[\tau,\alpha(t)][\alpha'(t)]^{2m}=G(\tau,t). \tag{16}$$

Для интеграла (14) имеет место формула Сохоцкого [9] $\Phi_*^+=\frac{1}{2}(\varphi-W_{2m}\varphi)+\Phi_*$, где интеграл в правой части получается формальной заменой в (14) переменной $z\in D$ на $t\in\partial D$ и понимается в смысле главного значения по Коши. Тогда, учитывая (15), имеем $\Phi_*^+=\varphi+\Phi_*$ и

$$\Phi_*^+[\alpha(t)]=-\frac{\varphi(t)}{[\alpha'(t)]^{2m}}-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D} G(\tau,t)\frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{[\alpha'(t)]^{2m}}.$$

Подставляя $\Phi_*^+(t)$ и $\Phi_*^+[\alpha(t)]$ в (11), получим функцию $\varphi(t)$, удовлетворяющую в силу (5), (7) условию (15): $\varphi=(hf_{2m})/2$, откуда

$$\Phi_*(z)=-\frac{1}{4\pi i}\int\limits_{\partial D} G(\tau,z)h(\tau)f_{2m}(\tau)\,d\tau. \tag{17}$$

Найдем l линейно независимых решений задачи (13). Сначала докажем две леммы.

Лемма 2. *Ядро $G(z,t)$ обладает свойством*

$$G[\sigma_j(z),t] = \frac{G(z,t)}{(\gamma_j z+\delta_j)^{4m-2}} - \sum_{k=0}^{4m-2} \frac{\partial^k G(-\delta_j/\gamma_j,t)/\partial z^k}{k!\gamma_j^k(\gamma_j z+\delta_j)^{4m-2-k}}. \tag{18}$$

Обозначив ядро $G(z,t)$ при $m=1$ через $G_1(z,t)$, докажем (18) для этого случая. Представим $G_1(z,t)$ в виде

$$\begin{aligned} G_1(z,t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[\sigma_k'(t)]^2}{\sigma_k(t)-z} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{(\alpha_k-\gamma_k z)^2}{t-\sigma_k^{-1}(z)} - \frac{\gamma_k}{(\gamma_k t+\delta_k)^3} - \frac{\gamma_k(\alpha_k-\gamma_k z)}{(\gamma_k t+\delta_k)^2} - \frac{\gamma_k(\alpha_k-\gamma_k z)^2}{(\gamma_k t+\delta_k)}\right], \end{aligned} \tag{19}$$

где $\sigma_k^{-1}(z) = (-\delta_k z+\beta_k)/(\gamma_k z-\alpha_k)$, разложив на простые дроби выражение, стоящее под знаком первой суммы.

Положим

$$\sigma_k^{-1}\sigma_j(z) = \frac{(\gamma_j\beta_k-\alpha_j\delta_k)z+\delta_j\beta_k-\delta_k\beta_j}{(\gamma_k\alpha_j-\gamma_j\alpha_k)z+\beta_j\gamma_k-\alpha_k\delta_j} = \frac{A_{kj}z+B_{kj}}{C_{kj}z+D_{kj}},$$

тогда

$$\alpha_k-\gamma_k\frac{\alpha_j z+\beta_j}{\gamma_j z+\delta_j} = \frac{-C_{kj}z-D_{kj}}{\gamma_j z+\delta_j}$$

и

$$\begin{aligned} G_1[\sigma_j(z),t] = \sum_{k=0}^{\infty}\Bigg[&\frac{(C_{kj}z+D_{kj})^2}{(\gamma_j z+\delta_j)^2[t-\sigma_k^{-1}\sigma_j(z)]} - \frac{\gamma_k}{(\gamma_k t+\delta_k)^3} \\ &+ \frac{\gamma_k(C_{kj}z+D_{kj})}{(\gamma_j z+\delta_j)(\gamma_k t+\delta_k)^2} - \frac{\gamma_k(C_{kj}z+D_{kj})^2}{(\gamma_j z+\delta_j)^2(\gamma_k t+\delta_k)}\Bigg]. \end{aligned} \tag{20}$$

Поскольку ряд $G_1(z,t)$ в силу его абсолютной сходимости можно записать в виде

$$\begin{aligned} G_1(z,t) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left\{\left[\sigma_j^{-1}\sigma_k(t)\right]'\right\}^2}{\sigma_j^{-1}\sigma_k(t)-z} = \sum_{k=0}^{\infty}\Bigg[&\frac{(C_{kj}z+D_{kj})^2}{t-\sigma_k^{-1}\sigma_j(z)} \\ &- \frac{C_{kj}}{(C_{kj}t-A_{kj})^3} - \frac{C_{kj}(C_{kj}z+D_{kj})}{(C_{kj}t-A_{kj})^2} - \frac{C_{kj}(C_{kj}z+D_{kj})^2}{C_{kj}t-A_{kj}}\Bigg], \end{aligned}$$

из (20) имеем

$$G_1[\sigma_j(z),t] = \frac{G_1(z,t)+v_{2j}(t)}{(\gamma_j z+\delta_j)^2} + \frac{v_{1j}(t)}{\gamma_j z+\delta_j} + v_{0j}(t), \tag{21}$$

где через $v_{ij}(t)$, $i=\overline{0,2}$, обозначены множители при $1/(\gamma_j z+\delta_j)^i$. Эти множители можно определить непосредственно, используя формулу (20), но проще, умножая равенство (21) на $(\gamma_j z+\delta_j)^2$. Затем, положив в нем $z=-\delta_j/\gamma_j$, найдем $v_{2j}=-G_1(-\delta_j/\gamma_j,t)$, а дважды продифференцировав его по z, получим

$$v_{1j}(t) = -\frac{\partial G_1(-\delta_j/\gamma_j,t)/\partial z}{\gamma_j}, \quad v_{0j}(t) = -\frac{\partial^2 G_1(-\delta_j/\gamma_j,t)/\partial z^2}{2\gamma_j^2}.$$

Окончательно имеем

$$G_1[\sigma_j(z),t]=\frac{G_1(z,t)-G_1(-\delta_j/\gamma_j,t)}{(\gamma_j z+\delta_j)^2}-\frac{\partial G_1(-\delta_j/\gamma_j,t)/\partial z}{\gamma_j(\gamma_j z+\delta_j)}-\frac{\partial^2 G_1(-\delta_j/\gamma_j,t)/\partial z^2}{2\gamma_j^2}. \tag{22}$$

Теперь, предполагая, что для любого m имеет место представление

$$G(z,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{(\alpha_k-\gamma_k z)^{4m-2}}{t-\sigma_k^{-1}(z)}-\gamma_k\sum_{r=0}^{4m-2}\frac{(\alpha_k-\gamma_k z)^r}{(\gamma_k t+\delta_k)^{4m-1-r}}\right], \tag{23}$$

легко обоснуем его методом полной математической индукции, после чего формула (18) из (23) получается тем же приемом, что и формула (22) из (19). Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Линейное пространство функций*

$$\frac{\partial^k G(-\delta_j/\gamma_j,t)}{\partial z^k},\quad k=\overline{0,4m-2},\ j=1,2,\dots, \tag{24}$$

имеет конечную размерность.

Для доказательства рассмотрим $G[\sigma_1\sigma_2(z),t]$. Положим

$$\sigma_1\sigma_2(z)=\frac{(\alpha_1\alpha_2+\beta_1\gamma_2)z+\alpha_1\beta_2+\beta_1\delta_2}{(\gamma_1\alpha_2+\delta_1\gamma_2)z+\gamma_1\beta_2+\delta_1\delta_2}=\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}.$$

С одной стороны, из (18) следует, что

$$G[\sigma_1\sigma_2(z),t]=\frac{G(z,t)}{(\gamma z+\delta)^{4m-2}}-\sum_{k=0}^{4m-2}\frac{\partial^k G(-\delta/\gamma,t)/\partial z^k}{k!\gamma^k(\gamma z+\delta)^{4m-2-k}}. \tag{25}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned}G[\sigma_1\sigma_2(z),t]&=\frac{G[\sigma_2(z),t]}{[\gamma_1\sigma_2(z)+\delta_1]^{4m-2}}-\sum_{k=0}^{4m-2}\frac{\partial^k G(-\delta_1/\gamma_1,t)/\partial z^k}{k!\,\gamma_1^k[\gamma_1\sigma_2(z)+\delta_1]^{4m-2-k}}\\&=\frac{G(z,t)}{(\gamma z+\delta)^{4m-2}}-\sum_{k=0}^{4m-2}\frac{(\gamma_2 z+\delta_2)^k\partial^k G(-\delta_2/\gamma_2,t)/\partial z^k}{k!\gamma_2^k(\gamma z+\delta)^{4m-2}}\\&\qquad-\sum_{k=0}^{4m-2}\frac{(\gamma_2 z+\delta_2)^{4m-2-k}\partial^k G(-\delta_1/\gamma_1,t)/\partial z^k}{k!\gamma_1^k(\gamma z+\delta)^{4m-2-k}}.\end{aligned} \tag{26}$$

Раскладывая правую часть равенства (26) по степеням $(\gamma z+\delta)$ и сравнивая результат с (25), заключаем, что функции $\partial^k G(-\delta/\gamma,t)/\partial z^k$ линейно выражаются через $\partial^k G(-\delta_1/\gamma_1,t)/\partial z^k$, $\partial^k G(-\delta_2/\gamma_2,t)/\partial z^k$, $k=\overline{0,4m-2}$. Поскольку число порождающих группу Γ преобразований конечно, число линейно независимых функций вида (24) тоже конечно. Лемма 3 доказана.

Теорема 1. *Базис пространства функций* (24) *дает все линейно независимые решения задачи* (13).

Обозначим через r размерность пространства функций (24). В силу их голоморфности и свойства (16) ряда $G(z,t)$ каждая из функций (24) является решением задачи (13), поэтому $r\le l=(g-1)(4m-1)$. Покажем, что $r\ge l$.

Для этого рассмотрим задачу с краевым условием

$$F^+=W_{1-2m}F^+ + g_1 \tag{27}$$

в классе аналитических в D функций, непрерывных в $\overline{D}$, кроме вершин t_j, $j = \overline{1, 4g}$, в которых функция $F(z)$ допускает логарифмические особенности, $g_1(t) \in H_0(\partial D)$. Необходимыми и достаточными условиями ее разрешимости являются условия

$$\int\limits_{\partial D} g_1(t)\psi_j(t)\,dt = 0,\ j = \overline{1, l}, \quad g_1 + W_{1-2m}g_1 = 0, \tag{28}$$

где $\psi_j(t)$ — все линейно независимые решения задачи (13), которая является союзной к однородной задаче, соответствующей задаче (27). В частности, при ее разрешимости условия (28) выполняются и для базиса пространства функций (24).

Ищем решение задачи (27) в виде интеграла

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D} G(z,\tau)\varphi_1(\tau)\,d\tau, \quad G(z,\tau) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{[\sigma_k'(\tau)]^{2m}}{\sigma_k(\tau) - z} \tag{29}$$

с неизвестной плотностью $\varphi_1(t) \in H_0(\partial D)$ при дополнительном условии

$$\varphi_1 + W_{1-2m}\varphi_1 = 0. \tag{30}$$

Используя формулы Сохоцкого (они выводятся для любого m так же, как в [8] для $m = 1$), получим интегральное уравнение Фредгольма для функции φ_1:

$$F^+ = (\varphi_1 - W_{1-2m}\varphi_1)/2 + F = \varphi_1 + F.$$

Взяв от обеих частей этого равенства оператор W_{1-2m} и вычтя результат из исходного равенства, придем к уравнению Фредгольма

$$\varphi_1(t) + \frac{1}{4\pi i}\int\limits_{\partial D}\left\{G(t,\tau) - \frac{G[\alpha(t),\tau]}{[\alpha'(t)]^{2m-1}}\right\}\varphi_1(\tau)\,d\tau = \frac{g_1(t)}{2}. \tag{31}$$

Справедливо и обратное. Если уравнение (31) имеет решение, то оно удовлетворяет условию (30), так как

$$\varphi_1[\alpha(t)] = -\frac{1}{4\pi i}\int\limits_{\partial D}\left\{G[\alpha(t),\tau] - \frac{G(t,\tau)}{[\alpha'(t)]^{1-2m}}\right\}\varphi_1(\tau)\,d\tau + \frac{g_1[\alpha(t)]}{2}.$$

Функция $F(z)$ вида (29) в силу (31) будет удовлетворять условию (27). Следовательно, интегральное уравнение (31), как и задача (27), должно иметь l условий разрешимости. Ими являются условия ортогональности

$$\int\limits_{\partial D} g_1(t)\Psi_j(t)\,dt = 0, \quad j = \overline{1, l},$$

где $\Psi_j(t)$, $j = \overline{1, l}$, — все линейно независимые решения союзного однородного уравнения

$$\Psi(t) + \frac{1}{4\pi i}\int\limits_{\partial D}\left\{G(\tau,t) - \frac{G[\alpha(\tau),t]}{[\alpha'(\tau)]^{2m-1}}\right\}\Psi(\tau)\,d\tau = 0. \tag{32}$$

Определим структуру общего решения $\Psi(t)$, используя свойство (18) ядра $G(\tau,t)$.

Для этого, учитывая, что $\sigma_j(l_j) = l'_j$, $j = \overline{1, 2g}$, преобразуем интеграл:

$$\int\limits_{\partial D} \left\{ G(\tau, t) - \frac{G[\alpha(\tau), t]}{[\alpha'(\tau)]^{2m-1}} \right\} \Psi(\tau)\, d\tau = \sum_{j=1}^{2g} \int\limits_{l_j} \left\{ G(\tau, t) - \frac{G[\sigma_j(\tau), t]}{[\sigma'_j(\tau)]^{2m-1}} \right\} \Psi(\tau)\, d\tau$$

$$+ \sum_{j=1}^{2g} \int\limits_{l'_j} \left\{ G(\tau, t) - \frac{G\big[\sigma_j^{-1}(\tau), t\big]}{\big[(\sigma_j^{-1})'(\tau)\big]^{2m-1}} \right\} \Psi(\tau)\, d\tau$$

$$= \sum_{j=1}^{2g} \sum_{k=0}^{4m-2} \left\{ \int\limits_{l_j} \frac{\partial^k G(-\delta_j/\gamma_j, t)/\partial\tau^k}{k!\gamma_j^k(\gamma_j\tau + \delta_j)^{-k}} \Psi(\tau)\, d\tau + \int\limits_{l'_j} \frac{\partial^k G(\alpha_j/\gamma_j, t)/\partial\tau^k}{k!\gamma_j^k(\gamma_j\tau - \alpha_j)^{-k}} \Psi(\tau)\, d\tau \right\}$$

$$= \sum_{k=0}^{4m-2} \frac{1}{k!} \sum_{j=1}^{2g} \left\{ \frac{\partial^k G(-\delta_j/\gamma_j, t)}{\partial\tau^k} \int\limits_{l_j} (\tau + \delta_j/\gamma_j)^k \Psi(\tau)\, d\tau \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^k G(\alpha_j/\gamma_j, t)}{\partial\tau^k} \int\limits_{l'_j} (\tau - \alpha_j/\gamma_j)^k \Psi(\tau)\, d\tau \right\}.$$

Отсюда следует, что решение $\Psi(t)$ уравнения (32) есть линейная комбинация функций (24), т. е. $l \le r$. Теорема 1 доказана.

Таким образом, в формуле (12) найдены слагаемые $\Phi_*(z)$ и $\psi_j(z)$, $j = \overline{1, l}$. Требуя, чтобы функции $\Phi_1(z)$ вида (12) имели N_0 нулей в точках z_k, $k = \overline{1, N_0}$, получим линейную систему относительно C_j:

$$\sum_{j=1}^{l} C_j \psi_j(z_k) + \Phi_*(z_k) = 0, \quad k = \overline{1, N_0}, \tag{33}$$

которая разрешима в силу существования решения задачи (11). Доказана

Теорема 2. *При выполнении условий разрешимости* (5), (6) *задача* (4) *имеет семейство решений*

$$\Phi(z) = \frac{\sum\limits_{j=1}^{l} C_j \psi_j(z) + \Phi_*(z)}{f_{2m}(z)} + C,$$

где $\psi_j(z)$, $j = \overline{1, l}$, *есть базис пространства функций* (24), *функция* $\Phi_*(z)$ *определяется формулой* (17), C_j, $j = \overline{1, l}$, *— частное решение системы* (33), $l = (4m - 1)(g - 1)$.

Замечание. Задачу (4) можно аналогично рассмотреть для фуксовой группы Γ первого рода, содержащей не только гиперболические, но и эллиптические, и параболические преобразования. Отличие от рассмотренного выше случая состоит в технических трудностях, связанных с необходимостью перехода к локальным параметрам при исследовании функции в окрестности неподвижных точек параболических или эллиптических преобразований. При этом нет необходимости доказывать лемму 1, поскольку нетривиальность $f_{2m}(z)$ в случае, если группа Γ содержит эллиптическое или параболическое преобразования, доказана в [1].

Авторы выражают благодарность рецензенту за указанную идею доказательства леммы 1.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Аксентьева Е. П., Гарифьянов Ф. Н.* О лакунарных аналогах тэта-ряда Пуанкаре и их приложении // Сиб. мат. журн. 2002. Т. 43, № 5. С. 977–986.

2. *Гахов Ф. Д., Чибрикова Л. И.* О некоторых типах сингулярных интегральных уравнений, разрешаемых в замкнутой форме // Мат. сб. 1954. Т. 35, № 3. С. 395–436.

3. *Чибрикова Л. И.* О краевой задаче Римана для автоморфных функций // Уч. зап. Казанск. ун-та. Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1956. Т. 116, кн. 4. С. 59–109.

4. *Weierstrass K.* Vorlesungen über die Theorie der Abelschen Transzendenten. Berlin: Mayer und Muller, 1902. (Math. Werke; 4).

5. *Чибрикова Л. И.* Основные граничные задачи для аналитических функций. Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1977.

6. *Чибрикова Л. И., Сильвестров В. В.* К вопросу об эффективности решения краевой задачи Римана для автоморфных функций // Изв. вузов. Математика. 1978. № 12. С. 117–121.

7. *Чибрикова Л. И.* Граничные задачи теории аналитических функций // Математический анализ. М.: ВИНИТИ, 1980. Т. 18. С. 3–66. (Итоги науки и техники).

8. *Аксентьева Е. П., Гарифьянов Ф. Н.* О двух интегральных уравнениях с ядром Карлемана. I // Тр. семинара по краевым задачам. Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1983. Вып. 20. С. 11–21.

9. *Аксентьева Е. П., Гарифьянов Ф. Н.* О двух интегральных уравнениях с ядром Карлемана. II // Тр. семинара по краевым задачам. Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1985. Вып. 22. С. 30–35.

10. *Форд Л. Р.* Автоморфные функции. М.; Л.: ОНТИ, 1936.

11. *Винберг Э. Б., Шварцман О. В.* Римановы поверхности // Алгебра. Топология. Геометрия. М.: ВИНИТИ, 1978. Т. 16. С. 191–245 (Итоги науки и техники).

12. *Неванлинна Р.* Униформизация. М.: Изд-во иностр. лит., 1955.

13. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968.

14. *Зверович Э. И.* Краевые задачи теории аналитических функций в гёльдеровских классах на римановых поверхностях // Успехи мат. наук. 1971. Т. 26, № 1. С. 113–179.

15. *Шиффер М., Спенсер Д. К.* Функционалы на конечных римановых поверхностях. М.: Изд-во иностр. лит., 1957.

Статья поступила 4 ноября 2003 г.

Аксентьева Евгения Павловна
Казанский гос. университет, кафедра общей математики,
ул. Кремлевская, 18, Казань 420008
Evgenija.Aksenteva@ksu.ru

Гарифьянов Фархат Нургаязович
Казанский гос. энергетический институт, кафедра высшей математики,
ул. Красносельская, 51, Казань 420066