Сибирский математический журнал
Июль—август, 2005. Том 46, № 4

УДК 517.538.3

ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ АСИМПТОТИКА НОРМ ВЫЧИСЛЯЮЩИХ ФУНКЦИОНАЛОВ

А. А. Довгошей,
Ф. Абдуллаев, М. Кучукаслан

Аннотация: Пусть μ — конечная борелевская мера с компактным носителем, лежащим в $\mathbb{C}$, и Π_n — пространство голоморфных полиномов степени не выше n, наделенное нормой из $L^2(\mu)$. Изучается логарифмическая асимптотика норм вычисляющих функционалов, ставящих в соответствие полиномам $p \in \Pi_n$ их значения в точке $z \in \mathbb{C}$. Основные результаты показывают, как асимптотическое поведение зависит от регулярности внешней области носителя меры μ и правильности этой меры по Сталу — Тотику. Исследуются, в частности, случаи поточечной и μ-п. в. сходимостей при $n \to \infty$.

Ключевые слова: общие ортогональные полиномы, логарифмическая асимптотика, вычисляющие функционалы, функция Грина, точки иррегулярности для задачи Дирихле.

1. Введение

Пусть μ — конечная положительная борелевская мера с компактным носителем $S_\mu \subseteq \mathbb{C}$, $\operatorname{card} S_\mu = \infty$ и $\Pi_n = \Pi_n(\mu)$ — гильбертово пространство всех полиномов степени не выше n от одной комплексной переменной с нормой, индуцированной из $L^2(\mu)$. Для $z_0 \in \mathbb{C}$ вычисляющий функционал $F_{n,z_0} : \Pi_n \to \mathbb{C}$ определяется соотношением $F_{n,z_0}(p) = p(z_0)$. Норму этого функционала будем обозначать через $\|F_{n,z_0}\|_\mu$, т. е.

$$\|F_{n,z_0}\|_\mu = \sup\{|p(z_0)| : \deg p \le n,\ \|p\|_{L^2(\mu)} \le 1\}.$$

Такие нормы в зависимости от n, z_0 и μ (и не только для случая $L^2(\mu)$) привлекали и продолжают привлекать внимание многих специалистов, работающих в области функционального анализа и теории ортогональных полиномов. Классическая теорема Сеге — Колмогорова — Крейна дает условия ограниченности норм F_{n,z_0} и полноты полиномов в $L^p(\mu)$ при $p > 0$ и $S_\mu \subseteq \{z : |z| = 1\}$. Аналогичные проблемы для мер с более сложной геометрией носителя изучались в работах А. Л. Вольберга [1], Томсона [2], Акеройда [3, 4] и других математиков. Монографическое изложение близких вопросов можно найти в [5].

Отметим, что величина $\frac{1}{n+1}\|F_{n,z}\|_\mu^2$ совпадает со средним арифметическим квадратов модулей ортонормированных полиномов в точке z. Много интересных результатов об асимптотических свойствах таких средних для случая мер, сосредоточенных на вещественной оси или единичной окружности, можно найти в [6]. Здесь мы изучаем поточечную и μ-п. в. сходимости $\frac{1}{n}\ln\|F_{n,z}\|_\mu$ при $n \to \infty$ для общих борелевских мер с компактным носителем. Логарифмическая асимптотика ортогональных полиномов, соответствующих таким мерам, исследована в фундаментальной монографии Стала и Тотика [7].

В следующем разделе работы наши результаты формулируются и сравниваются с соответствующими утверждениями из [7]. Последний раздел содержит доказательства и леммы.

2. Основные результаты и вспомогательные сведения

Так как мера μ конечна, S_μ — компакт и $\operatorname{card} S_\mu = \infty$, то существует единственная система полиномов $p_n(\mu;\cdot)$ таких, что

$$\int p_n(\mu;\cdot)\overline{p_m(\mu;\cdot)}\,d\mu = \begin{cases} 1 & \text{при } n = m, \\ 0 & \text{при } n \neq m, \end{cases} \quad p_n(\mu;z) = \gamma_n z^n + \dots,$$

где $\gamma_n = \gamma_n(\mu)$ — положительный старший коэффициент $p_n(\mu;\cdot)$. Будем обозначать через $\Omega = \Omega(\mu)$ внешнюю область компакта S_μ, а через $\operatorname{Co}(S_\mu)$ и $\widehat{S}_\mu$ выпуклую и соответственно полиномиально выпуклую оболочки S_μ. Напомним, что $\Omega = \mathbb{C}\setminus\widehat{S}_\mu$.

Для $A \subseteq \mathbb{C}$ считаем, что $\operatorname{cap}(A)$ — внешняя логарифмическая емкость A. По определению *логарифмической емкостью* борелевского множества $A \subseteq \mathbb{C}$ называется величина

$$\operatorname{cap}(A) := \sup_\mu \left(\exp \iint \ln|w - z|\,d\mu(z)\,d\mu(w)\right),$$

где супремум берется по всем вероятностным борелевским мерам μ с компактными носителями $S_\mu \subseteq A$, а для произвольного $B \subseteq \mathbb{C}$ внешняя логарифмическая емкость может быть определена как

$$\operatorname{cap}(B) = \inf\{\operatorname{cap}(A) : A \supseteq B,\ A \text{ борелевское}\}.$$

Хорошо известно, что

$$\operatorname{cap}(S_\mu) = \operatorname{cap}(\widehat{S}_\mu) = \operatorname{cap}(\partial\Omega).$$

Будем говорить, что μ *правильна по Сталу — Тотику*, если

$$\lim_{n\to\infty} (\gamma_n(\mu))^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\operatorname{cap}(S_\mu)}. \tag{2.1}$$

Множество конечных борелевских правильных по Сталу — Тотику мер, имеющих компактные носители, будем обозначать через Reg.

Как и в [7], под функцией Грина $g_\Omega(\cdot;\infty)$ (с полюсом в ∞), соответствующей области Ω, понимаем функцию, определяемую следующими свойствами:

(i) $g_\Omega(z;\infty)$ неотрицательна, субгармонична в $\mathbb{C}$ и гармонична в Ω;

(ii) $g_\Omega(z;\infty) - \ln|z|$ ограничена при $z \to \infty$;

(iii) $g_\Omega(z;\infty) = 0$ квазивсюду на $\mathbb{C}\setminus\Omega$ (т. е. всюду на $\widehat{S}_\mu$, за возможным исключением множества внешней логарифмической емкости нуль).

Отметим, что так определенная $g_\Omega(\cdot;\infty)$ существует и единственна при $\operatorname{cap}(\widehat{S}_\mu) > 0$.

Условие $\mu \in \mathrm{Reg}$ эквивалентно различным видам сходимости

$$|p_n(\mu;z)|^{\frac{1}{n}} \to \exp(g_\Omega(z;\infty))$$

в зависимости от того, какому из множеств $\partial\widehat{S}_\mu$, $(\operatorname{Co}(S_\mu))\setminus\widehat{S}_\mu$ или $\mathbb{C}\setminus\operatorname{Co}(S_\mu)$ принадлежит z. Ситуация упрощается при переходе от $|p_n(\mu;z)|$ к $\|F_{n,z}\|_\mu$.

Обозначим через $[\mu]$ множество всех положительных конечных борелевских мер ν, для которых $\operatorname{supp}(\nu) = S_\mu$.

Теорема 2.1. *Пусть* $\operatorname{cap}(S_\mu) > 0$. *Тогда следующие утверждения эквивалентны.*

(i) *Область* Ω *регулярна для задачи Дирихле.*

(ii) *Имеет место равенство*

$$\lim_{n\to\infty} \|F_{n,z}\|_\nu^{\frac{1}{n}} = \exp(g_\Omega(z;\infty)) \tag{2.2}$$

для всех $z \in \mathbb{C}$ *и всех* $\nu \in [\mu] \cap \operatorname{Reg}$.

(iii) *Равенство* (2.2) *выполняется для всех* $\nu \in [\mu] \cap \operatorname{Reg}$ *и всех* z, *лежащих на границе* Ω.

Эта теорема может рассматриваться как некоторое обращение следующего результата Стала — Тотика (см. [7, теорема 3.2.3] в части, относящейся к $\|F_{n,z}\|_\mu$).

Теорема. *Пусть* Ω *регулярна относительно задачи Дирихле. Тогда следующие утверждения эквивалентны.*

(i) $\mu \in \operatorname{Reg}$.

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty}\big(\|F_{n,z}\|_\mu^{\frac{1}{n}} \exp(-g_\Omega(z;\infty))\big) = 1$ *равномерно на* $\mathbb{C}$.

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty}\big(\max\limits_{z\in\partial\Omega} \|F_{n,z}\|_\mu^{\frac{1}{n}}\big) = 1$.

Пусть E_R — множество точек на $\partial\Omega$, регулярных относительно задачи Дирихле, и $E_i := \partial\Omega\backslash E_R$ — соответствующее множество иррегулярных точек. Напомним, что $z \in E_R$, если Ω обладает барьером в z, т. е. в пересечении Ω и некоторой окрестности точки z существует отрицательная субгармоническая функция V_z, для которой $\lim\limits_{w\to z} V_z(w) = 0$.

Теорема 2.2. *Пусть* $\operatorname{cap}(S_\mu) > 0$. *Тогда следующие утверждения эквивалентны.*

(i) *Равенство*

$$\lim_{n\to\infty} \|F_{n,z}\|_\mu^{\frac{1}{n}} = \exp(g_\Omega(z;\infty)) \tag{2.3}$$

выполнено μ-*п. в.*

(ii) $\mu(E_i) = 0$, *т. е.* μ-*мера множества иррегулярных точек равна нулю.*

Следствие 2.3. *Пусть* $\operatorname{cap}(S_\mu) > 0$. *Если* μ-*п. в. имеет место равенство* (2.3), *то* E_R — *плотное подмножество* $\partial\Omega$.

Следующее предложение используется для доказательства теорем 2.1 и 2.2, но представляет и определенный самостоятельный интерес.

Предложение 2.4. *Если* μ — *конечная борелевская мера с компактным носителем* S_μ, $\operatorname{card}(S_\mu) = \infty$, *то* μ-*п. в. на* S_μ

$$\lim_{n\to\infty} \|F_{n,z}\|_\mu^{\frac{1}{n}} = 1, \tag{2.4}$$

а для $z \in \partial\Omega(\mu)$

$$\lim_{n\to\infty} \|F_{n,z}\|_\mu^{-2} = \mu\{z\}, \tag{2.5}$$

где $\mu\{z\}$ — μ-*мера одноточечного множества* $\{z\}$.

В следующих предложениях, как и в теоремах 2.1, 2.2, считаем, что $\operatorname{cap}(S_\mu) > 0$. При $\operatorname{cap}(S_\mu) = 0$ «естественно» полагать $g_\Omega(z;\infty) \equiv +\infty$, однако получающиеся обобщения представляются малосодержательными.

Предложение 2.5. *Пусть* $\operatorname{cap}(S_\mu) > 0$ *и* $\mu \in \operatorname{Reg}$. *Тогда равенство* (2.4) *выполнено для любой* $z \in E_R$.

Предложение 2.6. *Пусть* $\operatorname{cap}(S_\mu) > 0$. *Тогда условие* $\mu \in \operatorname{Reg}$ *эквивалентно тому, что равенство* (2.3) *выполнено для всех* $z \in \Omega$.

Перейдем теперь к следствиям, уточняющим соответствующие результаты из [7] о поведении $\limsup\limits_{n\to\infty} |p_n(\mu; z)|^{\frac{1}{n}}$.

Следствие 2.7. *Пусть* $\operatorname{cap}(S_\mu) > 0$. *Тогда условие* $\mu \in \operatorname{Reg}$ *эквивалентно тому, что*

$$\limsup_{n\to\infty} |p_n(\mu; z)|^{\frac{1}{n}} = \exp(g_\Omega(z; \infty)) \tag{2.6}$$

для всех $z \in \Omega$.

Теоремы 3.1.1 и 3.2.1 из монографии [7] показывают, что правильность меры μ по Сталу — Тотику равносильна любому из следующих условий:

(i) локально равномерно в $\mathbb{C} \setminus \operatorname{Co}(S_\mu)$

$$\lim_{n\to\infty} |p_n(\mu; z)|^{\frac{1}{n}} = \exp(g_\Omega(z; \infty)), \tag{2.7}$$

(ii) для любой точки $z \in \mathbb{C}$ и любой последовательности $z_n \to z$

$$\limsup_{n\to\infty} |p_n(\mu; z_n)|^{\frac{1}{n}} \le \exp(g_\Omega(z; \infty)). \tag{2.8}$$

Таким образом, следствие 2.7 дает новую информацию об асимптотическом поведении $|p_n(\mu; z)|^{\frac{1}{n}}$ только для $z \in \Omega \cap \operatorname{Co}(S_\mu)$.

Следствие 2.8. *Пусть* $\operatorname{cap}(S_\mu) > 0$, $\mu \in \operatorname{Reg}$. *Тогда*

$$\limsup_{n\to\infty} |p_n(\mu; z)|^{\frac{1}{n}} = 1 \tag{2.9}$$

для всех $z \in E_R$.

Объединяя следствия 2.7 и 2.8, получаем

Следствие 2.9. *Пусть* Ω *регулярна для задачи Дирихле, а* μ *правильна по Сталу — Тотику. Тогда*

$$\limsup_{n\to\infty} |p_n(\mu; z_n)|^{\frac{1}{n}} = \exp(g_\Omega(z; \infty)) \tag{2.10}$$

для всех $z \in \overline{\Omega}$.

Известно, что если (2.9) выполнено квазивсюду на $\partial\Omega$, то $\mu \in \operatorname{Reg}$ (см. [7, теорема 3.1.1]). Таким образом, получаем

Следствие 2.10. *Пусть* Ω *регулярна для задачи Дирихле и соотношение* (2.9) *выполнено квазивсюду на* $\partial\Omega$, *тогда это соотношение выполнено всюду на* $\partial\Omega$.

Следующее предложение показывает, как меняются значения ортонормированных полиномов $p_n(\mu; \cdot)$ при возмущении меры μ некоторой атомарной мерой, что будет использовано для доказательства следствия 2.8.

Предложение 2.11. *Пусть* μ — *конечная борелевская мера с компактным носителем* S_μ, $\operatorname{card}(S_\mu) = \infty$. *Тогда для любой точки* $z_0 \in \mathbb{C}$ *и любого* $\alpha > 0$

$$|p_n(\mu + \alpha\delta_{z_0}; z_0)| = \frac{|p_n(\mu; z_0)|}{\left(1 + \alpha \sum\limits_{k=0}^{n-1} |p_k(\mu; z_0)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \alpha \sum\limits_{k=0}^{n} |p_k(\mu; z_0)|^2\right)^{\frac{1}{2}}}, \tag{2.11}$$

где δ_{z_0} — *мера Дирака в точке* z_0.

3. Доказательства и леммы

Из определения F_{n,z_0} и ортонормированности $\{p_n(\mu;\cdot)\}_{n=0}^{\infty}$ легко выводится

Лемма 3.1. *Пусть μ — конечная борелевская мера с компактным носителем S_μ, $\operatorname{card} S_\mu = \infty$. Тогда для любой точки $z_0 \in \mathbb{C}$*

$$\|F_{n,z_0}\|_\mu = \sqrt{\sum_{k=0}^{n} |p_k(\mu; z_0)|^2}. \tag{3.1}$$

Обозначим через $P(S_\mu)$ замыкание множества полиномов в равномерной метрике на S_μ. В соответствии со следствием 3.4 из [8, гл. II] $P(S_\mu)$ — алгебра Дирихле на $\partial\Omega$. Так как представляющие меры для алгебр Дирихле единственны, из теоремы 11.3 в [8, гл. II], характеризующей точки пика равномерных алгебр на метрических компактах, следует

Лемма 3.2. *Пусть выполнены условия предыдущей леммы. Тогда любая точка на внешней границе S_μ является точкой пика алгебры $P(S_\mu)$.*

Доказательство предложения 2.4. Проверим, что (2.4) выполнено μ-п. в. В силу равенства (3.1)

$$\liminf_{n\to\infty} \|F_{n,z}\|_\mu^{\frac{1}{n}} \geq \lim_{n\to\infty} |p_0(\mu; z)|^{\frac{1}{n}} = 1 \tag{3.2}$$

для всех $z \in \mathbb{C}$. Рассмотрим ряд

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} |p_n(\mu; z)|^2.$$

Из теоремы Лебега о монотонной сходимости и ортонормированности последовательности $\{p_n(\mu;\cdot)\}_{n=0}^{\infty}$ получим

$$\int f\, d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} \int |p_n(\mu; z)|^2\, d\mu(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} < \infty.$$

Следовательно, для μ-п. в. $z \in \mathbb{C}$ функция $f(z)$ конечна. Опять используя (3.1), находим

$$\|F_{n,z}\|_\mu^2 \leq (n+1)^2 \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)^2} |p_k(\mu; z)|^2 \leq (n+1)^2 f(z).$$

Поэтому μ-п. в.

$$\limsup_{n\to\infty} \|F_{n,z}\|_\mu^{\frac{1}{n}} \leq 1.$$

Последнее неравенство и (3.2) показывают, что (2.4) выполнено μ-п. в.

Пусть теперь $z_0 \in \partial\Omega$, установим равенство (2.5). Не уменьшая общности, можно считать, что $\mu(\mathbb{C}) = 1$. В силу леммы 3.2 существует $f \in P(\widehat{S}_\mu)$, для которой $f(z_0) = 1$ и $|f(z)| < 1$ при $z \in \widehat{S}_\mu \backslash \{z_0\}$. По определению $P(\widehat{S}_\mu)$ для любых $\varepsilon > 0$ и $m \in \mathbb{N}$ существует полином q_m такой, что

$$\|f^m - q_m\|_{\widehat{S}_\mu} = \sup_{z\in\widehat{S}_\mu} |f^m(z) - q_m(z)| \leq \varepsilon.$$

Отсюда при $n \geq \deg q_m$ получаем

$$1 - \varepsilon \leq |F_{n,z_0}(q_m)| \leq \|F_{n,z_0}\|_\mu \|q_m\|_{L^2(\mu)} \leq \|F_{n,z_0}\|_\mu (\|f^m\|_{L^2(\mu)} + \varepsilon) = \|F_{n,z_0}\|_\mu \left(\sqrt{\int |f^{2m}|\,d\mu} + \varepsilon\right).$$

Так как $\|F_{n,z_0}\|_\mu$ — функция, монотонная по n, то существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \|F_{n,z_0}\|_\mu^{-1} \leq \left(\sqrt{\int |f^{2m}|\,d\mu} + \varepsilon\right)(1-\varepsilon)^{-1}.$$

Переходя в последнем соотношении к пределу при $m \to \infty$, по теореме Лебега об ограниченной сходимости имеем

$$\lim_{n\to\infty} \|F_{n,z_0}\|_\mu^{-1} \leq (\sqrt{\mu\{z_0\}} + \varepsilon)(1-\varepsilon)^{-1}.$$

Отсюда при $\varepsilon \to 0$ получаем

$$\lim_{n\to\infty} \|F_{n,z_0}\|_\mu \geq \frac{1}{\sqrt{\mu\{z_0\}}}.$$

Для доказательства (2.5) осталось заметить, что имеет место обратное неравенство, так как для любого полинома q

$$\|q\|_{L^2(\mu)} = \sqrt{\int |q^2|\,d\mu} \geq |q(z_0)|\sqrt{\mu\{z_0\}}. \qquad \square$$

Из того, что функция Грина положительна на E_i (см. [9, с. 287]) и равна нулю в $\mathrm{Int}(\widehat{S}_\mu)$ (см. [10, теорема 9.7]), вытекает

Лемма 3.3. *Если* $\mathrm{cap}(S_\mu) > 0$, *то*

$$E_i \cup \Omega = \{z \in \mathbb{C} : g_\Omega(z;\infty) > 0\}, \tag{3.3}$$

$$E_R \cup \mathrm{Int}(\widehat{S}_\mu) = \{z \in \mathbb{C} : g_\Omega(z;\infty) = 0\}. \tag{3.4}$$

Теперь легко убедиться в справедливости теоремы 2.2.

Доказательства теоремы 2.2 и следствия 2.3. В силу предложения 2.4 утверждение (i) теоремы 2.2 эквивалентно тому, что

$$\mu\{z : g_\Omega(z;\infty) > 0\} = 0.$$

Последнее ввиду равенства (3.3) равносильно утверждению (ii) теоремы 2.2.

Докажем следствие 2.3. Если равенство

$$\lim_{n\to\infty} \|F_{n,z}\|_\mu^{\frac{1}{n}} = \exp(g_\Omega(z;\infty))$$

выполнено μ-п. в., то в силу теоремы 2.2 мера μ сконцентрирована на $E_R \cup \mathrm{Int}(\widehat{S}_\mu)$. Следовательно,

$$S_\mu \subseteq \overline{E}_R \cup \overline{\mathrm{Int}(\widehat{S}_\mu)},$$

а значит, и

$$\partial\Omega \subseteq \partial S_\mu \subseteq \overline{E}_R \cup \overline{\mathrm{Int}(\widehat{S}_\mu)}. \tag{3.5}$$

Пусть $\{G_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ — семейство компонент связности $\operatorname{Int} \widehat{S}_\mu$. Из непрерывности функции Грина $g_\Omega(\cdot, \infty)$ в тонкой топологии и (3.4) следует, что $g_\Omega(z; \infty) = 0$ на тонкой границе любой из областей G_α. Так как все G_α открыты и связны, для любого $\alpha \in \Lambda$ граница G_α в евклидовой и тонкой топологиях совпадают [11, теорема 10.14]. Таким образом, $\partial G_\alpha \subseteq E_R$ для всех $\alpha \in \Lambda$. Следовательно, если

$$x \in (\partial\Omega \cap \overline{(\operatorname{Int} \widehat{S}_\mu)}) \backslash \Big(\bigcup_{\alpha \in \Lambda} \partial G_\alpha \Big),$$

то существует последовательность $\{x_j\}$, $x_j \in \partial G_{\alpha_j}$, для которой $x = \lim\limits_{j \to \infty} x_j$ в обычной евклидовой топологии. В силу (3.5) этого достаточно для справедливости доказываемого следствия. $\square$

Доказательство предложения 2.5. Так как равенство (3.2) выполнено для всех $z \in \mathbb{C}$, достаточно проверить, что

$$\limsup_{n \to \infty} \|F_{n,z}\|_\mu^{\frac{1}{n}} \le 1 \tag{3.6}$$

при $z \in E_R$. Предположим, что $\mu \in \operatorname{Reg}$, тогда в силу соотношения (2.7) для любой $z \in \mathbb{C}$ и любого $\varepsilon > 0$ существует постоянная $c = c(z, \varepsilon)$, для которой неравенство

$$|p_n(\mu; z)| \le c \exp(n\varepsilon + n g_\Omega(z; \infty))$$

выполняется при всех достаточно больших n. Отсюда, используя формулу (3.1), находим

$$\limsup_{n \to \infty} \|F_{n,z}\|_\mu^{\frac{1}{n}} \le \exp(g_\Omega(z; \infty)) \tag{3.7}$$

для любого $z \in \mathbb{C}$. В соответствии с (3.4) последнее неравенство равносильно (3.6), если $z \in E_R$. $\square$

Замечание 3.4. Приведенное выше доказательство показывает, что при $\mu \in \operatorname{Reg}$

$$\lim_{n \to \infty} \|F_{n,z}\|_\mu^{\frac{1}{n}} = 1$$

и для $z \in \operatorname{Int}(\widehat{S}_\mu)$.

Следующая простая лемма понадобится для доказательства предложения 2.6.

Лемма 3.5. *Пусть z — точка на плоскости. Если*

$$\lim_{n \to \infty} \|F_{n,z}\|_\mu^{\frac{1}{n}} = b \tag{3.8}$$

и $b > 1$, то

$$\lim_{n \to \infty} \|F_{n,z}\|_\mu^{\frac{1}{n}} = \limsup_{n \to \infty} |p_n(\mu; z)|^{\frac{1}{n}}. \tag{3.9}$$

Доказательство. Ясно, что

$$\limsup_{n \to \infty} |p_n(\mu; z)|^{\frac{1}{n}} = b_0 \le b.$$

Предположим, что $b_0 < b$. Пусть $b_1 := \max(1, b_0)$ и b_2 лежит в интервале (b_1, b). Тогда существует постоянная $c = c(b_2, z)$, для которой

$$|p_n(\mu; z)| \le c b_2^n$$

и, следовательно,

$$\limsup_{n\to\infty} \|F_{n,z}\|_\mu^{\frac{1}{n}} \le b_2 < b.$$

Полученное неравенство противоречит (3.8). $\square$

Доказательства предложения 2.6 и следствия 2.7. Будем проводить доказательство по схеме: $(\mu \in \mathrm{Reg}) \Rightarrow ((2.3)$ выполнено для всех $z \in \Omega) \Rightarrow ((2.6)$ выполнено для всех $z \in \Omega) \Rightarrow (\mu \in \mathrm{Reg})$.

Пусть $\{z_1^{(n)}, \dots, z_n^{(n)}\}$ — n-й набор точек Фекете компакта S_μ, а Q_n — соответствующий полином Фекете,

$$Q_n(z) := \prod_{k=1}^{n} \bigl(z - z_k^{(n)}\bigr).$$

Используя единственность функции Грина, легко убедиться в том, что в области Ω она может быть построена методом точек Фекете (см. [10, теорема 9.7] и [12, теорема 11.1]). Таким образом, для всех $z \in \Omega$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \frac{|Q_n(z)|}{\|Q_n\|_{S_\mu}} = g_\Omega(z;\infty),$$

где

$$\|Q_n\|_{S_\mu} = \sup_{z\in S_\mu} |Q_n(z)|.$$

Из определения $\|F_{n,z}\|_\mu$ следует, что

$$\|F_{n,z}\|_\mu \ge \frac{|Q_n(z)|}{\|Q_n\|_{L^2(\mu)}} \ge \frac{|Q_n(z)|}{\|Q_n\|_{S_\mu} (\mu(S_\mu))^{\frac{1}{2}}}. \tag{3.10}$$

Значит, неравенство

$$\liminf_{n\to\infty} \|F_{n,z}\|_\mu^{\frac{1}{n}} \ge \exp(g_\Omega(z;\infty)) \tag{3.11}$$

верно при всех $z \in \Omega$, причем для его справедливости не требуется принадлежности $\mu \in \mathrm{Reg}$. При μ, правильных по Сталу — Тотику, выполнено (3.7), и, таким образом,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \|F_{n,z}\|_\mu = g_\Omega(z;\infty), \tag{3.12}$$

если $z \in \Omega$ и $\mu \in \mathrm{Reg}$.

Предположим теперь, что равенство (3.12) (очевидно, эквивалентное (2.3)) выполняется при всех $z \in \Omega$. Тогда лемма 3.5 и положительность $g_\Omega(z;\infty)$ в Ω влекут равенство (2.6) для всех $z \in \Omega$.

Наконец, пусть (2.6) выполнено в каждой точке $z \in \Omega$. Хорошо известно, что при любом целом положительном n все нули полинома $p_n(\mu;z)$ лежат в $\mathrm{Co}(S_\mu)$. Следовательно,

$$\frac{1}{n} \ln |p_n(\mu;z)| = \ln\bigl(\gamma_n^{\frac{1}{n}}\bigr) + \ln|z| + o(1), \tag{3.13}$$

где $o(1)$ стремится к нулю равномерно по n при $|z| \to \infty$. Так как S_μ — компакт положительной емкости, то при $|z| \to \infty$

$$g_\Omega(z;\infty) = \ln|z| - \ln(\operatorname{cap} S_\mu) + o(1). \tag{3.14}$$

Соотношения (2.6), (3.13) и (3.14) дают равенство

$$\limsup_{n\to\infty}\left(\gamma_n^{\frac{1}{n}}\right)=\frac{1}{\operatorname{cap}(S_\mu)}.$$

Кроме того, в соответствии со следствием 1.1.7 из [7]

$$\liminf_{n\to\infty}\left(\gamma_n^{\frac{1}{n}}\right)\geq\frac{1}{\operatorname{cap}(S_\mu)}.$$

Две последние формулы вместе равносильны равенству (2.1). Следовательно, $\mu\in\mathrm{Reg}$. Доказательство завершено. □

Доказательство предложения 2.11. Матрица Грама системы полиномов $\{p_n(\mu;\cdot)\}$ в $L^2(\mu+\alpha\delta_{z_0})$ равна $E+\alpha P_n$, где E — единичная матрица, а элементы матрицы P_n имеют вид $p_i(\mu;z_0)\overline{p_j(\mu;z_0)}$. Так как единственное ненулевое собственное число матрицы P_n равно

$$\sum_{k=0}^{n}|p_k(z_0)|^2=\|F_{n,z_0}\|_\mu^2,$$

то

$$D_n:=\det(E+\alpha P_n)=1+\alpha\|F_{n,z_0}\|_\mu^2. \tag{3.15}$$

С помощью стандартного процесса ортогонализации находим ортонормированные многочлены $p_n(\mu+\alpha\delta_{z_0};\cdot)$, соответствующие мере $\mu+\alpha\delta_{z_0}$,

$$p_n(\mu+\alpha\delta_{z_0};z)=\frac{1}{\sqrt{D_{n-1}D_n}}\det\begin{pmatrix}\langle p_0,p_0\rangle & \dots & \langle p_n,p_0\rangle\\ \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots\\ \langle p_0,p_{n-1}\rangle & \dots & \langle p_n,p_{n-1}\rangle\\ p_0(\mu,z) & \dots & p_n(\mu,z)\end{pmatrix}, \tag{3.16}$$

где $\langle p_i,p_j\rangle$ обозначает скалярное произведение $p_i(\mu;\cdot)$ и $p_j(\mu;\cdot)$ в $L^2(\mu+\alpha\delta_{z_0})$. (Формула (3.16) является комплексным вариантом формулы (2.1.6) из монографии [13].) При $z=z_0$ матрица в правой части (3.16) элементарными преобразованиями приводится к треугольному виду с элементами $1,\dots,1,p_n(\mu;z_0)$ на диагонали. Это вместе с (3.15) доказывает формулу (2.11). □

Замечание 3.6. Приведенное доказательство предложения 2.11 указано рецензентом настоящей работы.

Следующая лемма показывает, что класс правильных по Сталу — Тотику мер инвариантен при возмущении атомарными мерами.

Лемма 3.7. *Пусть μ_0 — конечная борелевская мера с компактным носителем S_{μ_0}, $\operatorname{cap}(S_{\mu_0})>0$, и пусть $z_0\in S_{\mu_0}$ и $\alpha>0$. Положим*

$$\mu=\mu_0+\alpha\delta_{z_0},$$

где δ_{z_0} — мера Дирака в z_0. Тогда

$$(\mu\in\mathrm{Reg})\iff(\mu_0\in\mathrm{Reg}).$$

Доказательство. $(\mu_0\in\mathrm{Reg})\Rightarrow(\mu\in\mathrm{Reg})$. Из определения μ следует, что для любой $z\in\mathbb{C}$

$$\|F_{n,z}\|_\mu\leq\|F_{n,z}\|_{\mu_0}.$$

Допустим, что $\mu_0\in\mathrm{Reg}$, тогда

$$\limsup_{n\to\infty}\|F_{n,z}\|_\mu^{\frac{1}{n}}\leq\limsup_{n\to\infty}\|F_{n,z}\|_{\mu_0}^{\frac{1}{n}}\leq\exp g_\Omega(z;\infty)$$

для любой $z \in \Omega$. В соответствии с предложением 2.6 это и неравенство (3.11) влекут правильность μ по Сталу — Тотику.

$(\mu \in \mathrm{Reg}) \Rightarrow (\mu_0 \in \mathrm{Reg})$. Пусть μ_1, μ_2 — положительные борелевские меры, абсолютно непрерывные относительно μ_0,

$$d\mu_1(w) := |w - z_0|^2 \, d\mu_0(w), \quad d\mu_2(w) := (\operatorname{diam} S_{\mu_0})^2 \, d\mu_0(w),$$

где $\operatorname{diam} S_{\mu_0} = \max\{|t - w| : t \in S_{\mu_0},\ w \in S_{\mu_0}\}$. Очевидно, что $\mu_2 \in \mathrm{Reg}$ тогда и только тогда, когда $\mu_0 \in \mathrm{Reg}$. Поэтому достаточно доказать, что $(\mu \in \mathrm{Reg}) \Rightarrow (\mu_2 \in \mathrm{Reg})$. Положим

$$\left\|F^0_{n,z}\right\|_\mu := \max\{|p(z)| : \deg p \le n,\ p(z_0) = 0,\ \|p\|_{L^2(\mu)} \le 1\}.$$

Проверим, что при всех $z \in \Omega$

$$\limsup_{n\to\infty} \|F_{n,z}\|_{\mu_2}^{\frac{1}{n}} \le \exp(g_\Omega(z;\infty)), \tag{3.17}$$

если $\mu \in \mathrm{Reg}$. Как показано в первой части доказательства, этого достаточно для правильности μ_2 по Сталу — Тотику. Легко проверить, что при любом натуральном $n \ge 1$

$$\|F_{n,z}\|_\mu \ge \left\|F^0_{n,z}\right\|_\mu = \|F_{n-1,z}\|_{\mu_1} \ge \|F_{n-1,z}\|_{\mu_2}.$$

Из $\mu \in \mathrm{Reg}$ следует, что

$$\exp(g_\Omega(z;\infty)) = \lim_{n\to\infty} \|F_{n,z}\|_\mu^{\frac{1}{n}} = \limsup_{n\to\infty} \|F_{n,z}\|_\mu^{\frac{1}{n-1}} \ge \limsup_{n\to\infty} \|F_{n-1,z}\|_{\mu_2}^{\frac{1}{n-1}}.$$

Неравенство (3.17) доказано. $\square$

Замечание 3.8. Первая часть проведенного доказательства фактически дает следующее утверждение. *Если μ и ν — конечные положительные борелевские меры, $\mu \in \mathrm{Reg}$, $\nu \in [\mu]$ и*

$$\nu(A) \ge \mu(A)$$

для любого борелевского $A \subseteq \mathbb{C}$, то $\nu \in \mathrm{Reg}$.

Доказательство следствия 2.8. Пусть $z \in E_R$. Предположим вначале, что $\mu\{z\} = 0$. Так как по условию $\mu \in \mathrm{Reg}$, из формулы (3.1) и предложения 2.5 следует неравенство

$$\limsup_{n\to\infty} |p_n(\mu; z)|^{\frac{1}{n}} \le 1.$$

Если последнее неравенство является строгим, то ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |p_k(\mu; z)|^2$ сходится, что в силу (3.1) и (2.5) противоречит предположению $\mu\{z\} = 0$.

Пусть теперь $\mu\{z\} = \alpha > 0$. Тогда

$$\mu = \mu_0 + \alpha\delta_z,$$

где δ_z — мера Дирака в точке z, а μ_0 — конечная борелевская мера с компактным носителем $\operatorname{supp}(\mu_0) \subseteq \operatorname{supp}(\mu)$. Легко видеть, что $z \in \operatorname{supp}(\mu_0)$ (в противном случае z — изолированная точка S_μ, что противоречит условию $z \in E_R$). В соответствии с леммой 3.7 из $\mu \in \mathrm{Reg}$ получаем $\mu_0 \in \mathrm{Reg}$, что вместе с равенством (2.11) и предложением 2.5 дает

$$\limsup_{n\to\infty} |p_n(\mu; z)|^{\frac{1}{n}} = \frac{\limsup\limits_{n\to\infty} |p_n(\mu_0; z)|^{\frac{1}{n}}}{\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \alpha \sum\limits_{k=0}^{n-1} |p_k(\mu_0; z)|^2\right)^{\frac{1}{2n}} \left(1 + \alpha \sum\limits_{k=0}^{n} |p_k(\mu_0; z)|^2\right)^{\frac{1}{2n}}} = \limsup_{n\to\infty} |p_n(\mu_0; z)|^{\frac{1}{n}}.$$

Так как $\mu_0\{z\} = 0$, в соответствии с первой частью настоящего доказательства

$$\limsup_{n\to\infty} |p_n(\mu_0; z)|^{\frac{1}{n}} = 1.$$

Таким образом, равенство (2.9) доказано для любой точки $z \in E_R$ и любой $\mu \in \mathrm{Reg}$. $\square$

Следствие 2.9 тривиально вытекает из следствий 2.7, 2.8. Следствие 2.10 есть частный случай следствия 2.9.

Доказательство теоремы 2.1. Справедливость импликации (i) $\Rightarrow$ (ii) следует из предложений 2.5, 2.6 и замечания 3.4. Импликация (ii) $\Rightarrow$ (iii) тривиальна. Осталось установить (iii) $\Rightarrow$ (i).

Пусть (iii) выполняется. Предположим, что $E_i \neq \varnothing$ и $z_0 \in E_i$. Тогда существует правильная по Сталу — Тотику мера ν такая, что

$$\nu \in [\mu], \quad \nu\{z_0\} > 0.$$

Действительно, если

$$\nu = \mu + w + \delta_{z_0},$$

где w — равновесная мера компакта S_μ, а δ_{z_0} — мера Дирака в z_0, то $\nu\{z_0\} \geq 1$, $\mathrm{supp}(\nu) = \mathrm{supp}(\mu)$, а из $w \in \mathrm{Reg}$ получаем $\nu \in \mathrm{Reg}$ (см. замечание 3.8).

Используя предложение 2.4, находим, что

$$\lim_{n\to\infty} \|F_{n,z_0}\|_\nu^{\frac{1}{n}} = 1.$$

Тогда в соответствии с (iii) имеем

$$\exp(g_\Omega(z_0; \infty)) = 1,$$

но из леммы 3.3 следует, что это равенство противоречит предположению $z_0 \in E_i$. $\square$

Замечание 3.9. Равновесная мера компакта S_μ является своего рода «каноническим» примером меры, правильной по Сталу — Тотику. Известно [7, теорема 4.1.1], что если неравенство $\frac{d\mu}{dw} > 0$ выполнено w-п. в., то $\mu \in \mathrm{Reg}$.

Благодарности. Начальный вариант работы был написан во время визита первого из авторов в Мерсинский университет (Турция), поддержанного агентством TUBITAK (the Scientific and Technical Reasearch Counsil of Turkey), и выполнен при частичной поддержке фонда ДФФД (Державний Фонд Фундаментальних Досліджень України), грант 01.07/00241. Особую благодарность хочется выразить рецензенту настоящей работы, чьи многочисленные замечания способствовали уточнению и сокращению почти всех доказательств.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Вольберг А. Л.* Среднеквадратическая полнота многочленов за пределами теоремы Сеге // Докл. АН СССР. 1978. Т. 241, № 3. С. 521–527.
2. *Thomson J.* Approximation in the mean by polynomials // Ann. of Math. 1991. V. 133. P. 477–507.
3. *Akeroyd J.* An extension of Szegö's Theorem // Indiana Univ. Math. J. 1994. V. 43, N 4. P. 1339–1347.
4. *Akeroyd J.* An extension of Szegö's Theorem. II // Indiana Univ. Math. J. 1996. V. 45, N 1. P. 241–252.
5. *Conway J. B.* Subnormal operators. Pitman: Boston, 1981.

6. *Суетин П. К.* Проблема В. А. Стеклова в теории ортогональных многочленов // Математический анализ. М.: ВИНИТИ, 1977. Т. 15. С. 5–83. (Итоги науки и техники).
7. *Stahl H., Totik V.* General Orthogonal Polynomials. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1992.
8. *Гамелин Т.* Равномерные алгебры. М.: Мир, 1973.
9. *Ландкоф Н. С.* Основы современной теории потенциала. М.: Наука, 1966.
10. *Pommerenke Ch.* Boundary behaviour of conformal maps. Berlin; Heidelberg: Springer-Verl., 1992.
11. *Helms L. L.* Introduction to potential theory. New York: Wiley-Intersci., 1969.
12. *Pommerenke Ch.* Univalent Functions. Göttingen: Vandenhoek and Ruprecht, 1975.
13. *Сеге Г.* Ортогональные многочлены. М.: Физматгиз, 1962.

Статья поступила 13 августа 2003 г., окончательный вариант — 28 января 2005 г.

Довгошей Алексей Альфредович
Институт прикладной математики и механики НАН Украины,
ул. Р. Люксембург, 74, Донецк 83114, Украина
dovgoshey@iamm.ac.donetsk.ua, aleksdov@aport.ru

Fahreddin Abdullaev
Mersin University, Faculty of Art and Sciences,
Department of Mathematics, 33342 Mersin, Turkey
fabdul@mersin.edu.tr

Mehmet Cüçükaslan
Mersin University, Faculty of Art and Sciences,
Department of Mathematics, 33342 Mersin, Turkey
mkucukaslan@mersin.edu.tr