*Сибирский математический журнал*
*Ноябрь—декабрь, 2005. Том 46, № 6*

*УДК 517.929*

# БИФУРКАЦИОННЫЙ МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

**Ю. Ф. Долгий, С. Н. Нидченко**

**Аннотация:** Исследуется устойчивость антисимметрических периодических решений дифференциальных уравнений с запаздыванием. Вводится однопараметрическое семейство периодических решений специальной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с переменным периодом. Условия устойчивости антисимметрического периодического решения дифференциального уравнения с запаздыванием формулируются в терминах функции этого периода.

**Ключевые слова:** дифференциальное уравнение с запаздыванием, периодическое решение, устойчивость.

## 1. Постановка задачи

Рассмотрим скалярное дифференциальное уравнение с постоянным запаздыванием

$$\frac{dx(t)}{dt} = -f(x(t-\tau)), \tag{1.1}$$

где $f$ — нечетная непрерывно дифференцируемая функция с положительной производной на интервале $(-\gamma, \gamma)$, $\gamma > 0$. В работе изучаются вопросы существования и устойчивости периодических решений, удовлетворяющих условию антисимметричности $x(t+2\tau) = -x(t)$, $t \in (-\infty, +\infty)$. Для дифференциальных уравнений с запаздыванием изолированные периодические решения исследовались в работах [1, 2], периодические решения с периодом, кратным запаздыванию, — в работах [3, 4], а их устойчивость — в работах [4, 5].

Используя результаты работы [5], задачу нахождения антисимметрического периодического решения дифференциального уравнения с запаздыванием (1.1) сводим к нахождению решения специальной краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot{x_1} = f(x_2), \quad \dot{x_2} = -f(x_1), \tag{1.2}$$

$$x_1(\tau) = x_2(0), \quad x_2(\tau) = -x_1(0). \tag{1.3}$$

Работа выполнена при поддержке программы фундаментальных исследований Президиума РАН «Математические методы в нелинейной динамике» (№ 15).

Здесь связь между антисимметрическим периодическим решением $x$ дифференциального уравнения с запаздыванием (1.1) и решением $\{x_1, x_2\}$ краевой задачи (1.2), (1.3) определяется формулами

$$x(t) = \begin{cases} x_1(t), & t \in [0, \tau], \\ x_2(t-\tau), & t \in [\tau, 2\tau]. \end{cases} \tag{1.4}$$

Система (1.2) продолжается с отрезка $[0, \tau]$ на всю числовую ось и имеет первый интеграл

$$F(x_1) + F(x_2) = C = \mathrm{const}, \quad x_1, x_2 \in (-\gamma, \gamma), \tag{1.5}$$

где $F(x) = \int\limits_0^x f(z)\,dz$, $x \in (-\gamma, \gamma)$.

Формула (1.5) определяет расположение интегральных кривых системы (1.2) на фазовой плоскости. Специальным начальным условиям $x_1(0, \mu) = 0$, $x_2(0, \mu) = \mu$, соответствуют замкнутые интегральные кривые, порождающие периодические движения $\{x_1(t, \mu), x_2(t, \mu)\}$, $t \in \mathbb{R}$, при $0 < \mu < \gamma$. Периоды $T$ решений системы (1.2) зависят от $\mu$.

Система (1.2) при малых значениях $\mu$ является системой Ляпунова [6, с. 153]. Для нахождения асимптотик периодических решений этой системы при малых значениях $\mu$ можно воспользоваться методом Ляпунова [6, с. 159].

**Утверждение 1.1.** *Пусть $f$ — нечетная трижды непрерывно дифференцируемая функция в окрестности точки $x = 0$, $f'(0) > 0$. При малых значениях параметра $\mu$ периодические решения $\{x_1(t, \mu), x_2(t, \mu)\}$, $t \in \mathbb{R}$, периода $T$ определяются формулами*

$$x_i(t, \mu) = y_i\left(\frac{2\pi}{T(\mu)}t, \mu\right), \quad t \in \mathbb{R}, \ i = 1, 2,$$

*где $y_i(s, \mu)$, $i = 1, 2$, $s \in \mathbb{R}$, — $2\pi$-периодические функции. При малых значениях параметра $\mu$ функции $y_1(s, \mu)$, $y_2(s, \mu)$ на отрезке $[0, 2\pi]$ и функция периодов $T$ задаются асимптотическими разложениями*

$$T(\mu) = \frac{2\pi}{f'(0)} - \frac{\pi f'''(0)}{4(f'(0))^2}\mu^2 + o(\mu^2),$$

$$y_1(s, \mu) = \sin(s)\mu + \frac{f'''(0)}{24 f'(0)}(-\sin^3(s)\cos^2(s) - \sin^5(s) + \sin(s))\mu^3 + o(\mu^3),$$

$$y_2(s, \mu) = \cos(s)\mu + \frac{f'''(0)}{24 f'(0)}(-\sin^2(s)\cos^3(s) - \cos^5(s) + \cos(s))\mu^3 + o(\mu^3).$$

**Утверждение 1.2.** *Пусть $f$ — нечетная непрерывно дифференцируемая функция с положительной производной на интервале $(-\gamma, \gamma)$. Тогда для существования периодического решения дифференциального уравнения с запаздыванием (1.1), удовлетворяющего условию антисимметричности, необходимо и достаточно, чтобы число $4\tau$ принадлежало интервалу $(\inf\limits_{0<\mu<\gamma} T(\mu), \sup\limits_{0<\mu<\gamma} T(\mu))$. Этот интервал дополняется точкой $t = \inf\limits_{0<\mu<\gamma} T(\mu)$ ($t = \sup\limits_{0<\mu<\gamma} T(\mu)$), если $\inf\limits_{0<\mu<\gamma} T(\mu) = T(\mu_1)$ ($\sup\limits_{0<\mu<\gamma} T(\mu) = T(\mu_2)$) для некоторого $\mu_1 \in (0, \gamma)$ ($\mu_2 \in (0, \gamma)$).*

При выполнении условий утверждения 1.2 антисимметрическое периодическое решение $x(t, \mu^*)$, $t \in \mathbb{R}$, дифференциального уравнения с запаздыванием определяется по формулам (1.4) через периодическое решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений (1.2) $\{x_1(t,\mu^*),\ x_2(t,\mu^*)\}$, $t \in \mathbb{R}$, для которого $T(\mu^*) = 4\tau$, $0 < \mu^* < \gamma$. Таких решений у дифференциального уравнения с запаздыванием (1.1) может быть несколько. Их число определяется количеством положительных решений уравнения $T(\mu) = 4\tau$ при $0 < \mu < \gamma$. Дифференциальное уравнение с запаздыванием имеет единственное периодическое решение, если функция периода $T$ монотонна.

При исследовании устойчивости антисимметрического периодического решения $x(t,\mu^*)$, $t \in \mathbb{R}$, дифференциального уравнения с запаздыванием (1.1) рассмотрим уравнение линейного приближения

$$\frac{dy(t)}{dt} = -f'(x(t - T(\mu^*)/4, \mu^*))y(t - T(\mu^*)/4) \tag{1.6}$$

для уравнения возмущенного движения. В уравнении (1.6) функция $a(t,\,\mu^*) = f'(x(t - T(\mu^*)/4, \mu^*))$, $t \in \mathbb{R}$, принимает только положительные значения и периодически зависит от $t$ с периодом $T(\mu^*)/2$.

В настоящей работе предлагается использовать бифуркационный подход в задаче исследования устойчивости периодического решения. Он связан с переходом от исследования устойчивости дифференциального уравнения с запаздыванием (1.6) к изучению устойчивости однопараметрического семейства дифференциальных уравнений с запаздыванием

$$\frac{dy(t)}{dt} = -f'(x(t - T(\mu)/4, \mu))y(t - T(\mu)/4), \quad \mu \in [0, \gamma). \tag{1.7}$$

## 2. Устойчивость линейной периодической системы дифференциальных уравнений с запаздыванием

Проведя в дифференциальном уравнении с запаздыванием (1.7) замену переменных:

$$t = \frac{T(\mu)}{2\pi}s, \quad \tilde{y}(s) = y\left(\frac{T(\mu)}{2\pi}s\right), \quad \tilde{x}(s,\mu) = x\left(\frac{T(\mu)}{2\pi}t, \mu\right),$$

находим

$$\frac{d\tilde{y}(s)}{ds} = -\frac{T(\mu)}{2\pi}f'(\tilde{x}(s - \pi/2, \mu))\tilde{y}(s - \pi/2), \quad \mu \in [0, \gamma). \tag{2.1}$$

Коэффициент полученного дифференциального уравнения при малых $\mu$ близок к постоянной, т. е. дифференциальное уравнение с запаздыванием является квазигармоническим.

**Утверждение 2.1.** *Пусть выполняются условия утверждения* 1.1. *Тогда при малых положительных значениях $\mu$ квазигармоническое дифференциальное уравнение с запаздыванием* (2.1) *устойчиво, если $T''(0) > 0$, и неустойчиво, если $T''(0) < 0$.*

Доказательство. При $\mu = 0$ дифференциальное уравнение с запаздыванием (2.1) имеет вид $\frac{d\hat{y}(s)}{ds} = -\hat{y}(s-\pi/2)$. Запишем его характеристическое уравнение $\lambda = -e^{-(\pi/2)\lambda}$. Используя метод Д-разбиения, можно показать, что оно имеет только два чисто мнимых корня $\lambda = \pm i$, а остальные корни имеют отрицательные действительные части. Следовательно, устойчивость дифференциального уравнения с запаздыванием (2.1) при малых положительных $\mu$ определяется поведением характеристических показателей этого уравнения, которые при $\mu = 0$ совпадают с числами $\pm i$. Паре чисто мнимых корней характеристического уравнения отвечает один полупростой характеристический показатель $\lambda_0 = i$ дифференциального уравнения с запаздыванием (2.1). Ему отвечают два линейно независимых решения Флоке: $y_1(s) = e^{is}$, $y_2(s) = e^{-is}$, $s \in \mathbb{R}$. Квазигармоническое уравнение с запаздыванием (2.1) имеет $\pi$-периодическое решение $y(s,\mu) = \dot{x}(s,\mu)$, $s \in \mathbb{R}$, которое является решением Флоке этого уравнения с характеристическим показателем $\lambda = i$. В силу двухкратности характеристического показателя $\lambda_0$ квазигармоническое дифференциальное уравнение с запаздыванием (2.1) имеет еще один характеристический показатель $\lambda(\mu)$ ($\lambda(0) = \lambda_0 = i$). Если действительная часть этого характеристического показателя при малых положительных значениях параметра $\mu$ больше нуля, то квазигармоническое уравнение неустойчиво. Если действительная часть характеристического показателя $\lambda(\mu)$ при малых положительных значениях параметра $\mu$ меньше нуля, то критический характеристический показатель $\lambda = i$ простой, остальные характеристические показатели имеют отрицательные действительные части, а квазигармоническое дифференциальное уравнение с запаздыванием устойчиво. Воспользовавшись результатами утверждения 1.1 и методикой вычисления характеристических показателей для квазигармонических дифференциальных уравнений с запаздыванием [7], находим

$$\lambda(\mu) = i - \frac{f'(0)T''(0)}{4+\pi^2}\mu^2 + o(\mu^2).$$

Утверждение доказано.

Устойчивость дифференциального уравнения с запаздыванием (2.1) при больших значениях параметра $\mu$ зависит от расположения собственных чисел оператора монодромии, действующего в пространстве $C[-\pi, 0]$. Оператор монодромии задается формулой $(U\varphi)(\vartheta) = y(\pi+\vartheta,\varphi)$, $\vartheta \in [-\pi, 0]$, где $y(\pi+\cdot,\varphi)$ — отрезок решения дифференциального уравнения с запаздыванием (2.1) с начальным моментом $t = 0$ и начальной функцией $\varphi$.

Задачу нахождения ненулевых собственных чисел $\rho \in \mathbb{C}$ оператора монодромии $U$ можно заменить задачей нахождения ненулевых собственных чисел $z \in \mathbb{C}$ специальной краевой задачи [8, с. 49]

$$\dot{y}_1 = za(\vartheta,\mu)y_2, \quad \dot{y}_2 = -za(\pi/2+\vartheta,\mu)y_1, \tag{2.2}$$

$$y_1(-\pi/2) = -zy_2(0), \quad y_2(-\pi/2) = zy_1(0), \tag{2.3}$$

где $\rho = -z^2$, $a(\vartheta,\mu) = \frac{T(\mu)}{2\pi} f'(\tilde{x}(\vartheta - \pi/2,\mu))$, $\vartheta \in [-\pi/2, \pi/2]$, $\mu \in [0,\gamma)$, $z, \rho \in \mathbb{C}$. Приведем краевую задачу (2.2), (2.3) к специальному виду

$$J\dot{y} = zH(\vartheta,\mu)y, \tag{2.4}$$

$$y(-\pi/2) = zJy(0). \tag{2.5}$$

Здесь $y = (y_1, y_2)^\top$, $z \in \mathbb{C}$,

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad H(\vartheta,\mu) = \begin{pmatrix} a(\pi/2+\vartheta,\mu) & 0 \\ 0 & a(\vartheta,\mu) \end{pmatrix},$$

$\mu \in [0,\gamma)$, $\vartheta \in [-\pi/2, 0]$. Собственные числа $z$ краевой задачи (2.4), (2.5) определяются из характеристического уравнения

$$\det(zJY(0,z,\mu) - I_2) = 0, \tag{2.6}$$

где $Y$ — фундаментальная нормированная матрица системы (2.4), $Y(-\pi/2, z, \mu) = I_2$, $z \in \mathbb{C}$, $\mu \in [0, \gamma)$, $I_2$ — единичная матрица порядка 2. Используя формулу Лиувилля, находим

$$\det(Y(\vartheta, z, \mu)) = \exp\left(\int\limits_{-\pi/2}^{\vartheta} Tr(H(s, \mu))\,ds\right) = 1, \ z \in \mathbb{C}, \ \mu \in [0, \gamma), \ \vartheta \in [-\pi/2, 0].$$

В результате характеристическое уравнение (2.6) преобразуем к виду

$$D(z, \mu) = z^2 - 2V(z, \mu)z + 1 = 0, \tag{2.7}$$

где $V(z, \mu) = \frac{1}{2}(y_{12}(0, z, \mu) - y_{21}(0, z, \mu))$, $Y(\vartheta, z, \mu) = \|y_{ij}(\vartheta, z, \mu)\|_1^2$, $\vartheta \in [-\pi/2, 0]$, $z \in \mathbb{C}$, $\mu \in [0, \gamma)$. Рассмотрим некоторые свойства фундаментальной нормированной матрицы $Y$ системы (2.4).

**Лемма 2.1.** *Для фундаментальной матрицы $Y$ справедливо равенство*

$$Y(-\pi/2 - \vartheta, \mu, z) = JY(\vartheta, \mu, -z)J^\top Y(0, \mu, z), \tag{2.8}$$

*где $\vartheta \in [-\pi/2, 0]$, $z \in \mathbb{C}$, $\mu \in [0, \gamma)$.*

Доказательство. Заменяя аргумент $\vartheta$ на $\vartheta_1$, перепишем систему дифференциальных уравнений (2.2):

$$\dot{y}_1 = za(\vartheta_1, \mu)y_2, \quad \dot{y}_2 = -za(\pi/2 + \vartheta_1, \mu)y_1, \quad \vartheta_1 \in [-\pi/2, 0].$$

Проведя в этой системе дифференциальных уравнений замену переменных: $\vartheta_1 = -\pi/2 - \vartheta$, $v_1(\vartheta) = y_2(-\pi/2 - \vartheta)$, $v_2(\vartheta) = -y_1(-\pi/2 - \vartheta)$, $\vartheta \in [-\pi/2, 0]$, получим

$$\dot{v}_1 = -za(\vartheta, \mu)v_2, \quad \dot{v}_2 = za(\pi/2 + \vartheta, \mu)v_1. \tag{2.9}$$

Произвольное решение $\{v_1, v_2\}^\top$ системы дифференциальных уравнений (2.9) представимо в виде

$$(v_1(\vartheta, \mu, z), v_2(\vartheta, \mu, z))^\top = J^\top y(-\pi/2 - \vartheta, \mu, z), \tag{2.10}$$

где $y(\vartheta, \mu, z) = (y_1(\vartheta, \mu, z), y_2(\vartheta, \mu, z))^\top$, $\vartheta \in [-\pi/2, 0]$, $z \in \mathbb{C}$, $\mu \in [0, \gamma)$, — некоторое решение системы дифференциальных уравнений (2.2). Тогда

$$(v_1(\vartheta, \mu, z), v_2(\vartheta, \mu, z))^\top = J^\top Y(-\pi/2 - \vartheta, \mu, z)D,$$

где $\vartheta \in [-\pi/2, 0]$, $z \in \mathbb{C}$, $\mu \in [0, \gamma)$, $D \in \mathbb{C}^2$. В силу произвольности решения $\{v_1, v_2\}^\top$ векторная постоянная $D$ может принимать любые значения из $\mathbb{C}^2$. Решение $\{v_1, v_2\}^\top$ также допускает представление

$$(v_1(\vartheta, \mu, z), v_2(\vartheta, \mu, z))^\top = y(\vartheta, \mu, -z) = Y(\vartheta, \mu, -z)C \tag{2.11}$$

при некотором $C \in \mathbb{C}^2$. Справедливо равенство

$$Y(\vartheta, \mu, -z)C = J^\top Y(-\pi/2 - \vartheta, \mu, z)D, \quad \vartheta \in [-\pi/2, 0], \ z \in \mathbb{C}, \ \mu \in [0, \gamma).$$

Полагая в этом равенстве $\vartheta = -\pi/2$, находим $C = J^\top Y(0, \mu, z)D$, $z \in \mathbb{C}$, $\mu \in [0, \gamma)$. Следовательно,

$$Y(\vartheta, \mu, -z)J^\top Y(\vartheta, \mu, z)D = J^\top Y(-\pi/2 - \vartheta, \mu, z)D, \ \vartheta \in [-\pi/2, 0], \ z \in \mathbb{C}, \ \mu \in [0, \gamma).$$

В силу произвольности $D \in \mathbb{C}^2$ из последнего равенства следует (2.8).

**Лемма 2.2.** *Для фундаментальной матрицы $Y$ справедливо равенство*

$$Y(-\pi/2-\vartheta,\mu,z)=SY(\vartheta,\mu,z)Y(0,\mu,z), \tag{2.12}$$

*где $\vartheta\in[-\pi/2,0]$, $z\in\mathbb{C}$, $\mu\in[0,\gamma)$, $S=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$.*

Доказательство. Проведя в системе дифференциальных уравнений (2.2) замену переменных: $\vartheta_1=-\pi/2-\vartheta$, $v_1(\vartheta)=y_2(-\pi/2-\vartheta)$, $v_2(\vartheta)=y_1(-\pi/2-\vartheta)$, $\vartheta\in[-\pi/2,0]$, получим новую систему дифференциальных уравнений

$$\dot v_1=za(\vartheta,\mu)v_2,\quad \dot v_2=-za(\pi/2+\vartheta,\mu)v_1.$$

Произвольное решение $\{v_1(\vartheta,\mu,z),v_2(\vartheta,\mu,z)\}^\top$, $\vartheta\in[-\pi/2,0]$, $z\in\mathbb{C}$, $\mu\in[0,\gamma)$ новой системы дифференциальных уравнений представимо в виде

$$(v_1(\vartheta,\mu,z),v_2(\vartheta,\mu,z))^\top=Y(\vartheta,\mu,z)C,$$

где $\vartheta\in[-\pi/2,0]$, $z\in\mathbb{C}$, $\mu\in[0,\gamma)$, $C\in\mathbb{C}^2$. Но это же решение можно представить в виде

$$(\bar v_1(\vartheta,\mu,z),\bar v_2(\vartheta,\mu,z))^\top=SY(-\pi/2-\vartheta,\mu,z)D,$$

где $\vartheta\in[-\pi/2,0]$, $z\in\mathbb{C}$, $\mu\in[0,\gamma)$, $D\in\mathbb{C}^2$. Тогда

$$Y(\vartheta,\mu,z)C=SY(-\pi/2-\vartheta,\mu,z)D$$

для всех $\vartheta\in[-\pi/2,0]$, $z\in\mathbb{C}$, $\mu\in[0,\gamma)$. Из этого равенства при $\vartheta=-\pi/2$ вытекает, что $C=SY(0,\mu,z)D$. Тогда

$$Y(\vartheta,\mu,z)SY(0,\mu,z)D=SY(-\pi/2,\mu,z)D,\quad \vartheta\in[-\pi/2,0],\ z\in\mathbb{C},\ \mu\in[0,\gamma).$$

В силу произвольности $D\in\mathbb{C}^2$ из последнего равенства следует (2.12).

**Лемма 2.3.** *Пусть $f$ — нечетная непрерывно дифференцируемая функция с положительной производной на интервале $(-\gamma,\gamma)$. Тогда функция $V$ удовлетворяет условиям*

(а) $V(1,\mu)=1$, $\mu\in[0,\gamma)$;

(б) $V(-z,\mu)=-V(z,\mu)$, $z\in\mathbb{C}$, $\mu\in[0,\gamma)$.

Доказательство. Можно показать, что уравнение (2.1) имеет антисимметрическое $2\pi$-периодическое решение $\tilde y(s,\mu)=\frac{d\tilde x(s,\mu)}{ds}$, $s\in\mathbb{R}$, $\mu\in[0,\gamma)$. Ему отвечает собственное число оператора монодромии $\rho=-1$, так как для антисимметрического периодического решения дифференциального уравнения с запаздыванием (1.1) имеем тождество $\dot x(\pi/2+\vartheta,\mu^*)\equiv-\dot x(\vartheta,\mu^*)$, $\vartheta\in[-\pi/2,0]$. Этому числу соответствуют два собственных числа $z=\pm1$ краевой задачи (2.4), (2.5). Из уравнения (2.7) следует, что функция $V$ удовлетворяет условиям $V(\pm1,\mu)=\pm1$, $\mu\in[0,\gamma)$. Первое утверждение леммы доказано.

Покажем, что $y_{12}(0,\mu,z)=-y_{21}(0,\mu,z)$, $\mu\in[0,\gamma)$, $z\in\mathbb{C}$. По лемме 2.2 имеем $Y(0,\mu,z)SY(0,\mu,z)=S$, $\mu\in[0,\gamma)$, $z\in\mathbb{C}$, или, в развернутой форме,

$$\begin{pmatrix}a_{11}(\mu,z)&a_{12}(\mu,z)\\a_{21}(\mu,z)&a_{22}(\mu,z)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},$$

где

$$a_{11}(\mu,z)=y_{11}(0,\mu,z)(y_{21}(0,\mu,z)+y_{12}(0,\mu,z)),$$
$$a_{12}(\mu,z)=y_{12}^2(0,\mu,z)+y_{11}(0,\mu,z)y_{22}(0,\mu,z),$$
$$a_{21}(\mu,z)=y_{11}(0,\mu,z)y_{22}(0,\mu,z)+y_{21}^2(0,\mu,z),$$

$$a_{22}(\mu,z)=(y_{12}(0,\mu,z)+y_{21}(0,\mu,z))y_{22}(0,\mu,z),$$
$$\mu\in[0,\gamma),\quad z\in\mathbb{C}.$$

Пусть $y_{12}(0,\mu,z)+y_{21}(0,\mu,z))\neq 0$ при некоторых $\mu\in[0,\gamma)$, $z\in\mathbb{C}$. Тогда из матричного равенства вытекает, что

$$y_{11}(0,\mu,z)=y_{22}(0,\mu,z)=0,\quad y_{12}(0,\mu,z)=y_{21}(0,\mu,z)=\pm 1.$$

В этом случае $\det Y(0,\mu,z)=-1$; противоречие. Следовательно,

$$Y(0,\mu,z)=\begin{pmatrix} y_{11}(0,\mu,z) & y_{12}(0,\mu,z)\\ -y_{12}(0,\mu,z) & y_{22}(0,\mu,z)\end{pmatrix},\quad \mu\in[0,\gamma),\ z\in\mathbb{C}.$$

Теперь согласно лемме 2.1 $Y(0,-z)=J^\top Y^{-1}(0,z)J$, или, в развернутом виде,

$$\begin{pmatrix} y_{11}(0,\mu,-z) & y_{12}(0,\mu,-z)\\ -y_{12}(0,\mu,-z) & y_{22}(0,\mu,-z)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y_{11}(0,\mu,z) & -y_{12}(0,\mu,z)\\ y_{12}(0,\mu,z) & y_{22}(0,\mu,z)\end{pmatrix},$$

где $\mu\in[0,\gamma)$, $z\in\mathbb{C}$. Из матричного равенства находим

$$y_{12}(0,\mu,-z)=-y_{12}(0,\mu,z),\quad \mu\in[0,\gamma),\ z\in\mathbb{C}.$$

Следовательно,

$$V(-z,\mu)=y_{12}(0,\mu,-z)=-y_{12}(0,\mu,z)=-V(z,\mu),\quad \mu\in[0,\gamma),\ z\in\mathbb{C}.$$

Лемма доказана.

При изменении параметра $\mu$ корни характеристического уравнения (2.7) перемещаются по комплексной плоскости симметрично относительно мнимой оси. Поэтому при изучении их движений можно ограничиться рассмотрением правой полуплоскости. Из леммы 2.3 следует, что характеристическое уравнение (2.7) имеет корни $z=\pm 1$, для каждого действительного корня $z_1\neq 1$ существует действительный корень $-z_1$ и для каждого комплексного корня $z_2$ существуют комплексные корни $-z_2$, $\bar{z}_2$, $-\bar{z}_2$.

**Лемма 2.4.** *Пусть $f$ — нечетная непрерывно дифференцируемая функция с положительной производной на интервале $(-\gamma,+\gamma)$. Если корень $z$ характеристического уравнения* (2.7) *удовлетворяет условию $|z|=1$, то $z=1$ или $z=-1$.*

Доказательство. Рассмотрим следующую краевую задачу:

$$J\dot{y}=\lambda H(\vartheta,\mu)y, y(-\pi/2)=zJy(0),\quad |z|=1,\ \lambda,z\in\mathbb{C}. \tag{2.13}$$

При фиксированных значениях аргументов $\vartheta\in[-1,0]$, $\mu\in[0,\gamma)$ матрицы $H(\vartheta,\mu)$ определенно положительны. Отсюда следует, что вспомогательная краевая задача (2.13) является самосопряженной. В силу самосопряженности краевая задача (2.13) имеет не более чем счетное число собственных чисел $\lambda$, единственной предельной точкой которых может быть лишь $\lambda=\infty$. Собственные числа (коль скоро они имеются) вещественны и имеют конечную кратность [9, с. 176]. Если краевая задача (2.4), (2.5) имеет собственное число $z$, удовлетворяющее условию $|z|=1$, то краевая задача (2.13) будет иметь собственное число $\lambda=z$. Поскольку все собственные числа задачи (2.13) вещественны, отсюда вытекает, что отмеченное собственное число $z=1$ или $z=-1$. Лемма доказана.

При непрерывном перемещении корней характеристического уравнения на комплексной плоскости они смогут пересечь единичную окружность $|z|=1$

согласно лемме 2.4 только в точке $z = 1$ или $z = -1$. В силу симметрии движения корней характеристического уравнения два корня одновременно пересекают окружность в точках $z = 1$ и $z = -1$. Направления пересечения окружности также совпадают. В момент пересечения окружности корень $z = 1$ становится кратным. Это условие позволяет определить соответствующее значение параметра $\mu = \mu^*$. Имеем

$$\frac{\partial D(1,\mu^*)}{\partial z} = 2 - 2V(1,\mu^*) - 2\frac{\partial V(1,\mu^*)}{\partial z} = -2\frac{\partial V(1,\mu^*)}{\partial z} = 0.$$

Следовательно, переход корней характеристического уравнения на комплексной плоскости через единичную окружность осуществляется при значениях параметра $\mu$, определяемых уравнением

$$\frac{\partial V(1,\mu)}{\partial z} = 0, \quad \mu \in [0,\gamma). \tag{2.14}$$

Рассмотрим окрестность точки $z = 1$. Полагаем $z = 1+\tilde{z}$, где $\tilde{z}$ — малое возмущение. Фундаментальную матрицу системы дифференциальных уравнений (2.4) будем искать в форме асимптотического разложения

$$Y(\vartheta, z, \mu) = Y_0(\vartheta,\mu) + Y_1(\vartheta,\mu)\tilde{z} + Y_2(\vartheta,\mu)\tilde{z}^2 + o(\tilde{z}^2),$$

где $\vartheta \in [-\pi/2, 0]$, $\tilde{z} \in \mathbb{C}$, $\mu \in [0,\gamma)$. Для нахождения коэффициентов этого асимптотического разложения имеем уравнения

$$\dot{Y}_0 = J^{-1}H(\vartheta,\mu)Y_0, \tag{2.15}$$

$$\dot{Y}_1 = J^{-1}H(\vartheta,\mu)Y_1 + J^{-1}H(\vartheta,\mu)Y_0,$$

$$\dot{Y}_2 = J^{-1}H(\vartheta,\mu)Y_2 + J^{-1}H(\vartheta,\mu)Y_1, \quad \vartheta \in [-\pi/2, 0],\ \mu \in [0,\gamma).$$

Поскольку $Y(-\pi/2, z, \mu) = I_2$, $z \in \mathbb{C}$, то

$$Y_0(-\pi/2,\mu) = I_2, \quad Y_1(-\pi/2,\mu) = 0, \quad Y_2(-\pi/2,\mu) = 0, \quad \mu \in [0,\gamma).$$

Зная $Y_0$, можно найти матричные функции

$$Y_1(\vartheta,\mu) = -\int\limits_{-\pi/2}^{\vartheta} Y_0(\vartheta,\mu)Y_0^{-1}(s,\mu)JH(s,\mu)Y_0(s,\mu)\,ds, \tag{2.16}$$

$$Y_2(\vartheta,\mu) = -\int\limits_{-\pi/2}^{\vartheta} Y_0(\vartheta,\mu)Y_0^{-1}(s,\mu)JH(s,\mu)Y_1(s,\mu)ds, \tag{2.17}$$

где $\vartheta \in [-\pi/2, 0)$, $\mu \in [0,\gamma)$. Матрица $Y_0$ гамильтонова уравнения удовлетворяет тождеству [9, с. 103]

$$Y_0^T(\vartheta,\mu)JY_0(\vartheta,\mu) \equiv J, \quad \vartheta \in [-\pi/2, 0],\ \mu \in [0,\gamma).$$

Поэтому имеют место формулы

$$Y_1(\vartheta,\mu) = -Y_0(\vartheta,\mu)J\int\limits_{-\pi/2}^{\vartheta} Y_0^{\top}(s,\mu)H(s,\mu)Y_0(s,\mu)\,ds, \tag{2.18}$$

$$Y_2(\vartheta,\mu)=-Y_0(\vartheta,\mu)J\int\limits_{-\pi/2}^{\vartheta}Y_0^{\top}(s,\mu)H(s,\mu)Y_1(s,\mu)\,ds, \tag{2.19}$$

где $\vartheta\in[-\pi/2,0]$, $\mu\in[0,\gamma)$. Матричная функция $Y_0$ является фундаментальной матрицей для системы дифференциальных уравнений

$$\dot\psi=J^{-1}H(\vartheta,\mu)\psi,$$

где $\psi=(\psi_1,\psi_2)^{\top}$, $\vartheta\in[-\pi/2,0]$, $\mu\in[0,\gamma)$. Запишем эту систему в координатной форме

$$\dot\psi_1=a(\vartheta,\mu)\psi_2,\quad \dot\psi_2=-a(\pi/2+\vartheta,\mu)\psi_1,\quad \vartheta\in[-\pi/2,0],\ \mu\in[0,\gamma). \tag{2.20}$$

Здесь

$$a(\vartheta,\mu)=\frac{T(\mu)}{2\pi}f'(\tilde x(\vartheta-\pi/2,\mu))=\frac{T(\mu)}{2\pi}f'(\tilde x_1(\pi/2+\vartheta,\mu)),$$
$$a(\pi/2+\vartheta,\mu)=\frac{T(\mu)}{2\pi}f'(\tilde x(\vartheta,\mu))=\frac{T(\mu)}{2\pi}f'(\tilde x_2(\pi/2+\vartheta,\mu)),$$

где $(\tilde x_1(s,\mu),\,\tilde x_2(s,\mu))^{\top}$, $s\in[0,\pi/2]$, $\mu\in[0,\gamma)$, — решение системы дифференциальных уравнений

$$\frac{d\tilde x_1}{ds}=\frac{T(\mu)}{2\pi}f(\tilde x_2),\quad \frac{d\tilde x_2}{ds}=-\frac{T(\mu)}{2\pi}f(\tilde x_1).$$

Тогда система (2.20) будет выглядеть следующим образом:

$$\dot\psi_1=\frac{T(\mu)}{2\pi}f'(\tilde x_1(\pi/2+\vartheta,\mu))\psi_2,\quad \dot\psi_2=-\frac{T(\mu)}{2\pi}f'(\tilde x_2(\pi/2+\vartheta,\mu))\psi_1. \tag{2.21}$$

**Лемма 2.5.** *Пусть $f$ — нечетная непрерывно дифференцируемая функция с положительной производной на интервале $(-\gamma,\gamma)$. Тогда нормированная фундаментальная матрица системы* (2.21) *имеет вид*

$$Y_0(\vartheta,\mu)=\begin{pmatrix}\frac{\partial\tilde x_2(s,\mu)}{\partial\mu}+\frac{T'(\mu)}{2\pi}(s)f(\tilde x_1(s,\mu)) & \frac{f(\tilde x_1(s,\mu))}{f(\mu)}\\ -\frac{\partial\tilde x_1(s,\mu)}{\partial\mu}+\frac{T'(\mu)}{2\pi}(s)f(\tilde x_2(s,\mu)) & \frac{f(\tilde x_2(s,\mu))}{f(\mu)}\end{pmatrix}_{s=\pi/2+\vartheta}, \tag{2.22}$$

$\vartheta\in\mathbb{R}$, $\mu\in(0,\gamma)$.

Доказательство. Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx_1}{dt}=f'(x_2(t,\mu))x_2,\quad \frac{dx_2}{dt}=-f'(x_1(t,\mu))x_1, \tag{2.23}$$

которая является системой дифференциальных уравнений в вариациях для системы (1.2). Используя методику работы [5], найдем ее нормированную фундаментальную матрицу:

$$X(t,\mu)=\begin{pmatrix}\frac{1}{f(\mu)}\frac{dx_1(t,\mu)}{dt} & \frac{\partial x_1(t,\mu)}{\partial\mu}\\ \frac{1}{f(\mu)}\frac{dx_2(t,\mu)}{dt} & \frac{\partial x_2(t,\mu)}{\partial\mu}\end{pmatrix},\quad t\in\mathbb{R},\ \mu\in(0,\gamma).$$

Делая в системе (2.23) замену переменных:

$$t=\frac{T(\mu)}{2\pi}s,\quad x_1\left(\frac{T(\mu)}{2\pi}s\right)=\tilde x_1(s),\quad x_2\left(\frac{T(\mu)}{2\pi}s\right)=\tilde x_2(s),\quad s\in\mathbb{R},\ \mu\in(0,\gamma),$$

получим

$$\frac{d\tilde{x}_1}{ds} = \frac{T(\mu)}{2\pi} f'(\tilde{x}_2(s,\mu))\tilde{x}_2, \quad \frac{d\tilde{x}_2}{ds} = -\frac{T(\mu)}{2\pi} f'(\tilde{x}_1(s,\mu))\tilde{x}_1, \tag{2.24}$$

где $s \in \mathbb{R}$, $\mu \in (0,\gamma)$. Используя свойства $2\pi$-периодического решения

$$(\tilde{x}_1(s,\mu), \tilde{x}_2(s,\mu))^\top = \left(x_1\left(\frac{T(\mu)}{2\pi}s, \mu\right), x_2\left(\frac{T(\mu)}{2\pi}s, \mu\right)\right)^\top, \quad s \in \mathbb{R},\ \mu \in (0,\gamma),$$

системы дифференциальных уравнений

$$\frac{d\tilde{x}_1}{ds} = \frac{T(\mu)}{2\pi} f(\tilde{x}_2), \quad \frac{d\tilde{x}_2}{ds} = -\frac{T(\mu)}{2\pi} f(\tilde{x}_1), \quad s \in \mathbb{R},\ \mu \in (0,\gamma),$$

находим фундаментальную матрицу системы (2.24):

$$\widetilde{X}(s,\mu) = \begin{pmatrix} \frac{f(\tilde{x}_2(s,\mu))}{f(\mu)} & \frac{\partial \tilde{x}_1(s,\mu)}{\partial \mu} - \frac{T'(\mu)}{2\pi} s f(\tilde{x}_2(s,\mu)) \\ -\frac{f(\tilde{x}_1(s,\mu))}{f(\mu)} & \frac{\partial \tilde{x}_2(s,\mu)}{\partial \mu} + \frac{T'(\mu)}{2\pi} s f(\tilde{x}_1(s,\mu)) \end{pmatrix},$$

$s \in \mathbb{R}$, $\mu \in (0,\gamma)$. Система (2.21) будет сопряженной для (2.24). Их решения связаны преобразованием

$$(\tilde{x}_1(\pi/2+\vartheta,\mu), \quad \tilde{x}_2(\pi/2+\vartheta,\mu))^\top = J(\psi_1(\vartheta,\mu), \quad \psi_2(\vartheta,\mu))^\top,\ \vartheta \in \mathbb{R},\ \mu \in (0,\gamma).$$

Имеем равенство

$$JY_0(\vartheta,\mu)d = \widetilde{X}(\pi/2+\vartheta,\mu)c, \quad \vartheta \in \mathbb{R},\ \mu \in (0,\gamma),$$

где $c, d \in \mathbb{R}^2$. Находим $c = Jd$. Следовательно, фундаментальная матрица $Y_0$ имеет вид (2.22).

**Лемма 2.6.** *Пусть $f$ — нечетная непрерывно дифференцируемая функция с положительной производной на интервале $(-\gamma,\gamma)$. Корень $z = 1$ характеристического уравнения (2.7) является кратным тогда и только тогда, когда $\mu = \mu^*$ является критической точкой функции $T$, т. е. $T'(\mu^*) = 0$. При этом кратность корня равна двум.*

Доказательство. В окрестности точки $z = 1$ запишем разложение функции

$$V(z,\mu) = 1 + V_1(\mu)\tilde{z} + V_2(\mu)\tilde{z}^2 + o(\tilde{z}^2), \tag{2.25}$$

где $z = 1 + \tilde{z}$, $\tilde{z} \in \mathbb{C}$. Пользуясь определением функции $V$, находим

$$\begin{aligned} V_1(\mu) &= \frac{1}{2}\big(y^1_{12}(0,\mu) - y^1_{21}(0,\mu)\big), \\ V_2(\mu) &= \frac{1}{2}\big(y^2_{12}(0,\mu) - y^2_{21}(0,\mu)\big), \quad \mu \in [0,\gamma). \end{aligned} \tag{2.26}$$

Из (2.18) следует, что $Y_1(0,\mu) = -Y_0(0,\mu)JD(\mu)$, $\mu \in [0,\gamma)$, где

$$D(\mu) = \int\limits_{-\pi/2}^{0} Y_0^T(s,\mu)H(s,\mu)Y_0(s,\mu)\,ds, \quad \mu \in [0,\gamma).$$

При каждом значении $\mu \in [0,\gamma)$ матрица $D(\mu) = \|d_{ij}(\mu)\|_1^2$ симметричная определенно положительная, т. е. $d_{11}(\mu) > 0$, $d_{22}(\mu) > 0$, $d_{12}(\mu) = d_{21}(\mu)$. Из (2.22) следует, что

$$Y_0(0,\mu) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}T'(\mu)f(\mu) & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mu \in [0,\gamma).$$

Вычисляя матрицу $Y_1(0,\mu)$, $\mu \in [0,\gamma)$, находим

$$\frac{\partial V(1,z)}{\partial z} = V_1(\mu) = d_{22}(\mu)\frac{T(\mu)}{4}f(\mu)T'(\mu), \quad \mu \in [0,\gamma). \tag{2.27}$$

Из последней формулы следует, что условие (2.14) выполняется при $\mu = \mu^*$ тогда и только тогда, когда $T'(\mu^*) = 0$. Первая часть леммы доказана.

Рассмотрим малую окрестность $\{\mu : |\mu - \mu^*| < \delta,\ \mu \in [0,\gamma)\}$ критической точки $\mu = \mu^*$ и малую окрестность $\{z : |z-1| < \varepsilon,\ z \in \mathbb{C}\}$ точки $z = 1$. В характеристическом уравнении (2.7) сделаем замену $z = 1+\tilde z$, $|\tilde z| < \varepsilon$. Учитывая асимптотическое разложение (2.25), преобразуем (2.7) к виду

$$\tilde z(1 - 2V_1(\mu) - 2V_2(\mu)) - 2V_1(\mu) + o(\tilde z) = 0, |\tilde z| < \varepsilon, \quad |\mu - \mu^*| < \delta. \tag{2.28}$$

Покажем, что $V_2(\mu^*)$ меньше нуля. Из (2.19) следует представление

$$Y_2(0,\mu^*) = Y_0(0,\mu^*)JK,$$

где

$$K = \int\limits_{-\pi/2}^{0} C(s)J \int\limits_{-\pi/2}^{s} C(s_1)ds_1\, ds = \|k_{ij}\|_1^2,$$

$C(s) = Y_0^\top(s,\mu^*)H(s,\mu^*)Y_0(s,\mu^*) = \|c_{ij}(s)\|_1^2$ — симметричная определенно положительная матрица при фиксированных значениях аргумента $s \in [-\pi/2, 0]$. Вычисляя матрицу

$$Y_2(0,\mu^*) = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{pmatrix},$$

находим $V_2(\mu) = \frac{1}{2}(k_{12} - k_{21})$. Учитывая определение матрицы $K$, имеем

$$V_2(\mu^*) = \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi/2}^{0}\left(2c_{12}(s)\int\limits_{-\pi/2}^{0} c_{12}(s)ds - c_{11}(s)\int\limits_{-\pi/2}^{0} c_{22}(s)\,ds\right.$$

$$\left. -c_{22}(s)\int\limits_{-\pi/2}^{0} c_{11}(s)\,ds\right)ds = \frac{1}{2}\left(\int\limits_{-\pi/2}^{0} c_{12}(s)\,ds\right)^2 - \int\limits_{-\pi/2}^{0} c_{11}(s)\,ds \int\limits_{-\pi/2}^{0} c_{22}(s)\,ds < 0.$$

Следовательно,

$$\frac{d^2 D(1,\mu^*)}{dz^2} = 2(1 - 2V_2(\mu^*)) \neq 0,$$

и лемма доказана.

**Лемма 2.7.** *Пусть $f$ — нечетная трижды непрерывно дифференцируемая функция с положительной первой производной на интервале $(-\gamma,\gamma)$. При возрастании $\mu$ в малой окрестности критической точки $\mu^*$ корень характеристического уравнения переходит из внутренней во внешнюю (из внешней во внутреннюю) область единичного круга, если $T''(\mu^*) > 0$ $(T''(\mu^*) < 0)$.*

Доказательство. Так как $V_2(\mu^*) < 0$, то в области $|\tilde z| < \varepsilon$, $|\mu - \mu^*| < \delta$ уравнение (2.28) имеет единственное решение [10, с. 26], которое определяется формулой

$$\tilde z = \frac{2\frac{dV_1(\mu^*)}{d\mu}}{1 - 2V_2(\mu^*)}\bar\mu + o(\bar\mu), \quad \bar\mu = \mu - \mu^*.$$

Используя (2.27), находим

$$\frac{dV_1(\mu^*)}{d\mu} = d'_{22}(\mu^*)\frac{T(\mu^*)}{4}f(\mu^*)T'(\mu^*) + d_{22}(\mu^*)\frac{1}{4}f(\mu^*)(T'(\mu^*))^2 + d_{22}(\mu^*)\frac{T(\mu^*)}{4}f'(\mu^*)T'(\mu^*) + d_{22}(\mu^*)\frac{T(\mu^*)}{4}f(\mu^*)T''(\mu^*) = d_{22}(\mu^*)\frac{T(\mu^*)}{4}f(\mu^*)T''(\mu^*).$$

Следовательно, направления перехода корня характеристического уравнения (2.7) через единичную окружность определяются знаком $T''(\mu^*)$. Лемма доказана.

**Теорема 2.1.** *Пусть $f$ — нечетная трижды непрерывно дифференцируемая функция с положительной первой производной на интервале $(-\gamma,\gamma)$. Пусть вторая производная функции $T$ отлична от нуля во всех ее критических точках. Тогда для не критических точек $\mu^0 \in (0,\gamma)$ функции $T$ дифференциальное уравнение с запаздыванием* (2.1) *устойчиво, если $T'(\mu^0) > 0$, и неустойчиво, если $T'(\mu^0) < 0$.*

Доказательство. В ходе доказательства утверждения 2.1 показано, что дифференциальное уравнение с запаздыванием (2.1) при $\mu = 0$ имеет чисто мнимый характеристический показатель $\lambda(0) = i$, а все остальные характеристические показатели имеют отрицательную действительную часть. Учитывая связь $\rho = e^{\lambda\pi}$ между характеристическими показателями и собственными числами оператора монодромии, получим $\rho(0) = -1$. Остальные собственные числа оператора монодромии при $\mu = 0$ лежат внутри области $|\rho| < 1$. Используем связь $\rho = -z^{-2}$ между собственными числами $\rho$ оператора монодромии и корнями $z$ характеристического уравнения (2.7). Тогда собственному числу $\rho(0) = -1$ отвечает пара корней $z_{1,2}(0) = \pm 1$, а собственным числам $\rho$, лежащим внутри области $|\rho| < 1$, — корни, лежащие в области $|z| > 1$. Согласно лемме 2.3 существует собственное число $\rho_1(\mu) = -1$, $\mu \in [0,\gamma)$, которому отвечает пара корней $z_{1,2}(\mu) = \pm 1$, $\mu \in [0,\gamma)$, характеристического уравнения (2.7).

Отметим, что точка $\mu = 0$ является критической, а так же то, что в последовательных критических точках знаки значений $T''$ чередуются.

Пусть $T''(0) > 0$. Следовательно, $T'(\mu) > 0$ при $0 < \mu < \mu_1$, где $\mu_1$ — ближайшая к $\mu = 0$ критическая точка. Тогда по утверждению 2.1 при малых положительных $\mu$ уравнение (2.1) устойчиво. Кратные корни $z_{1,2} = \pm 1$ распадаются, и два корня уходят в область $|z| > 1$. Согласно лемме 2.6 при возрастании $\mu$ на промежутке $0 < \mu < \mu_1$ в области $|z| < 1$ не могут появиться корни характеристического уравнения (2.7). Следовательно, сохраняется устойчивость. В критической точке $\mu_1$ имеем $T''(\mu_1) < 0$ и $T'(\mu) < 0$ при $\mu_1 < \mu < \mu_2$, где $\mu_2$ — ближайшая справа к $\mu_1$ критическая точка. По лемме 2.7 при переходе через точку $\mu_1$ в область $|z| < 1$ входит пара корней характеристического уравнения (2.7) и устойчивость меняется на неустойчивость. На промежутке $\mu_1 < \mu < \mu_2$ количество корней в области $|z| < 1$ не может измениться, и тогда на этом промежутке сохраняется неустойчивость.

Пусть $T''(0) < 0$. Следовательно, $T'(\mu) < 0$ при $0 < \mu < \mu_1$, где $\mu_1$ — ближайшая к $\mu = 0$ критическая точка. Тогда по утверждению 2.1 при малых положительных $\mu$ уравнение (2.1) неустойчиво. Кратные корни $z_{1,2} = \pm 1$ распадаются, и два корня уходят в область $|z| < 1$. Согласно лемме 2.6 при возрастании $\mu$ на промежутке $0 < \mu < \mu_1$ в области $|z| < 1$ не может измениться количество корней характеристического уравнения (2.7). Следовательно, сохраняется неустойчивость. В критической точке $\mu_1$ имеем $T''(\mu_1) > 0$ и $T'(\mu) > 0$ при $\mu_1 < \mu < \mu_2$, где $\mu_2$ — ближайшая справа к $\mu_1$ критическая точка. По лемме 2.7 при переходе через точку $\mu_1$ из области $|z| < 1$ выходит пара корней характеристического уравнения (2.7) и неустойчивость меняется на устойчивость. На промежутке $\mu_1 < \mu < \mu_2$ количество корней в области $|z| < 1$ не может измениться, и тогда на нем сохраняется устойчивость.

Этот анализ показывает, что устойчивость дифференциального уравнения с запаздыванием (2.1) для не критических точек функции $T$ определяется знаком первой производной функции периода $T$ в этих точках. Теорема доказана.

## 3. Устойчивость периодических решений нелинейного дифференциального уравнения с запаздыванием

Возвращаемся к задаче устойчивости антисимметрического периодического решения дифференциального уравнения с запаздыванием.

**Теорема 3.1.** *Пусть $f$ — нечетная трижды непрерывно дифференцируемая функция с положительной первой производной на интервале $(-\gamma, \gamma)$. Пусть вторая производная функции $T$ отлична от нуля во всех ее критических точках и некритическая точка $\mu^0 \in (0, \gamma)$ функции $T$ является корнем уравнения $T(\mu) = 4\tau$. Тогда соответствующее этому корню антисимметрическое периодическое решение дифференциального уравнения с запаздыванием* (1.1) *устойчиво (неустойчиво), если $T'(\mu^0) > 0$ ($T'(\mu^0) < 0$).*

Доказательство. Пусть для некритической точки $\mu^0 \in (0, \gamma)$ выполняется условие $T'(\mu^0) < 0$. Из доказательства теоремы 2.1 следует, что существует пара корней характеристического уравнения (2.7), лежащая в области $|z| < 1$. Этой паре соответствует собственное число оператора монодромии $\rho^0$, по модулю большее единицы. Тогда согласно теореме о неустойчивости по линейному приближению [11, с. 287] периодическое решение дифференциального уравнения с запаздыванием (1.1) неустойчиво.

Пусть для некритической точки $\mu^0 \in (0, \gamma)$ выполняется условие $T'(\mu^0) > 0$. Из доказательства теоремы 2.1 следует, что все корни характеристического уравнения (2.7) лежат в области $|z| > 1$, за исключением пары $z^0_{1,2} = \pm 1$. Этой паре $z^0_{1,2}$ соответствует собственное число оператора монодромии $\rho^0 = -1$. Корням характеристического уравнения (2.7), лежащим в области $|z| > 1$, соответствуют собственные числа оператора монодромии, лежащие в области $|\rho| < 1$.

Покажем, что собственное число $\rho^0 = -1$ простое. Используя связь $z = i\rho^{-\frac{1}{2}}$ между корнями характеристического уравнения (2.7) и собственными числами оператора монодромии, запишем характеристическое уравнение для нахождения $\rho$:

$$\widetilde{D}(\rho, \mu^0) = -\rho^{-1} + 2i\rho^{-\frac{1}{2}} V(-i\rho^{-\frac{1}{2}}, \mu^0) + 1 = 0.$$

Тогда

$$\left.\frac{\widetilde{D}(\rho, \mu^0)}{d\rho}\right|_{\rho=-1} = 1 - V(1, \mu^0) - \frac{V(1, \mu^0)}{dz} = -\frac{V(1, \mu^0)}{dz} \neq 0.$$

Используя аналог теоремы Андронова — Витта для функционально-дифференциальных уравнений [11, с. 287], делаем заключение об устойчивости периодического решения дифференциального уравнения с запаздыванием (1.1).

## *ЛИТЕРАТУРА*


**1.** *Grafton R. B.* Periodic solutions of certain Lienard equation with delay // J. Differential Equations. 1972. V. 11, N 3. P. 519–527.

**2.** *Nussbaum R. D.* Periodic solutions of some nonlinear autonomous functional differential equations // Ann. Mat. Pura Appl. Sec. 4. 1974. V. 101. P. 263–306.

**3.** *Kaplan J. L., Yorke J. A.* Ordinary differential equations which yield periodic solutions of differential delay equations // J. Math. Anal. Appl. 1974. V. 48, N 2. P. 317–324.

**4.** *Dormayer P.* The stability of special symmetric solutions of $\dot{x}(t) = \alpha f(x(t-1))$ with small amplitudes // Nonlinear Anal. 1990. V. 14, N 8. P. 701–715.

**5.** *Долгий Ю. Ф. Николаев С. Г.* Устойчивость периодического решения нелинейного дифференциального уравнения с запаздыванием // Дифференц. уравнения. 2001. Т. 37, № 5. С. 592–600.

**6.** *Малкин И. Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.: ГИТТЛ, 1956.

**7.** *Шиманов С. Н.* Об устойчивости квазигармонических систем с запаздыванием // Прикл. математика и механика. 1961. Т. 25, № 6. С. 992–1002.

**8.** *Долгий Ю. Ф.* Устойчивость периодических дифференциально-разностных уравнений. Екатеринбург: УрГУ, 1996.

**9.** *Якубович В. А., Старжинский В. М.* Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М.: Наука, 1972.

**10.** *Вайнберг М. М., Треногин В. А.* Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М.: Наука, 1969.

**11.** *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984.


*Статья поступила 25 июня 2003 г., окончательный вариант — 28 апреля 2005 г.*

*Долгий Юрий Филиппович*
*Уральский гос. университет им. А. М. Горького,*
*пр. Ленина, 51, Екатеринбург 620083*
`Yurii.Dolgii@usu.ru`

*Нидченко Сергей Николаевич*
*Уральская гос. юридическая академия,*
*ул. Комсомольская, 21, Екатеринбург 620066*
`Nsn001@usla.ru`, `nidchenko_sergey@mail.ru`