*Сибирский математический журнал*
*Ноябрь—декабрь, 2005. Том 46, № 6*

*УДК 514.772.22*

# ПОВЕРХНОСТИ В ТРЕХМЕРНЫХ ГРУППАХ ЛИ

**Д. А. Бердинский, И. А. Тайманов**

**Аннотация:** Выводятся представления Вейерштрасса для поверхностей в трехмерных группах Ли, снабженных геометриями Тёрстона, и устанавливаются порождающие уравнения для минимальных поверхностей в этих группах. С использованием спектральные свойства соответствующих операторов Дирака выводятся аналоги функционала Уиллмора для этих геометрий.

**Ключевые слова:** поверхность, трехмерные группы Ли, представление Вейерштрасса, функционал Уиллмора.

## 1. Введение

В статье мы обобщаем методы представления Вейерштрасса (или спинорного представления) поверхностей в $\mathbb{R}^3$ [1, 2] и $SU(2) = S^3$ [3] на поверхности в трехмерных группах Ли, а именно группах $\mathrm{Nil}, \widetilde{\mathrm{SL}}_2$ и $\mathrm{Sol}$, наделенных так называемой геометрией Тёрстона [4].

Главная особенность этого подхода состоит в том, что геометрия поверхности связана со спектральными характеристиками соответствующего оператора Дирака. Между тем этот подход вскрывает неизвестный ранее геометрический смысл функционала и гипотезы Уиллмора. Последняя утверждает, что для торов функционал Уиллмора достигает своего минимума на торах Клиффорда.

Функция $\psi$ порождает поверхность в $\mathbb{R}^3$ посредством формул Вейерштрасса в том и только в том случае, если она удовлетворяет некоторым уравнениям типа Дирака, где оператор Дирака имеет в общем случае два потенциала $U$ и $V$, которые совпадают в случае поверхности в $\mathbb{R}^3$. Для поверхности $M$ в $\mathbb{R}^3$ интеграл

$$E(M) = \int\limits_M UV \frac{i\,dz \wedge d\bar{z}}{2}$$

равен $\frac{1}{4}\int\limits_M H^2\,d\mu$, где $H$ — средняя кривизна и $d\mu$ — индуцированная форма площади на $M$, т. е. $E(M)$ с точностью до множителя равен функционалу Уиллмора (см. [1])

$$\mathscr{W}(M) = \int\limits_M H^2\,d\mu.$$

Аналогичные факты установлены для поверхностей в группе $SU(2)$ в [3], хотя при этом формулы Вейерштрасса должны были быть заменены конструкциями, приспособленными для некоммутативных групп Ли.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 03–01–00403) и программы фундаментальных исследований РАН «Математические методы в нелинейной динамике».

В поиске физического подтверждения гипотезы Уиллмора отметим, что для тора Клиффорда спектральная кривая, которая определялась для произвольных торов в [2], имеет нулевой геометрический род. Более того, отклонение спектральной кривой тора от плоской кривой, которая является спектральной кривой оператора Дирака с нулевыми потенциалами $U = V = 0$, измеряется функцией $E(M)$. Это приводит к предложенному вторым автором подходу к доказательству гипотезы Уиллмора, состоящему из доказательства того, что в каждом конформном классе минимум функционала Уиллмора достигается на торах с минимальным геометрическим родом (эта часть некоторое время назад была объявлена доказанной М. У. Шмидтом, см. math.DC/0203224 в http://ArXiv.org) и последующей проверки гипотезы для торов с минимальным геометрическим родом в соответствующих конформных классах.

Недавно Хаскинс предложил рассматривать род спектральной кривой как меру геометрической сложности для некоторых других вариационных задач геометрии [5].

В настоящей статье мы выводим аналогичные формулы для функционала $E(M)$ для поверхностей в Nil, $\widetilde{\mathrm{SL}}_2$ и Sol. Оказывается, что этот функционал имеет неожиданные геометрические свойства. Мы назовем его *спинорной энергией* или просто *энергией поверхности.*

Мы до сих пор не знаем, ограничен он снизу или нет. Для замкнутых поверхностей в Sol даже неясно, всегда ли его значения вещественны. Однако он измеряет отклонение спектральной кривой тора от плоской кривой и мы считаем, что этого достаточно для подтверждения его геометрической важности.

Проблема нахождения аналогов гипотезы Уиллмора для таких функционалов и описания их экстремалей представляется особенно интересной.

В работе мы также выводим уравнения на $\psi$, соответствующие минимальным поверхностям в группах Ли, и нашими методами получаем другое доказательство результата Абреша о том, что для поверхностей постоянной средней кривизны в Nil и $\widetilde{\mathrm{SL}}_2$ некоторые квадратичные дифференциалы голоморфны [6].

Было бы интересно связать эти условия с интегрируемыми системами, как это сделано для поверхностей постоянной средней кривизны в $\mathbb{R}^3$ и $S^3$.

Заметим, что подход Абреша отличается от нашего и основывается на представлении Nil и $\widetilde{\mathrm{SL}}_2$ как линейных расслоений над поверхностями постоянной кривизны (см. также недавнюю работу [7], где это свойство используется для изучения поверхностей в Nil и $\widetilde{\mathrm{SL}}_2$). Похоже, что невозможность такого представления для Sol объясняет, почему наш подход не приводит к такой удовлетворительной картине, как в случае Nil и $\widetilde{\mathrm{SL}}_2$.

Отметим также, что изучение поверхностей в произвольных группах Ли методом интегрируемых систем было впервые предпринято в [8]. Мы также надеемся, что наш подход будет полезен в изучении глобальных свойств минимальных поверхностей и поверхностей постоянной средней кривизны в группах Ли в духе [9, 10].

Результаты этой статьи частично изложены на конференции по теории поверхностей в Бенедиктбойерне (январь 2005).

Мы благодарим У. Абреша за полезные обсуждения и объяснение его результатов о голоморфных квадратичных дифференциалах для поверхностей постоянной средней кривизны в Nil и $\widetilde{\mathrm{SL}}_2$.

## 2. Предварительные сведения

**2.1. Левоинвариантные метрики на группах Ли.** Напомним, что метрика $\langle \xi, \eta \rangle$ на группе Ли $G$ называется *левоинвариантной*, если она инвариантна по отношению к левым сдвигам:

$$L_g : G \xrightarrow{\times g} G, \quad h \to gh, \ h \in G,$$

т. е. для любых векторов $\xi$ и $\eta$, касательных к $G$ в элементе группы $h$, скалярное произведение их сдвигов под действием $g$ и скалярное произведение $\xi$ и $\eta$ совпадают:

$$\langle \xi, \eta \rangle = \langle L_g^* \xi, L_g^* \eta \rangle, \quad \xi, \eta \in T_h G, \ g, h \in G.$$

Ясно, что каждая левоинвариантная метрика определяется заданием скалярного произведения касательных векторов в единице $1 \in G$ группы $G$, т. е. скалярным произведением в алгебре Ли $\mathscr{G}$ группы $G$.

Для вычисления связности Леви-Чивиты мы воспользуемся формализмом, известным из математической физики.

Пусть векторные поля $e_1, \dots, e_n$ на $n$-мерном многообразии $M$ таковы, что в любой точке они образуют ортонормированный базис: $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$, $i, j = 1, \dots, n$. Связность Леви-Чивиты имеет следующий вид:

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2}\bigl(c^i_{kj} + c^j_{ik} + c^k_{ij}\bigr), \quad \nabla_{e_k} e_j = \Gamma^i_{jk} e_i,$$

где $[e_i, e_j] = c^k_{ij} e_k$.

В нашем случае рассмотрим ортонормированный базис $\xi_1, \dots, \xi_n$ в касательной плоскости в единице группы $G$ и продолжим его левыми сдвигами до векторных полей на всей группе:

$$e_i(g) = L_g^* \xi_i, \quad i = 1, \dots, n, \ g \in G.$$

Структурные константы $c^i_{jk}$ алгебры Ли $\mathscr{G}$ группы $G$ вычисляются по формуле

$$\alpha_{ijk} = \langle [e_i, e_j], e_k \rangle = c^k_{ij},$$

и тогда

$$\nabla_{e_k} e_j = \frac{1}{2} \sum_i (\alpha_{kji} + \alpha_{ikj} + \alpha_{ijk}) e_i. \tag{1}$$

В частности, $\alpha_{ijk}$ — кососимметричный тензор для компактной группы Ли $G$ с метрикой Киллинга, и формула (1) имеет вид

$$\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X, Y],$$

где $X$ и $Y$ — левоинвариантные векторные поля. За подробностями мы отсылаем к работе Милнора [11].

**2.2. Деривационные уравнения.** Пусть $\Sigma$ — поверхность, вложенная в $G$, и $f : \Sigma \to G$ — вложение. Выберем конформный параметр $z = x + iy$ на $\Sigma$ (или, более точно, в области $\Sigma$) и обозначим через $\mathbf{I} = e^{2\alpha}\, dz d\bar{z}$ индуцированную метрику.

Рассмотрим обратный образ $TG$, т. е. $\mathscr{G}$-расслоение над $\Sigma$: $\mathscr{G} \to E = f^{-1}(TG) \xrightarrow{\pi} \Sigma$, и дифференциал

$$d_{\mathscr{A}} : \Omega^1(\Sigma; E) \to \Omega^2(\Sigma; E),$$

который действует на $E$-значных 1-формах. Зададим форму $\omega$ следующим образом:

$$\omega = u\,dz + u^*\,d\bar{z}.$$

Тогда

$$d_{\mathscr{A}}\omega = d'_{\mathscr{A}}\omega + d''_{\mathscr{A}}\omega,$$

где $d'_{\mathscr{A}}\omega = -\nabla_{\bar{\partial} f} u\,dz \wedge d\bar{z}$, $d''_{\mathscr{A}}\omega = \nabla_{\partial f} u^*\,dz \wedge d\bar{z}$.

Прямым вычислением получим первое деривационное уравнение:

$$d_{\mathscr{A}}(df) = 0. \tag{2}$$

Согласно определению вектора напряжений $\tau(f)$ имеем

$$d_{\mathscr{A}}(*df) = f \cdot (e^{2\alpha}\tau(f))dx \wedge dy = \frac{i}{2} f \cdot (e^{2\alpha}\tau(f))\,dz \wedge d\bar{z},$$

где $f \cdot \tau(f) = 2HN$, $N$ — нормальный вектор и $H$ — средняя кривизна. Мы получаем второе деривационное уравнение:

$$d_{\mathscr{A}}(*df) = ie^{2\alpha} HN\,dz \wedge d\bar{z}. \tag{3}$$

Для $S = SU(2)$ этот вывод проделан в [3] (см. также вывод гармонических уравнений для поверхностей в группах Ли в [12]).

Поскольку метрика левоинвариантна, запишем эти уравнения в терминах

$$\Psi = f^{-1}\partial f, \quad \Psi^* = f^{-1}\bar{\partial} f$$

следующим образом:

$$\partial\Psi^* - \bar{\partial}\Psi + \nabla_\Psi \Psi^* - \nabla_{\Psi^*}\Psi = 0, \tag{4}$$

$$\partial\Psi^* + \bar{\partial}\Psi + \nabla_\Psi \Psi^* + \nabla_{\Psi^*}\Psi = e^{2\alpha} H f^{-1}(N). \tag{5}$$

Уравнение (4) равносильно уравнению (2), а уравнение (5) — уравнению (3).

Рассмотрим случай, когда группа Ли $G$ трехмерная, и выберем ортонормированный базис $e_1, e_2, e_3$ по отношению к скалярному произведению в алгебре Ли $\mathscr{G}$ группы $G$.

Разложим $\Psi$ и $\Psi^*$ в этом базисе:

$$\Psi = \sum_{k=1}^{3} Z_k e_k, \quad \Psi^* = \sum_{k=1}^{3} \overline{Z}_k e_k,$$

и перепишем уравнения (4) и (5) в обозначениях $Z_k$, $k = 1, 2, 3$, таким образом:

$$\sum_j (\partial \overline{Z}_j - \bar{\partial} Z_j) e_j + \sum_{j,k} (Z_j \overline{Z}_k - \overline{Z}_j Z_k) \nabla_{e_j} e_k = 0, \tag{6}$$

$$\sum_j (\partial \overline{Z}_j + \bar{\partial} Z_j) e_j + \sum_{j,k} (Z_j \overline{Z}_k + \overline{Z}_j Z_k) \nabla_{e_j} e_k$$
$$= 2iH[(\overline{Z}_2 Z_3 - Z_2 \overline{Z}_3) e_1 + (\overline{Z}_3 Z_1 - Z_3 \overline{Z}_1) e_2 + (\overline{Z}_1 Z_2 - Z_1 \overline{Z}_2) e_3]. \tag{7}$$

Мы полагаем, что базис $\{e_1, e_2, e_3\}$ положительно ориентирован, и поэтому

$$f^{-1}(N) = 2ie^{-2\alpha}[(\overline{Z}_2 Z_3 - Z_2 \overline{Z}_3) e_1 + (\overline{Z}_3 Z_1 - Z_3 \overline{Z}_1) e_2 + (\overline{Z}_1 Z_2 - Z_1 \overline{Z}_2) e_3]$$

(для $G = SU(2)$ с метрикой Киллинга эта формула принимает вид $f^{-1}(N) = 2ie^{-2\alpha}[\Psi^*, \Psi]$, в работе [3] множитель 2 в правой части аналогичной формулы для $N$ (формула (47)) был пропущен, тем не менее он учтен во всех последующих вычислениях, и эта опечатка не затронула результатов). Так как параметр $z$ конформный, имеем

$$\langle \Psi, \Psi \rangle = \langle \Psi^*, \Psi^* \rangle = 0, \quad \langle \Psi, \Psi^* \rangle = \frac{1}{2} e^{2\alpha},$$

что эквивалентно

$$Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 = 0, \quad |Z_1|^2 + |Z_2|^2 + |Z_3|^2 = \frac{1}{2} e^{2\alpha}.$$

Из первого уравнения следует, что вектор $Z$ может быть представлен в виде

$$Z_1 = \frac{i}{2}(\bar{\psi}_2^2 + \psi_1^2), \quad Z_2 = \frac{1}{2}(\bar{\psi}_2^2 - \psi_1^2), \quad Z_3 = \psi_1 \bar{\psi}_2. \tag{8}$$

**2.3. Оператор Дирака и энергия поверхности.** Теперь представление Вейерштрасса получается подстановкой $\psi$ в (6) и (7) (см. [1, 3] для таких представлений поверхностей в $\mathbb{R}^3$ и $S^3$).

Оказывается, что деривационные уравнения принимают вид уравнения Дирака:

$$\mathscr{D}\psi = \left[ \begin{pmatrix} 0 & \partial \\ -\bar{\partial} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix} \right] \psi = 0, \tag{9}$$

решением которого является

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}.$$

Первая квадратичная форма равна $\mathbf{I} = e^{2\alpha}\, dz d\bar{z} = (|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2)^2\, dz d\bar{z}$, и левый сдвиг нормального вектора имеет вид

$$f^{-1}(N) = e^{-\alpha}[i(\psi_1\psi_2 - \bar{\psi}_1\bar{\psi}_2)e_1 - (\psi_1\psi_2 + \bar{\psi}_1\bar{\psi}_2)e_2 + (|\psi_2|^2 - |\psi_1|^2)e_3)]. \tag{10}$$

Так как $\Psi\, dz = \left(\sum Z_k e_k\right) dz$ — корректно определенная 1-форма, заключаем, что 1-формы $\psi_1^2\, dz$, $\bar{\psi}_2^2\, dz$, $\psi_1\bar{\psi}_2\, dz$ глобально определены на всей поверхности. С учетом уравнения Дирака заключаем, что $UV\, dz \wedge d\bar{z}$ — корректно определенная 2-форма на поверхности (см. подробности в [1]).

Для поверхности $M$, вложенной в $\mathbb{R}^3$, потенциалы оператора Дирака вещественные и совпадают: $U = V$. Для такой поверхности

$$E(M) = \int\limits_M UV \frac{i\, dz \wedge d\bar{z}}{2} = \frac{1}{4} \int\limits_M H^2\, d\mu,$$

где $d\mu = e^{2\alpha} dx \wedge dy$ — индуцированная мера на поверхности и $H$ — средняя кривизна. Напомним, что функционал Уиллмора равен

$$\mathscr{W}(M) = \int\limits_M H^2\, d\mu.$$

Это наблюдение из [1] стало началом рассмотрения спектральных характеристик оператора $\mathscr{D}$ в качестве геометрических величин и физического объяснения гипотезы Уиллмора с помощью спектральных кривых вложенных торов (см. [1, 3]).

В общем случае $U$ и $V$ не обязательно совпадают и надо рассматривать энергию замкнутой поверхности как

$$E(M) = \int\limits_M UV\,dx \wedge dy = \int\limits_M UV \frac{i\,dz \wedge d\bar{z}}{2}. \tag{11}$$

Не всегда удается выяснить, является ли функционал энергии вещественным. Проверим это лишь в нескольких случаях. Для этого воспользуемся простым предложением, которое прямо следует из уравнения Дирака. Действительно, $\bar\partial\psi_1 = (\operatorname{Re} V + i \operatorname{Im} V)\psi_2$, $\bar\partial\bar\psi_2 = (-\operatorname{Re} U + i \operatorname{Im} U)\psi_1$, откуда вытекает

**Предложение 1.** *Пусть $\psi$ удовлетворяет уравнению Дирака* (9)*, тогда верно следующее тождество:*

$$\bar\partial(\psi_1\bar\psi_2) = \left(-\operatorname{Re} U|\psi_1|^2 + \operatorname{Re} V\left|\psi_2^2\right|\right) + i\left(\operatorname{Im} U|\psi_1|^2 + \operatorname{Im} V|\psi_2|^2\right). \tag{12}$$

**2.4. Геометрии Тёрстона на группах Ли** $\mathrm{Nil}$**,** $\mathrm{Sol}$**,** $\widetilde{\mathrm{SL}}_2$**.** Согласно теореме Тёрстона все трехмерные максимальные односвязные геометрии $(X, \operatorname{Isom} X)$, допускающие компактные фактор-геометрии, содержатся в следующем списке:

1) трехмерные геометрии с постоянной секционной кривизной: $X = \mathbb{R}^3$, $S^3$ или $H^3$;

2) произведение пар геометрий: $X = S^2 \times \mathbb{R}$ или $H^2 \times \mathbb{R}$;

3) геометрии на группах Ли $\mathrm{Nil}$, $\mathrm{Sol}$ и $\widetilde{\mathrm{SL}}_2$ с некоторыми левоинвариантными метриками.

За подробностями об этой теореме и известной гипотезе Тёрстона о геометризации трехмерных многообразий отсылаем к [13, 4].

В статье мы изучаем поверхности в геометриях, которые моделируются группами Ли $\mathrm{Nil}$, $\mathrm{Sol}$ и $\widetilde{\mathrm{SL}}_2$. Перед тем как перейти к самим поверхностям, мы кратко напомним основные факты, касающиеся этих геометрий, отсылая за подробным изложением к [4].

**2.4.1. Группа** $\mathrm{Nil}$**.** Эта группа образована всеми матрицами вида

$$\begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad x, y, z \in \mathbb{R},$$

с обычным матричным умножением и левоинвариантной метрикой вида

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + (dz - x\,dy)^2.$$

Алгебра Ли образована элементами

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

которые удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям:

$$[e_1, e_2] = e_3, \quad [e_1, e_3] = [e_2, e_3] = 0.$$

Мы выводим из (1), что связность имеет вид

$$\begin{gathered} \nabla_{e_1} e_2 = -\nabla_{e_2} e_1 = \frac{1}{2} e_3, \quad \nabla_{e_1} e_3 = \nabla_{e_3} e_1 = -\frac{1}{2} e_2, \\ \nabla_{e_2} e_3 = \nabla_{e_3} e_2 = \frac{1}{2} e_1, \quad \nabla_{e_1} e_1 = \nabla_{e_2} e_2 = \nabla_{e_3} e_3 = 0. \end{gathered} \tag{13}$$

**2.4.2. Группа $\widetilde{\mathrm{SL}}_2$.** Группа $G = \widetilde{\mathrm{SL}}_2$ является универсальным накрытием группы $SL(2)$, образованной всеми вещественными $2 \times 2$-матрицами с детерминантом, равным единице. Группа $PSL(2) = SL(2)/\pm 1$ состоит из сохраняющих ориентацию изометрий гиперболической плоскости $H^2$ и диффеоморфна $UH^2$ — расслоению единичных касательных векторов к гиперболической плоскости $H^2$. Более того, левоинвариантная метрика на $\widetilde{\mathrm{SL}}_2$, соответствующая геометрии Тёрстона (т. е. с максимальной группой изометрий), получается поднятием относительно проекции:

$$\widetilde{\mathrm{SL}}_2 \to SL(2) \to PSL(2) \approx UH^2.$$

Метрика на $UH^2$ определяется следующим образом.

Рассмотрим гиперболическую плоскость как диск $|z| < 1$ в комплексной плоскости с метрикой

$$ds^2 = \frac{4\,dzd\bar{z}}{(1 - |z|^2)^2}$$

и метрику на $UH^2$ определим так:

$$dl^2 = \frac{4(dzd\bar{z} + d\varphi^2)}{(1 - |z|^2)^2},$$

где $\varphi$ — угловая координата на единичных окружностях в касательных плоскостях к $H^2$. Отождествим генераторы алгебры Ли $\widetilde{\mathrm{SL}}_2$ с генераторами следующих однопараметрических подгрупп:

$$g_x = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \\ \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{pmatrix}, \ g_y = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} & \frac{iy}{\sqrt{1-y^2}} \\ -\frac{iy}{\sqrt{1-y^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \end{pmatrix}, \ g_\varphi = \begin{pmatrix} e^{i\varphi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi/2} \end{pmatrix},$$

которые действуют на $H^2$ дробно-линейными преобразованиями:

$$z \to \frac{az + b}{cz + d}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2).$$

Генераторы этих подгрупп имеют вид

$$f_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad f_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad f_3 = \begin{pmatrix} i/2 & 0 \\ 0 & -i/2 \end{pmatrix}$$

и удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям:

$$[f_1, f_2] = -4f_3, \quad [f_1, f_3] = -f_2, \quad [f_2, f_3] = f_1.$$

Искомая метрика на $\widetilde{\mathrm{SL}}_2$ индуцируется скалярным произведением

$$\langle f_j, f_k \rangle = 4\delta_{jk}, \quad j, k = 1, 2, 3,$$

на алгебре Ли $\widetilde{\mathrm{SL}}_2$. Учитывая (1), получаем

$$\begin{gathered} \nabla_{e_1} e_2 = -\nabla_{e_2} e_1 = -e_3, \quad \nabla_{e_1} e_3 = e_2, \quad \nabla_{e_3} e_1 = \frac{3}{2} e_2, \\ \nabla_{e_2} e_3 = -e_1, \quad \nabla_{e_3} e_2 = -\frac{3}{2} e_1, \quad \nabla_{e_1} e_1 = \nabla_{e_2} e_2 = \nabla_{e_3} e_3 = 0, \end{gathered} \tag{14}$$

где $e_j = \frac{1}{2} f_j$, $\langle e_j, e_k \rangle = \delta_{jk}$, $j, k = 1, 2, 3$.

**2.4.3. Группа Sol.** Эта группа состоит из всех матриц вида

$$\begin{pmatrix} e^{-z} & 0 & x \\ 0 & e^z & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad x, y, z \in \mathbb{R},$$

с обычным матричным умножением и левоинвариантной метрикой вида

$$ds^2 = e^{2z}\,dx^2 + e^{-2z}\,dy^2 + dz^2.$$

Алгебра Ли образована элементами

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

которые удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям:

$$[e_1, e_2] = 0, \quad [e_1, e_3] = e_1, \quad [e_2, e_3] = -e_2.$$

Учитывая (1), заключаем, что

$$\begin{gathered} \nabla_{e_1} e_2 = \nabla_{e_2} e_1 = 0, \quad \nabla_{e_1} e_3 = e_1, \quad \nabla_{e_3} e_1 = 0, \quad \nabla_{e_2} e_3 = -e_2, \\ \nabla_{e_3} e_2 = 0, \quad \nabla_{e_1} e_1 = -\nabla_{e_2} e_2 = -e_3, \quad \nabla_{e_3} e_3 = 0. \end{gathered} \tag{15}$$

**2.5. Тензоры кривизны трехмерных групп Ли.** Используя (13)–(15), вычислим тензор кривизны

$$\langle R(X,Y)Z, W\rangle = R_{lkji} W^l Z^k Y^j X^i = \langle (\nabla_Y \nabla_X - \nabla_X \nabla_Y + \nabla_{[X,Y]})Z, W\rangle$$

в группах Nil, $\widetilde{\mathrm{SL}}_2$ и Sol. Мы не приводим здесь все эти простые вычисления и укажем лишь следующий конечный результат.

**Предложение 2.** *Для групп Ли* Nil, $\widetilde{\mathrm{SL}}_2$ *и* Sol *если есть три различных индекса среди $i, j, k, l$, то $R_{ijkl} = 0$. Другие компоненты тензора кривизны имеют вид*

$$R_{1212} = \begin{cases} -\frac{3}{4} & \text{для Nil}, \\ -4 & \text{для } \widetilde{\mathrm{SL}}_2, \\ 1 & \text{для Sol}, \end{cases} \qquad R_{1313} = R_{2323} = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{для Nil}, \\ 1 & \text{для } \widetilde{\mathrm{SL}}_2, \\ -1 & \text{для Sol}. \end{cases}$$

Напомним, что если $|X| = |Y| = 1$ и эти векторы линейно независимы, то $K_{XY} = \langle R(X,Y)X, Y\rangle$ есть секционная кривизна плоскости, натянутой на $X$ и $Y$. Это предложение позволяет нам вычислять секционную кривизну любой плоскости.

## 3. Представление Вейерштрасса для поверхностей в группах Ли

**3.1. Построение поверхности по $\psi$.** В этой части выведем условия на вектор-функцию $\psi$, т. е. критерий на функцию $\psi$, соответствующую вложению поверхности в Nil, $\widetilde{\mathrm{SL}}_2$, или Sol. Пусть вектор-функция $\psi$ удовлетворяет этим условиям для одной из рассматриваемых нами групп $G$. Тогда можно построить поверхность следующим образом (это обобщает представление Вейерштрасса поверхностей в $\mathbb{R}^3$ [2] и $SU(2)$ [3] на поверхности в этих группах).

Пусть $\psi$ определено на поверхности $M$ с комплексным параметром $z$. Рассмотрим точку $P \in M$. Подставим $\psi$ в формулу (8) для компонент $Z_1, Z_2, Z_3$ вектора: $\Psi = \sum_{k=1}^{3} Z_k e_k = f^{-1}\partial f$. Затем решаем линейное дифференциальное уравнение в группе $G$:

$$f_z = f\Psi$$

с начальным условием $f(P) = g \in G$. Таким образом, получаем требуемую поверхность как отображение $f : M \to G$.

Из вывода условий совместности в п. 2.2 получается, что любая поверхность $f : M \to G$ может быть получена таким образом. Индуцированная метрика имеет вид $ds^2 = e^{2\alpha}\, dz d\bar{z}$, $e^\alpha = (|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2)$, а индуцированная мера на поверхности $M$ — вид

$$d\mu = e^{2\alpha}\frac{i\, dz \wedge d\bar{z}}{2}.$$

Квадратичный дифференциал Хопфа равен

$$\omega = A\, dz^2, \quad A = \langle \nabla_{f_z} f_z, N\rangle.$$

Точная запись в терминах $\psi$ зависит от группы Ли и связности Леви-Чивиты на ней. В самом деле,

$$A = \langle \Psi_z, N\rangle + \Big\langle \sum_{j,k} Z_j Z_k \nabla_{e_j} e_k, N \Big\rangle = (\bar{\psi}_2 \partial\psi_1 - \psi_1 \partial\bar{\psi}_2) + \Big\langle \sum_{j,k} Z_j Z_k \nabla_{e_j} e_k, N \Big\rangle. \tag{16}$$

Условия совместности принимают форму уравнения Дирака (9) и описывают $\bar{\partial}\psi_1$ и $\partial\psi_2$:

$$\mathscr{D}\psi = \left[\begin{pmatrix} 0 & \partial \\ -\bar{\partial} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix}\right]\psi = 0.$$

Другие производные $\partial\psi_1$ и $\bar{\partial}\psi_2$ получаются следующим образом. Продифференцировав $e^\alpha$, получим

$$\alpha_z e^\alpha = \bar{\psi}_1 \partial\psi_1 + \psi_2 \partial\bar{\psi}_2 + (\psi_1 \partial\bar{\psi}_1 + \bar{\psi}_2 \partial\psi_2),$$

где согласно уравнению Дирака выражение в скобках записывается как

$$\psi_1 \partial\bar{\psi}_1 + \bar{\psi}_2 \partial\psi_2 = (\overline{V} - U)\psi_1 \bar{\psi}_2.$$

Вместе с формулой для дифференциала Хопфа это позволяет выписать систему для $\partial\psi_1$ и $\partial\bar{\psi}_2$:

$$\begin{pmatrix} \bar{\psi}_1 & \psi_1 \\ \bar{\psi}_2 & -\psi_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial\psi_1 \\ \partial\bar{\psi}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_z e^\alpha + (U - \overline{V})\psi_1 \bar{\psi}_2 \\ A - \langle \sum\limits_{j,k} Z_j Z_k \nabla_{e_j} e_k, N\rangle \end{pmatrix}.$$

Разрешая эту систему, получаем выражения для $\partial\psi_1$ и $\bar{\partial}\psi_2$, что вместе с уравнением Дирака дает полную систему уравнений Вейнгартена в терминах $\psi$:

$$(\partial - \mathscr{A})\psi = 0, \quad (\bar{\partial} - \mathscr{B})\psi = 0. \tag{17}$$

Теперь уравнения Кодацци выводятся из уравнений нулевой кривизны:

$$\partial\bar{\partial}\psi_k = \bar{\partial}\partial\psi_k, \quad k = 1, 2.$$

В дальнейшем будем называть функцию $\psi$ *порождающим спинором поверхности* (см. [3] для объяснения этой терминологии).

**3.2. Группа** Nil. В силу (13) деривационные уравнения (6), (7) принимают вид

$$\begin{gathered}\partial\overline{Z}_1-\bar\partial Z_1=0,\quad \partial\overline{Z}_2-\bar\partial Z_2=0,\quad \partial\overline{Z}_3-\bar\partial Z_3+(Z_1\overline{Z}_2-\overline{Z}_1Z_2)=0,\\ \partial\overline{Z}_1+\bar\partial Z_1+(Z_2\overline{Z}_3+\overline{Z}_2Z_3)=2iH(\overline{Z}_2Z_3-Z_2\overline{Z}_3),\\ \partial\overline{Z}_2+\bar\partial Z_2-(Z_1\overline{Z}_3+\overline{Z}_1Z_3)=2iH(\overline{Z}_3Z_1-Z_3\overline{Z}_1),\\ \partial\overline{Z}_3+\bar\partial Z_3=2iH(\overline{Z}_1Z_2-Z_1\overline{Z}_2).\end{gathered}\tag{18}$$

При подстановке (8) в эти формулы первая пара уравнений имеет вид

$$\partial\psi_2^2+\bar\partial\psi_1^2=0,$$

а четвертое и пятое уравнения эквивалентны следующему:

$$\partial\psi_2^2-\bar\partial\psi_1^2+i\psi_1\psi_2(|\psi_2|^2-|\psi_1|^2)=-2H\psi_1\psi_2(|\psi_1|^2+|\psi_2|^2).$$

Система этих двух уравнений в точке, где $\psi_1\psi_2\neq0$, может быть представлена в форме уравнения Дирака и по непрерывности продолжена на всю поверхность:

$$\begin{gathered}\mathscr{D}_{\mathrm{Nil}}\psi=\left[\begin{pmatrix}0&\partial\\-\bar\partial&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}U_{\mathrm{Nil}}&0\\0&V_{\mathrm{Nil}}\end{pmatrix}\right]\psi=0,\\ U_{\mathrm{Nil}}=V_{\mathrm{Nil}}=\frac{H}{2}(|\psi_1|^2+|\psi_2|^2)+\frac{i}{4}(|\psi_2|^2-|\psi_1|^2),\end{gathered}\tag{19}$$

где $H$ — средняя кривизна поверхности.

Замечание 1. Касательная плоскость в точке, где $Z_3=\psi_1\bar\psi_2=0$, натянута на векторы, соответствующие левоинвариантным полям, образованным $e_1$ и $e_2$. Так как коммутатор этих векторных полей не лежит в плоскостях, образованных этими векторами (согласно $[e_1,e_2]=e_3$), то левоинвариантное распределение плоскостей, натянутых на $e_1$ и $e_2$, нигде не интегрируемо. Поэтому тождество $Z_3=0$ не может иметь места в открытом подмножестве поверхности. Отметим, что потенциалы оператора Дирака всюду корректно определены и поэтому уравнение $\mathscr{D}\psi=0$ продолжается по непрерывности на замыкание множества $\{Z_3\neq0\}$, которое, как показано выше, совпадает со всей поверхностью. То же выполнено для поверхностей в $SU(2)$ и $\widetilde{\mathrm{SL}}_2$, но не выполняется в случае $G=\mathrm{Sol}$.

Дифференциал Хопфа имеет вид

$$A=(\bar\psi_2\partial\psi_1-\psi_1\partial\bar\psi_2)+i\psi_1^2\bar\psi_2^2,\tag{20}$$

и уравнения Вейнгартена (17) состоят из уравнения Дирака и следующей системы:

$$\partial\psi_1=\alpha_z\psi_1+Ae^{-\alpha}\psi_2-\frac{i}{2}\psi_1^2\bar\psi_2,\quad \bar\partial\psi_2=-\overline{A}e^{-\alpha}\psi_1+\alpha_{\bar z}\psi_2-\frac{i}{2}\bar\psi_1\psi_2^2.\tag{21}$$

Из уравнений Вейнгартена вытекает, что

$$(\partial-\mathscr{A})(\bar\partial-\mathscr{B})\psi-(\bar\partial-\mathscr{B})(\partial-\mathscr{A})\psi=(\mathscr{A}_{\bar z}-\mathscr{B}_z+[\mathscr{A},\mathscr{B}])\psi=0.$$

Замечание 2. В случае $G=\mathbb{R}^3$ или $G=SU(2)$ спинор $\psi^*=(-\bar\psi_2,\bar\psi_1)^\perp$ удовлетворяет уравнению

$$R\psi^*=(\mathscr{A}_{\bar z}-\mathscr{B}_z+[\mathscr{A},\mathscr{B}])\psi^*=0$$

и вместе с $R\psi = 0$ это дает

$$R = \mathscr{A}_{\bar z} - \mathscr{B}_z + [\mathscr{A}, \mathscr{B}] = 0$$

(см. [3]). В случае $G = \mathrm{Nil}$ так же, как и для $G = \widetilde{\mathrm{SL}}_2$ или $G = \mathrm{Sol}$, уравнение $R\psi^* = 0$ не выполняется и, в частности, ядро оператора Дирака не может быть рассмотрено как векторное пространство над кватернионами. Поэтому в нашей ситуации уравнения Кодацци будут выведены по-другому.

Далее,

$$\mathscr{A} = \begin{pmatrix} \alpha_z - \frac{i}{2}Z_3 & Ae^{-\alpha} \\ -W & -\frac{i}{2}Z_3 \end{pmatrix}, \quad \mathscr{B} = \begin{pmatrix} -\frac{i}{2}\overline{Z}_3 & \overline{W} \\ -\overline{A}e^{-\alpha} & \alpha_{\bar z} - \frac{i}{2}\overline{Z}_3 \end{pmatrix},$$

где $Z_3 = \psi_1\bar\psi_2$ и $W = \left(\frac{H}{2} - \frac{i}{4}\right)e^{\alpha}$. Уравнение $R\psi = 0$ записывается как система двух уравнений

$$\kappa_1 = ((\alpha_{z\bar z} - |A|^2e^{-2\alpha} + |W|^2) + \frac{i}{2}(\partial\overline{Z}_3 - \bar\partial Z_3))\psi_1 + (A_{\bar z}e^{-\alpha} - \overline{W}_z + \alpha_z\overline{W})\psi_2 = 0,$$

$$\kappa_2 = (\overline{A}_z e^{-\alpha} - W_{\bar z} + \alpha_{\bar z}W)\psi_1 + (-(\alpha_{z\bar z} - |A|^2e^{-2\alpha} + |W|^2) + \frac{i}{2}(\partial\overline{Z}_3 - \bar\partial Z_3))\psi_2 = 0.$$

Напомним, что для поверхностей в Nil имеет место

$$\partial\overline{Z}_3 - \bar\partial Z_3 = -\frac{i}{2}(|\psi_2|^4 - |\psi_1|^4), \quad \partial\overline{Z}_3 + \bar\partial Z_3 = H(|\psi_2|^4 - |\psi_1|^4). \tag{22}$$

Теперь система уравнений Кодацци примет вид

$$\kappa_1\bar\psi_1 - \bar\kappa_2\psi_2 = 0, \quad \kappa_1\bar\psi_2 + \bar\kappa_2\psi_1 = 0$$

и переписывается как

$$\alpha_{z\bar z} - |A|^2e^{-2\alpha} + \frac{H^2}{4}e^{2\alpha} = \frac{1}{16}(3|\psi_1|^4 + 3|\psi_2|^4 - 10|\psi_1|^2|\psi_2|^2),$$
$$A_{\bar z} - \frac{H_z}{2}e^{2\alpha} + \frac{1}{2}(|\psi_2|^4 - |\psi_1|^4)\psi_1\bar\psi_2 = 0.$$

Используя (22), запишем эту систему так:

$$\begin{gathered} \alpha_{z\bar z} - e^{-2\alpha}|A|^2 + \frac{1}{4}e^{2\alpha}H^2 = \frac{3}{16}e^{2\alpha} - |Z_3|^2, \\ \bar\partial\left(A + \frac{{Z_3}^2}{2H+i}\right) = \frac{1}{2}H_z e^{2\alpha} + \bar\partial\left(\frac{1}{2H+i}\right){Z_3}^2. \end{gathered} \tag{23}$$

**Теорема 1.** *Для поверхности в* $G = \mathrm{Nil}$ *ее порождающий спинор* $\psi$ *удовлетворяет уравнению Дирака* (19).

*Более того, вектор-функция* $\psi$*, удовлетворяющая* (19)*, является порождающим спинором некоторой поверхности в* Nil.

*Система уравнений Вейнгартена эквивалентна* (19), (21). *Дифференциал Хопфа имеет вид* (20), *а уравнения Кодацци — вид* (23).

**Следствие 1.** *Порождающий спинор минимальной поверхности в* Nil *удовлетворяет следующему уравнению:*

$$\bar\partial\psi_1 = \frac{i}{4}(|\psi_2|^2 - |\psi_1|^2)\psi_1, \quad \partial\psi_2 = -\frac{i}{4}(|\psi_2|^2 - |\psi_1|^2)\psi_1.$$

**Следствие 2** (Абреш). *Для поверхностей постоянной средней кривизны в* Nil *квадратичный дифференциал Хопфа*

$$\widetilde{A}\,dz^2 = \left(A + \frac{{Z_3}^2}{2H+i}\right)dz^2$$

*голоморфен.*

**Предложение 3.** *Если дифференциал Хопфа* $\widetilde{A}\,dz^2$ *голоморфный, то поверхность в* Nil *имеет постоянную среднюю кривизну.*

Доказательство. Предположим, что $H_z \neq 0$ в некоторой области. Тогда

$$\frac{1}{2}e^{2\alpha}H_z = \frac{2H_{\bar z}}{(2H+i)^2}Z_3^2$$

и из равенства модулей левой и правой частей уравнения следует, что

$$\frac{1}{2}e^{2\alpha} = \frac{2|\psi_1|^2|\psi_2|^2}{4H^2+1}.$$

Поскольку $e^{\alpha} = |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2$, получаем равенство

$$(4H^2+1)(|\psi_1|^2+|\psi_2|^2)^2 = 4|\psi_1|^2|\psi_2|^2,$$

откуда выводим, что

$$4H^2e^{2\alpha} + (|\psi_1|^2 - |\psi_2|^2)^2 = 0.$$

Ясно, что это тождество имеет место в том и только в том случае, если $|\psi_1| = |\psi_2|$ и $H = 0$, т. е. поверхность минимальная. Это противоречит первоначальному предположению.

В заключение вычислим функционал энергии для замкнутых поверхностей в группе Nil.

**Предложение 4.** *Для замкнутой ориентированной поверхности $M$ в группе* Nil *функционал энергии вещественный и равен*

$$E(M) = \int\limits_M \left(\frac{H^2}{4}(|\psi_1|^2+|\psi_2|^2)^2 - \frac{1}{16}(|\psi_2|^2-|\psi_1|^2)^2\right)\frac{i\,dz\wedge d\bar z}{2}. \qquad (24)$$

Доказательство. Подставив выражения $U_{\mathrm{Nil}}$ и $V_{\mathrm{Nil}}$ в тождество (12), получим

$$\bar\partial(\psi_1\bar\psi_2) = \frac{H}{2}(|\psi_2|^2 - |\psi_1|^2) + i\frac{1}{4}(|\psi_2|^4 - |\psi_1|^4).$$

Согласно формуле Стокса

$$\int\limits_M \frac{H}{2}(|\psi_2|^2-|\psi_1|^2)\frac{i\,dz\wedge d\bar z}{2} + i\int\limits_M \frac{1}{4}(|\psi_2|^4-|\psi_1|^4)\frac{i\,dz\wedge d\bar z}{2} = 0. \qquad (25)$$

Вещественная часть левой части этого выражения с точностью до постоянной равна $\operatorname{Im} E(M)$. Отсюда следует, что функционал энергии вещественный. Подставляя $U_{\mathrm{Nil}}$ и $V_{\mathrm{Nil}}$ в $\operatorname{Re} E(M)$, получаем (24). Это доказывает наше предложение.

Отметим, что равенство нулю мнимой части выражения (25) вместе с (10) влечет за собой равенство

$$\int\limits_M \langle f^{-1}(N), e_3\rangle\,d\mu = \int\limits_M (|\psi_2|^4 - |\psi_1|^4)\frac{i\,dz\wedge d\bar z}{2} = 0.$$

**Предложение 5.** *Функционал энергии для поверхности $M$ в группе* Nil *равен*

$$E(M) = \frac{1}{4}\int\limits_M \left(H^2 + \frac{\widehat{K}}{4} - \frac{1}{16}\right) d\mu, \tag{26}$$

*где $\widehat{K}$ — секционная кривизна касательной плоскости в точке.*

Доказательство. Воспользовавшись предложением 2, заключаем, что секционная кривизна касательной плоскости в единице группы равна

$$\widehat{K} = \frac{1}{4} - \cos^2\varphi,$$

где $\varphi$ — угол между нормалью к плоскости и $e_3$. Учитывая (10), запишем подынтегральное выражение в (24):

$$\frac{1}{4}e^{2\alpha}H^2 - \frac{1}{16}(|\psi_2|^2 - |\psi_1|^2)^2 = \frac{1}{4}e^{2\alpha}H^2 - \frac{1}{16}e^{2\alpha}\langle f^{-1}(N), e_3\rangle^2$$
$$= \frac{1}{4}e^{2\alpha}\left(H^2 - \frac{1}{4}\cos^2\varphi\right) = \frac{1}{4}e^{2\alpha}\left(H^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4} - \widehat{K}\right)\right) = \frac{1}{4}e^{2\alpha}\left(H^2 + \frac{1}{4}\widehat{K} - \frac{1}{16}\right).$$

Предложение доказано.

**3.3. Группа $\widetilde{\mathrm{SL}}_2$.** Подставляя (14) в деривационные уравнения (6), (7), получаем, что

$$\begin{aligned}
\partial\overline{Z}_1 - \bar\partial Z_1 + \frac{1}{2}(Z_2\overline{Z}_3 - \overline{Z}_2Z_3) &= 0,\\
\partial\overline{Z}_2 - \bar\partial Z_2 + \frac{1}{2}(Z_3\overline{Z}_1 - \overline{Z}_3Z_1) &= 0,\\
\partial\overline{Z}_3 - \bar\partial Z_3 - 2(Z_1\overline{Z}_2 - \overline{Z}_1Z_2) &= 0,\\
\partial\overline{Z}_1 + \bar\partial Z_1 - \frac{5}{2}(Z_2\overline{Z}_3 + \overline{Z}_2Z_3) &= 2iH(\overline{Z}_2Z_3 - Z_2\overline{Z}_3),\\
\partial\overline{Z}_2 + \bar\partial Z_2 + \frac{5}{2}(Z_1\overline{Z}_3 + \overline{Z}_1Z_3) &= 2iH(\overline{Z}_3Z_1 - Z_3\overline{Z}_1),\\
\partial\overline{Z}_3 + \bar\partial Z_3 &= 2iH(\overline{Z}_1Z_2 - Z_1\overline{Z}_2).
\end{aligned} \tag{27}$$

При подстановке (8) в первые два уравнения получится уравнение

$$\partial\psi_2^2 + \bar\partial\psi_1^2 - \frac{i}{2}\psi_1\psi_2(|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2) = 0,$$

а четвертое и пятое уравнения эквивалентны следующему:

$$\partial\psi_2^2 - \bar\partial\psi_1^2 + \frac{5}{2}i\psi_1\psi_2(|\psi_1|^2 - |\psi_2|^2) = -2H\psi_1\psi_2(|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2).$$

Эти два уравнения в совокупности также могут представлены в виде уравнения Дирака (вывод аналогичен выводу для группы Nil, см. (19) в п. 3.2):

$$\begin{aligned}
\mathscr{D}_{\mathrm{SL}}\psi &= \left[\begin{pmatrix} 0 & \partial \\ -\bar\partial & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} U_{\mathrm{SL}} & 0 \\ 0 & V_{\mathrm{SL}}\end{pmatrix}\right]\psi = 0,\\
U_{\mathrm{SL}} &= \frac{H}{2}(|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2) + i\left(\frac{1}{2}|\psi_1|^2 - \frac{3}{4}|\psi_2|^2\right),\\
V_{\mathrm{SL}} &= \frac{H}{2}(|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2) + i\left(\frac{3}{4}|\psi_1|^2 - \frac{1}{2}|\psi_2|^2\right),
\end{aligned} \tag{28}$$

где $H$ — средняя кривизна поверхности.

Дифференциал Хопфа равен

$$A = (\bar\psi_2 \partial\psi_1 - \psi_1\partial\bar\psi_2) - \frac{5i}{2}\psi_1^2\bar\psi_2^2, \tag{29}$$

и мы имеем

$$\partial\psi_1 = \alpha_z\psi_1 + Ae^{-\alpha}\psi_2 + \frac{5i}{4}\psi_1^2\bar\psi_2, \quad \bar\partial\psi_2 = -\overline{A}e^{-\alpha}\psi_1 + \alpha_{\bar z}\psi_2 + \frac{5i}{4}\bar\psi_1\psi_2^2. \tag{30}$$

Матрицы $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ принимают вид

$$\mathscr{A} = \begin{pmatrix} \alpha_z + \frac{5i}{4}Z_3 & Ae^{-\alpha} \\ -W & \frac{5i}{4}Z_3 \end{pmatrix}, \quad \mathscr{B} = \begin{pmatrix} \frac{5i}{4}\overline{Z}_3 & \overline{W} \\ -\overline{A}e^{-\alpha} & \alpha_{\bar z} + \frac{5i}{4}\overline{Z}_3 \end{pmatrix},$$

где $W = \frac{1}{2}(H+i)e^{\alpha}$. Тождество $R\psi = 0$ эквивалентно уравнениям

$$\kappa_1 = \left((\alpha_{z\bar z} - |A|^2e^{-2\alpha} + |W|^2) - \frac{5i}{4}(\partial\overline{Z}_3 - \bar\partial Z_3)\right)\psi_1 + (A_{\bar z}e^{-\alpha} - \overline{W}_z + \alpha_z\overline{W})\psi_2 = 0,$$

$$\kappa_2 = (\overline{A}_z e^{-\alpha} - W_{\bar z} + \alpha_{\bar z}W)\psi_1 + \left(-(\alpha_{z\bar z} - |A|^2e^{-2\alpha} + |W|^2) - \frac{5i}{4}(\partial\overline{Z}_3 - \bar\partial Z_3)\right)\psi_2 = 0.$$

Так как порождающие спиноры поверхности в $\widetilde{\mathrm{SL}}_2$ удовлетворяют равенствам

$$\partial\overline{Z}_3 - \bar\partial Z_3 = i(|\psi_2|^4 - |\psi_1|^4), \quad \partial\overline{Z}_3 + \bar\partial Z_3 = H(|\psi_2|^4 - |\psi_1|^4),$$

запишем уравнения $\kappa_1\bar\psi_1 - \bar\kappa_2\psi_2 = 0$ и $\kappa_1\bar\psi_2 + \bar\kappa_2\psi_1 = 0$ как следующую систему:

$$\begin{gathered} \alpha_{z\bar z} - e^{-2\alpha}|A|^2 + \frac{1}{4}e^{2\alpha}H^2 = e^{2\alpha} - 5|Z_3|^2, \\ \bar\partial\left(A + \frac{5Z_3^2}{2(H-i)}\right) = \frac{1}{2}H_z e^{2\alpha} + \bar\partial\left(\frac{5}{2(H-i)}\right){Z_3}^2. \end{gathered} \tag{31}$$

Таким образом, имеет место

**Теорема 2.** *Для поверхности в группе $G = \widetilde{\mathrm{SL}}_2$ ее порождающий спинор $\psi$ удовлетворяет уравнению Дирака (28).*

*Любая вектор-функция $\psi$, удовлетворяющая уравнению Дирака (28), является порождающим спинором для некоторой поверхности в $\widetilde{\mathrm{SL}}_2$.*

*Система уравнений Вейнгартена эквивалентна системе, состоящей из двух уравнений (28) и (30). Дифференциал Хопфа имеет вид (20), а уравнения Кодацци — вид (23).*

**Следствие 3.** *Порождающий спинор минимальной поверхности в $\widetilde{\mathrm{SL}}_2$ удовлетворяет уравнениям*

$$\bar\partial\psi_1 = i\left(\frac{3}{4}|\psi_1|^2 - \frac{1}{2}|\psi_2|^2\right)\psi_2, \quad \partial\psi_2 = -i\left(\frac{1}{2}|\psi_1|^2 - \frac{3}{4}|\psi_2|^2\right)\psi_1.$$

**Следствие 4** (Абреш). *Для поверхностей постоянной средней кривизны $\widetilde{\mathrm{SL}}_2$ квадратичный дифференциал*

$$\widetilde{A}\,dz^2 = \left(A + \frac{5}{2(H-i)}Z_3^2\right)dz^2$$

*голоморфен.*

Замечание 3. Подход из доказательства предложения 3 не работает в случае $\widetilde{\mathrm{SL}}_2$, и мы не знаем, влечет ли голоморфность $\widetilde{A}$ то, что поверхность имеет постоянную среднюю кривизну.

В заключение вычислим функционал энергии для замкнутых поверхностей в $\widetilde{\mathrm{SL}}_2$.

**Предложение 6.** *Для замкнутой ориентированной поверхности $M$ в группе $\widetilde{\mathrm{SL}}_2$ функционал энергии вещественный и равен*

$$E(M) = \int\limits_M \left[\frac{H^2}{4}(|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2)^2 - \left(\frac{1}{2}|\psi_1|^2 - \frac{3}{4}|\psi_2|^2\right)\left(\frac{3}{4}|\psi_1|^2 - \frac{1}{2}|\psi_2|^2\right)\right]\frac{i\,dz\wedge d\bar z}{2}. \tag{32}$$

Доказательство этого предложения аналогично доказательству предложения 4, поэтому здесь мы его не приводим и отметим лишь, что для поверхностей $\widetilde{\mathrm{SL}}_2$ имеет место равенство

$$\int\limits_M \langle f^{-1}(N), e_3\rangle\, d\mu = \int\limits_M (|\psi_2|^4 - |\psi_1|^4)\frac{i\,dz\wedge d\bar z}{2} = 0.$$

Так же, как в группе Nil, мы можем записать формулу для функционала энергии в привычных геометрических терминах.

**Предложение 7.** *Функционал энергии поверхности $M \subset \widetilde{\mathrm{SL}}_2$ равен*

$$E(M) = \frac{1}{4}\int\limits_M \left(H^2 + \frac{5}{16}\widehat{K} - \frac{1}{4}\right) d\mu, \tag{33}$$

*где $\widehat{K}$ — секционная кривизна касательной плоскости в точке.*

Это предложение сразу следует из (24) и предложения 2.

**3.4. Группа** Sol**.** Согласно (15) деривационные уравнения (6), (7) для поверхностей в группе Sol имеют вид

$$\begin{aligned}
\partial\overline{Z}_1 - \bar\partial Z_1 + (Z_1\overline{Z}_3 - \overline{Z}_1 Z_3) &= 0,\\
\partial\overline{Z}_2 - \bar\partial Z_2 - (Z_2\overline{Z}_3 - \overline{Z}_2 Z_3) &= 0,\\
\partial\overline{Z}_3 - \bar\partial Z_3 &= 0,\\
\partial\overline{Z}_1 + \bar\partial Z_1 + (Z_1\overline{Z}_3 + \overline{Z}_1 Z_3) &= 2iH(\overline{Z}_2 Z_3 - Z_2\overline{Z}_3),\\
\partial\overline{Z}_2 + \bar\partial Z_2 - (Z_2\overline{Z}_3 + \overline{Z}_2 Z_3) &= 2iH(\overline{Z}_3 Z_1 - Z_3\overline{Z}_1),\\
\partial\overline{Z}_3 + \bar\partial Z_3 - 2(|Z_1|^2 - |Z_2|^2) &= 2iH(\overline{Z}_1 Z_2 - Z_1\overline{Z}_2).
\end{aligned} \tag{34}$$

Так же, как в пп. 3.2, 3.3, подставляем (8) в эти уравнения и получаем следующую пару уравнений:

$$\partial\psi_2^2 + \bar\partial\psi_1^2 - \bar\psi_1\bar\psi_2(|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2) = 0,$$
$$\partial\psi_2^2 - \bar\partial\psi_1^2 + \bar\psi_1\bar\psi_2(|\psi_1|^2 - |\psi_2|^2) = -2H\psi_1\psi_2(|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2).$$

Видно, что в точке, где $Z_3 = \psi_1\bar\psi_2 \neq 0$, эти уравнения принимают вид уравнения Дирака:

$$\begin{aligned}
\mathscr{D}_{\mathrm{Sol}}\psi &= \left[\begin{pmatrix} 0 & \partial \\ -\bar\partial & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} U_{\mathrm{Sol}} & 0 \\ 0 & V_{\mathrm{Sol}}\end{pmatrix}\right]\psi = 0,\\
U_{\mathrm{Sol}} &= \frac{H}{2}(|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2) + \frac{1}{2}\bar\psi_2^2\frac{\bar\psi_1}{\psi_1},\\
V_{\mathrm{Sol}} &= \frac{H}{2}(|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2) + \frac{1}{2}\bar\psi_1^2\frac{\bar\psi_2}{\psi_2}.
\end{aligned} \tag{35}$$

Замечание 4. Так как левоинвариантные векторные поля $e_1$ и $e_2$ коммутируют, уравнение $Z_3 = \psi_1\bar{\psi}_2 = 0$ может выполняться на открытом подмножестве $B$ поверхности. Поэтому уравнение Дирака не может быть продолжено на всю поверхность и не описывает деформацию $\psi$ в множестве $B$. Поскольку $H = 0$ в $B$, можно считать,что $U_{\mathrm{Sol}} = V_{\mathrm{Sol}} = 0$ внутри этой области. Тем не менее на границе множества $\{Z_3 \neq 0\}$ потенциалы $U_{\mathrm{Sol}}$ и $V_{\mathrm{Sol}}$ не всегда корректно определены в силу неопределенности выражений $\frac{\bar{\psi}_1}{\psi_1}$ и $\frac{\bar{\psi}_2}{\psi_2}$. Мера этого множества равна нулю, и мы можем корректно определить функционал энергии в Sol как

$$E(M) = \int\limits_{\{Z_3\neq 0\}} U_{\mathrm{Sol}} V_{\mathrm{Sol}}\, d\mu.$$

К сожалению, нам не удалось записать функционал энергии в общих геометрических терминах, как это было сделано для Nil и $\widetilde{\mathrm{SL}}_2$, и его геометрический смысл остается неясным до сих пор. Мы даже не можем сказать, является ли он вещественным для замкнутых поверхностей (как в случае групп $SU(2)$, Nil и $\widetilde{\mathrm{SL}}_2$) или нет.

Дифференциал Хопфа поверхности Sol равен

$$A = (\bar{\psi}_2\partial\psi_1 - \psi_1\partial\bar{\psi}_2) + \frac{1}{2}\left(\bar{\psi}_2^4 - \psi_1^4\right), \tag{36}$$

и система уравнений Вейнгартена имеет вид

$$\partial\psi_1 = \alpha_z\psi_1 + Ae^{-\alpha}\psi_2 - \frac{1}{2}\bar{\psi}_2^3, \quad \bar{\partial}\psi_2 = -\overline{A}e^{-\alpha}\psi_1 + \alpha_{\bar{z}}\psi_2 - \frac{1}{2}\bar{\psi}_1^3. \tag{37}$$

Система уравнений Кодацци записывается так:

$$\begin{gathered}\alpha_{z\bar{z}} - e^{-2\alpha}|A|^2 + \frac{1}{4}e^{2\alpha}H^2 = \frac{1}{4}(6|\psi_1|^2|\psi_2|^2 - (|\psi_1|^4 + |\psi_2|^4)),\\ A_{\bar{z}} - \frac{1}{2}H_z e^{2\alpha} = (|\psi_2|^4 - |\psi_1|^4)\psi_1\bar{\psi}_2.\end{gathered} \tag{38}$$

Подытожим полученные результаты.

Пусть отображение $f : M \to \mathrm{Sol}$ задает поверхность. Обозначим через $B$ подмножество $M$, где $Z_3 = \langle f^{-1}f_z, e_3\rangle = 0$. Пусть $B_0$ — внутренность $B$, и пусть $C$ — подмножество в $M$, выделенное неравенством $Z_3 \neq 0$. Поскольку $M = B_0 \cup \overline{C}$, множество $B \setminus B_0$ лежит в замыкании $\overline{C}$ множества $C$ и имеет нулевую меру.

**Теорема 3.** *Порождающий спинор $\psi$ поверхности $f : M \to \mathrm{Sol}$ удовлетворяет уравнению Дирака (35) в $C$ и уравнению Дирака с нулевыми потенциалами: $\bar{\partial}\psi_1 = \partial\psi_2 = 0$ в $B_0$.*

*Любая вектор-функция $\psi$, удовлетворяющая (35) на некотором множестве $D \subset M$, является порождающим спинором для некоторой поверхности $f : D \to \mathrm{Sol}$.*

*Дифференциал Хопфа равен (36). На множестве $B_0 \cup C$ уравнения Вейнгартена записываются, как (37) и уравнение Дирака для $\psi$. Система уравнений Кодацци имеет вид (38).*

**Следствие 5.** *Порождающий спинор $\psi$ минимальной поверхности в* Sol *удовлетворяет уравнениям*

$$\bar\partial\psi_1 = \frac{1}{2}\bar\psi_1^2\bar\psi_2, \quad \partial\psi_2 = -\frac{1}{2}\bar\psi_1\bar\psi_2^2.$$

**Дополнение при корректуре.** После сдачи данной работы в печать нам стало известно о работах [14, 15], где авторами получен ряд интересных результатов о минимальных поверхностях в трехмерных группах Ли. В частности, получены аналоги представления Вейерштрасса для минимальный поверхностей в группах Nil и Sol.

## *ЛИТЕРАТУРА*


1. *Taimanov I. A.* Modified Novikov–Veselov equation and differential geometry of surfaces // Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2. 1997. V. 179. P. 133–151.
2. *Тайманов И. А.* Представление Вейерштрасса замкнутых поверхностей в $\mathbb{R}^3$ // Функциональный анализ и его прил. 1998. V. 32, N 4. P. 49–62.
3. *Тайманов И. А.* Операторы Дирака и конформные инварианты торов в $\mathbb{R}^3$ // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова РАН. 2004. Т. 244. С. 233–263.
4. *Scott P.* The geometries of 3-manifolds // Bull. London Math. Soc. 1983. V. 15, N 5. P. 401–487.
5. *Haskins M.* The geometric complexity of special Lagrangian $T^2$-cones. Available at arxiv: math.DG/0307129.
6. *Abresch U.* Generalized Hopf differentials // Proceedings of the 13th School of Differential geometry. Mat. Contemp. 2004. (To appear).
7. *Daniel B.* Isometric immersions into 3-dimensional homogeneous manifolds. Available at arxiv: math.DG/0503500.
8. *Fokas A. S., Gelfand I. M.* Surfaces on Lie groups, on Lie algebras, and their integrability // Comm. Math. Phys. 1996. V. 177, N 1. P. 203–220.
9. *Abresch U., Rosenberg H.* The Hopf differential for constant mean curvature surfaces in $S^2\times\mathbb{R}$ and $H^2\times\mathbb{R}$, Acta Math. (To appear).
10. *Figueroa C., Mercuri F., Pedrosa R.* Invariant surfaces of the Heisenberg groups // Ann. Math. Pura Appl. 1999. V. 177. P. 173–194.
11. *Milnor J. W.* Curvatures of left invariant metrics on Lie groups // Adv. Math. 1976. V. 21, N 3. P. 293–329.
12. *Hitchin N.* Harmonic maps from a 2-torus to the 3-sphere // J. Differential Geom. 1990. V. 31, N 3. P. 627–710.
13. *Thurston W. P.* Three dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry // Bull. Amer. Math. Soc. 1982. V. 6, N 3. P. 357–381.
14. *Inoguchi J., Kumamoto T., Ohsugi N., Suyama Y.* Differential geometry of curves and surfaces in 3-dimensional homogeneous spaces. II // Fukuoka Univ. Sci. Rep. 2000. V. 30. P. 17–47.
15. *Inoguchi J.* Minimal surfaces in 3-dimensional solvable Lie groups // Chinese Ann. Math. 2003. V. 248, N 1. P. 73–84.


*Статья поступила 28 апреля 2005 г.*

*Бердинский Дмитрий Александрович*
*Новосибирский гос. университет, механико-математический факультет,*
*ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090*
berdinsky@ngs.ru

*Тайманов Искандер Асанович*
*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,*
*пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090*
taimanov@math.nsc.ru