Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2006. Том 47, № 1

УДК 517.918+516.918

О БАЗИСНОСТИ ПО АБЕЛЮ СИСТЕМЫ КОРНЕВЫХ ВЕКТОР–ФУНКЦИЙ ВЫРОЖДЕННО–ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С СИНГУЛЯРНЫМИ МАТРИЧНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

К. Х. Бойматов

Аннотация: Установлена полнота и суммируемость в смысле Абеля — Лидского системы корневых вектор-функций несамосопряженных матричных эллиптических операторов A, порожденных некоэрцитивными формами при граничных условиях типа Дирихле. Оператор $A+\beta E$ при достаточно большом $\beta > 0$ будет позитивным, но, вообще говоря, не сильно позитивным. Получены оценки собственных значений и резольвенты оператора A. Исследована также резольвента расширения $\mathscr{A}$ оператора A в соответствующем негативном пространстве.

Ключевые слова: базисность по Абелю, эллиптический оператор, корневая вектор-функция.

В работах [1–3] введен класс вырожденно-эллиптических дифференциальных операторов A с сингулярными коэффициентами, порожденных некоэрцитивными билинейными формами. Оператор A рассматривается в гильбертовом пространстве $L_2(\Omega)^l$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область, удовлетворяющая условию конуса. Для достаточно больших по модулю $\lambda \in \mathbb{C}$, изменяющихся в некотором угле, получена [1–3] оценка

$$\|(A-\lambda E)^{-1}\| \leq M|\lambda|^{-1/2}.$$

В данной работе впервые установлена оценка резольвенты оператора A с показателем 1 вместо $\frac{1}{2}$, что позволило исследовать вопросы суммируемости в смысле Абеля — Лидского системы корневых вектор-функций оператора A.

В настоящей статье для получения уточненной оценки резольвенты в отличие от работ [1, 3] рассматривается тройка вложенных пространств $H^l_\nu \to L_2(\Omega)^l \to H^l_{-\nu}$, зависящих от параметра $\nu > 0$. При $\nu = 1$ эта тройка такая же, как в [1, 3]. Устанавливаются оценки резольвенты расширения $\mathscr{A} : H^l_\nu \to H^l_{-\nu}$ оператора A, равномерные по $\nu > 0$. Из этих оценок при $\nu = |\lambda|$ удается извлечь оценку

$$\|(A-\lambda E)^{-1})\| \leq M|\lambda|^{-1},$$

а при $\nu = 1$ получаются более слабые оценки такие же, как в [1–3].

Главный член резольвенты оператора $\mathscr{A}$ построен в иной форме, чем в работах [1, 3]. Это позволило в значительной степени сократить выкладки по сравнению с теми, которые потребовались бы при использовании прежней схемы «параметрикса», как в [1, 3].

Результаты работы для эллиптических операторов с ограниченными коэффициентами частично анонсированы в статье [4] автора.

1. В этом пункте сформулированы основные теоремы и дано краткое описание содержания последующих пунктов статьи. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — конечная область, удовлетворяющая условию конуса, $m, l > 0$ — целые числа, $\theta < m$. Введем пространство $W^m_{2,\theta}(\Omega)$ функций $y(x)$, $x \in \Omega$, с конечной нормой

$$|y|_+ = \Big(\sum_{|\alpha|=m} \int_\Omega \rho^{2\theta}(x) \big| D^\alpha_x y(x) \big|^2 \, dx + \int_\Omega |y(x)|^2 \, dx \Big)^{1/2}.$$

Здесь $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n_+$, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, $D^\alpha_x = \big(\frac{\partial}{i\partial x_1}\big)^{\alpha_1} \dots \big(\frac{\partial}{i\partial x_n}\big)^{\alpha_n}$, $\rho(x) \in C^\infty(\Omega)$ — положительная функция такая, что

$$\rho(x) \le \operatorname{dist}\{x, \partial\Omega\} \le M\rho(x), \quad \big| D^\alpha_x \rho(x) \big| \le M_\alpha \rho^{1-|\alpha|}(x) \quad \forall \alpha \in \mathbb{Z}^n_+.$$

О существовании для любой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ функции $\rho(x)$ с указанными свойствами см., например, [5, гл. 3, § 1.3].

Рассмотрим функцию

$$A(x,\xi) = \sum_{|\alpha|,|\beta| \le m} \langle a_{\alpha\beta}(x)\xi_\alpha, \xi_\beta \rangle_{\mathbf{C}^l} \quad (x \in \Omega,\ \xi = \{\xi_\alpha\}_{|\alpha| \le m},\ \xi_\alpha \in \mathbf{C}^l)$$

с коэффициентами $a_{\alpha\beta}(x) \in L_\infty(\Omega; \operatorname{End}\mathbf{C}^l)$. В случае $\theta + \frac{1}{2} \in \{1, \dots, m\}$ дополнительно предполагается, что

$$|a_{\alpha\beta}(x)| \le M\rho^\delta(x) \quad (|\alpha| + |\beta| < 2m), \quad \delta > 0. \tag{1}$$

Здесь и далее нормы в пространствах $\mathbf{C}$, $\mathbf{C}^l$, $\operatorname{End}\mathbf{C}^l$, $L_2(\Omega)$, $L_2(\Omega)^l$ обозначаются одним и тем же знаком $|\cdot|$.

Пусть найдутся число $\varphi \in (0, \pi)$ и функция $\gamma(x) \in C(\overline{\Omega})$ такие, что $\gamma(x) \ne 0$ $\forall x \in \overline{\Omega}$ и выполняются следующие неравенства:

$$|\arg A(x,\xi)| < \varphi, \tag{2}$$

$$\sum_{|\alpha|=m} |\xi_\alpha|^2 \le M \operatorname{Re}\{\gamma(x) A(x,\xi)\} \tag{2'}$$

для всех $x \in \Omega, \xi = \{\xi_\alpha\}_{|\alpha| \le m}, \xi_\alpha \in \mathbf{C}^l$; функция $\arg z$ принимает значения на отрезке $(-\pi, \pi]$. Обозначим через H_+ замыкание $C^\infty_0(\Omega)$ в пространстве $W^m_{2,\theta}(\Omega)$. Учитывая (1), (2′), на основании неравенства Харди на вектор-функциях $u, v \in H^l_+$ можно задать билинейную форму

$$\mathscr{U}[u,v] = \sum_{|\alpha|,|\beta| \le m} \big(p_\alpha(x) a_{\alpha\beta}(x) D^\alpha_x u(x), p_\beta(x) D^\beta_x v(x) \big),$$

где $p_\alpha(x) = \rho(x)^{\theta + |\alpha| - m}$. Здесь и далее символ (,) обозначает скалярное произведение в пространстве $L_2(\Omega)$ или $L_2(\Omega)^l$. Соответствующее неравенство типа Харди в нужной нам форме приведено ниже в неравенстве (10).

Обозначим через H_- пополнение пространства $H = L_2(\Omega)$ по норме

$$|y|_- = \sup_{w \in H_+, |w|_+ = 1} |(w, y)|.$$

Элементы из H^l_- отождествляются с соответствующими антилинейными непрерывными функционалами над H^l_+. Нормы в пространствах H^l_+ и H^l_- будем обозначать соответственно теми же знаками: $|\cdot|_+$ и $|\cdot|_-$. Таким образом, мы получили тройку плотно вложенных пространств $H^l_+ \to H^l \to H^l_-$, в которой H^l_+ — позитивное пространство, H^l_- — негативное пространство (см. [6, § 2.0]). Действие функционала $F \in H^l_-$ на элемент $v \in H^l_+$ будем обозначать символом $\langle F, v\rangle$. Очевидно, что в случае $F \in H^l$ имеем $\langle F, v\rangle = (F, v)$.

Введем оператор $\mathscr{A} : H^l_+ \to H^l_-$, действующий на элемент $u \in H^l_+$ по формуле $\langle \mathscr{A} u, v\rangle = \mathscr{U}[u, v]\ \forall v \in H^l_+$.

В работе [1] установлено (см. также [3]), что множество $\mathscr{G}$ точек $\lambda \in \mathbb{C}$, для которых $\dim\ker(\mathscr{A} - \lambda E) > 0$, является чисто точечным множеством с единственной возможной предельной точкой на бесконечности. При этом если $\lambda \notin \mathscr{G}$, то существует непрерывный обратный оператор $(\mathscr{A} - \lambda E)^{-1} : H^l_- \to H^l_+$.

Имеет место следующая

Теорема 1. *Существует единственный замкнутый оператор A в H^l, обладающий следующими свойствами:*

(i) $D(A) \subset H^l_+$, $(Au, v) = \mathscr{U}[u, v]\ \forall v \in H^l_+$, $u \in D(A)$,

(ii) *найдется число $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ такое, что оператор $A - \lambda_0 E$ непрерывно обратим.*

Оператор A совпадает с сужением оператора $\mathscr{A}$ в H^l:

$$D(A) = \{u \in H^l_+ : \mathscr{A} u \in H^l\}, \quad Au = \mathscr{A} u\ \forall u \in D(A). \tag{3}$$

Первая часть утверждения теоремы анонсирована в работе [2] автора.

Пусть P — самосопряженный оператор в H^l, ассоциированный с симметрической билинейной формой

$$\mathscr{P}[u, v] = \sum_{|\alpha|=m} (p_\alpha D^\alpha u, p_\alpha D^\alpha v), \quad D[\mathscr{P}] = H^l_+.$$

Продолжим оператор $(P + tE)^{1/2}$, $t > 0$, до непрерывного оператора $\mathscr{P}(t) : H^l \to H^l_-$. Сужение в H^l оператора $\mathscr{P}^{-1}(t) : H^l_- \to H^l$ совпадает с оператором $(P + tE)^{-1/2}$.

Теорема 2. *Для любого замкнутого сектора $S \subset \{z \in C : |\arg z| > \varphi\} \cup \{0\}$ с вершиной в нуле найдется число $\sigma > 0$ такое, что справедливы представления*

$$(\mathscr{A} - \lambda E)^{-1} = (P + |\lambda|E)^{-1/2} Y(\lambda) \mathscr{P}^{-1}(|\lambda|), \tag{4}$$

$$(A - \lambda E)^{-1} = (P + |\lambda|E)^{-1/2} Y(\lambda)(P + |\lambda|E)^{-1/2}, \tag{4'}$$

где $Y(\lambda) : H^l \to H^l$ — линейный непрерывный оператор, $\lambda \in S$, $|\lambda| > \sigma$,

$$\sup_{\lambda \in S, |\lambda| > \sigma} \|Y(\lambda)\|_{H^l \to H^l} < +\infty.$$

Из представления (4′) вытекает оценка

$$\|(A - \lambda E)^{-1}\|_{H^l \to H^l} \le M_S |\lambda|^{-1} (\lambda \in S, |\lambda| > \sigma). \tag{5}$$

Таким образом, оператор $(A + \beta E)$ для достаточно больших $\beta > 0$ является позитивным оператором [7, гл. 4, § 14].

Теорема 3. *Пусть* $\varphi < \frac{\pi}{2\omega}$, *где* $\omega = \max\{\frac{n}{2m}, \frac{n-1}{2m-2\theta}\}$. *Тогда система корневых вектор-функций оператора* A *полна в* H^l. *Ряд Фурье любого элемента* $f \in H^l$ *по системе корневых вектор-функций оператора* A *суммируется к* f *в смысле Абеля — Лидского со скобками порядка* $\gamma = \omega + \mu$ *с достаточно малым* $\mu > 0$. *Порядок резольвенты оператора* A *не превосходит числа* ω.

О суммируемости в смысле Абеля — Лидского см. работы [8, 9]. Метод Абеля впервые был введен в работе Лидского [9]. Из последних работ, посвященных вопросам базисности, отметим работы [4, 10–15] (см. также [5, гл. 2, § 3]).

Отметим, что если $\omega \le \frac{1}{2}$, то условие $\varphi < \frac{\pi}{2\omega}$ выполняется при любом $\varphi \in (0, \pi)$.

Приведем краткое описание содержания следующих пунктов статьи. В п. 2 установлено, что при доказательстве теорем 1–3, не нарушая общности, можно наложить некоторые дополнительные ограничения на функцию $\gamma(x)$. В п. 3 сформулировано одно утверждение, вытекающее из теоремы 2.0.1 статьи [6]. На основании этого утверждения в п. 4 вводится в рассмотрение некоторый непрерывный оператор $\mathscr{B}_\lambda : H^l_+ \to H^l_-$, $0 \ne \lambda \in S$, который понадобится в п. 6 для построения регуляризатора оператора $\mathscr{A} - \lambda E$. Установлено, что оператор $\mathscr{B}_\lambda$ имеет непрерывный обратный $\mathscr{B}_\lambda^{-1} : H^l_- \to H^l_+$ при любом $0 \ne \lambda \in S$. В п. 5 введены пространства H_ν, $H_{-\nu}$, $\nu > 0$, и доказаны некоторые вспомогательные неравенства, используемые в п. 6, где выводится равенство

$$(\mathscr{A} - \lambda E)^{-1} = \gamma \mathscr{B}_\lambda^{-1}(E + J_{\nu,\lambda}), \quad \lambda \in S,\ |\lambda| > c_S,$$

в котором оператор $J_{\nu,\lambda} : H^l_{-\nu} \to H^l_{-\nu}$ удовлетворяет оценке

$$\|J_{\nu,\lambda}\|_{H^l_{-\nu} \to H^l_{-\nu}} \le \frac{1}{2} \quad (1 \le \nu \le 4|\lambda|,\ \lambda \in S,\ |\lambda| > c_S).$$

На основании полученных вспомогательных результатов доказательства теорем 1, 2 завершаются в п. 7. В п. 8 установлено, что порядок резольвенты оператора A не превосходит числа ω. После этого теорема 3 вытекает из теорем 6.4.1 и 6.4.2 работы [9] с учетом оценки (5). Отметим, что в п. 8 получена также точная по порядку оценка сверху функции распределения собственных значений оператора A. В заключительном п. 9 дано описание областей определений оператора A и сопряженного к нему оператора A^*. Для оператора A^* и соответствующего его расширения $\mathscr{A}^+ : H^l_+ \to H^l_-$ получены такие же представления, как в теореме 1.

2. При доказательстве теорем 1, 2, не нарушая общности, можно считать, что $\varphi > \frac{\pi}{2}$. В силу (2) неравенство (2′) будет выполняться также и в том случае, если $\gamma(x)$ заменить на $e^{i\Theta(x)}$, где

$$\Theta(x) = \min\{\varphi - \pi/2, |\arg \gamma(x)|\}(\operatorname{sign} \arg \gamma(x)).$$

Теперь имеем

$$c|\lambda| \le \operatorname{Re}\{-\lambda\gamma(x)\}\ \forall x \in \overline{\Omega}, \quad \lambda \in S,\ c = c_S > 0. \tag{6}$$

Очевидно, что в дальнейшем мы можем считать также, что в (2′) (6) функция γ принадлежит $C^m(\overline{\Omega})$.

3. Приведем в удобной для нас форме утверждение теоремы 2.0.1 из [6] применительно к тройке вложенных пространств $H^l_+ \to H^l \to H^l_-$ и билинейным формам, заданным на H^l_+. Рассмотрим в пространстве H^l замкнутую билинейную форму $B[u,v]$ с областью определения $D[B] = H^l_+$. Пусть выполнены неравенства

$$|B[u,v]| \le C|u|_+|v|_+ \quad \forall u,v \in H^l_+, \tag{7}$$

$$\delta_0|u|_+^2 \le \operatorname{Re} B[u,u] \quad \forall u \in H^l_+ \tag{7'}$$

с некоторыми $C, \delta_0 > 0$.

Утверждение 1. *Существует линейный оператор Λ, осуществляющий гомеоморфизм пространств H^l_+ и H^l_- и такой, что*

$$\langle \Lambda u, v\rangle = B[u,v] \quad \forall u,v \in H^l_+.$$

При этом любой элемент $F \in H^l_-$ допускает представление

$$\langle F, v\rangle = B[u,v] = \langle \Lambda u, v\rangle,$$

в котором элемент $u \in H^l_+$ определяется единственно.

Таким образом, если ввести в рассмотрение оператор $B : H^l_+ \to H^l_-$, сопоставляющий элементу $u \in H^l_+$ функционал $F \in H^l_-$ по формуле

$$\langle F, v\rangle = B[u,v] \quad \forall v \in H^l_+,$$

то оператор B имеет непрерывный обратный $B^{-1} : H^l_- \to H^l_+$, причем $B^{-1} = \Lambda^{-1}$.

4. Проверим выполнение условий (7), (7′) для билинейной формы

$$B'_\lambda[u,v] = \sum_{|\alpha|,|\beta|\le m} \int_\Omega \gamma(x)\big\langle p_\alpha a_{\alpha\beta}(x) D_x^\alpha u(x), p_\beta D_x^\beta v(x)\big\rangle_{\mathbf{C}^l}\, dx$$
$$- \lambda \int_\Omega \gamma(x)\langle u(x), v(x)\rangle_{\mathbf{C}^l}\, dx, \quad u,v \in H^l_+,\ 0 \ne \lambda \in S. \tag{8}$$

Для $u = v$ положим в (8) $\xi_\alpha = \xi_\alpha(x)$ вместо $D_x^\alpha u(x)$. Тогда согласно (2′), (6) получим

$$\frac{1}{M}\sum_{|\alpha|=m} \int_\Omega \langle p_\alpha D^\alpha u, p_\alpha D^\alpha u\rangle_{\mathbf{C}^l}\, dx + c|\lambda| \int_\Omega |u(x)|^2_{\mathbf{C}^l}\, dx \le \operatorname{Re} B'_\lambda[u,u] \quad \forall u \in H^l_+, \tag{9}$$

что и доказывает (7′). Для доказательства (7) понадобится следующее неравенство Харди (см., например, теорему 4 из [16] или теорему 1.5 из [5, гл. 3, § 1.4]):

$$\sum_{|\alpha|\le m} \int_\Omega \rho(x)^{\delta' + 2\theta - 2m + 2|\alpha|} \big|D_x^\alpha y(x)\big|^2\, dx$$
$$\le M \sum_{|\alpha|=m} \int_\Omega \rho(x)^{2\theta} \big|D_x^\alpha y(x)\big|^2\, dx + M \int_\Omega |y(x)|^2\, dx \quad \forall y \in H_+, \tag{10}$$

справедливое при $\theta + \frac{1}{2} \notin \{1, \dots, m\}$, $\theta < m$, с любым $\delta' \ge 0$; $M = M(\delta') > 0$. Для $\theta + \frac{1}{2} \in \{1, \dots, m\}$ неравенство (10) имеет место только для положительных $\delta' > 0$.

Оценим интегралы в (8) с помощью неравенства Коши — Буняковского и далее применим неравенство (10). В зависимости от того, принадлежит ли число $\theta + \frac{1}{2}$ множеству $\{1, \dots, m\}$ или не принадлежит, в (10) полагаем $\delta' = \delta$ или $\delta' = 0$ (см. условие (1)). В результате получим

$$|B'_\lambda[u,v]| \le M'|u|_+|v|_+ + M'|\lambda||u||v| \quad \forall u, v \in H^l_+. \tag{11}$$

Таким образом, билинейная форма $B'_\lambda[u,v]$, $0 \ne \lambda \in S$, в соответствии с утверждением 1 порождает линейный непрерывный оператор $\mathscr{B}_\lambda : H^l_+ \to H^l_-$ по формуле

$$\langle \mathscr{B}_\lambda u, v\rangle = B'_\lambda[u,v], \quad u, v \in H^l_+.$$

Оператор $\mathscr{B}_\lambda$ имеет непрерывный обратный $\mathscr{B}_\lambda^{-1} : H^l_- \to H^l_+$.

Заметим, что для $u \in H^l_+$, $t \ge 1$, справедливо равенство

$$|(P + tE)^{\frac{1}{2}} u|_{H^l} = \Big(\sum_{|\alpha|=m} |p_\alpha D^\alpha u|^2_{H^l} + t|u|^2_{H^l}\Big)^{1/2}. \tag{12}$$

Аналогично

$$|(P_0 + tE)^{1/2} u|_{H^l} = (\operatorname{Re} B'_0[u,u] + t(u,u))^{1/2}, \quad u \in H^l_+,\ t \ge 1, \tag{12$'$}$$

где P_0 — положительный самосопряженный оператор, ассоциированный с билинейной формой

$$P'_0[u,v] = \frac{1}{2}(B'_0[u,v] + \overline{B'_0[v,u]}) = \frac{1}{2}\Big(\sum_{|\alpha|,|\beta|\le m} (\gamma p_\alpha(a_{\alpha\beta}(x) + a^*_{\beta\alpha}(x))D^\alpha u, p_\beta D^\beta v\Big),$$
$$D[P'_0] = H^l_+.$$

Применяя неравенства (9), (11), получим эквивалентность равномерно по $t \ge 1$ норм (12), (12$'$).

5. Введем пространство H_ν, $\nu > 0$, функций $y \in H_+$ с нормой $|y|_\nu = \big(|y|^2_+ + (\nu - 1)|y|^2\big)^{1/2}$. Пусть $H_{-\nu}$, $\nu > 0$, — пополнение пространства H по норме

$$|y|_{-\nu} = \sup_{w \in H_+, |w|_\nu = 1} |(y,w)|.$$

При ν_1, $\nu_2 > 0$ множества $H^l_{\pm\nu_1}$, $H^l_{\pm\nu_2}$ совпадают, а как нормированные пространства отличаются друг от друга только эквивалентными нормами. Для $\nu = 1$ имеем $H^l_\nu = H^l_+$, $H^l_{-\nu} = H^l_-$. Пространство $H^l_{-\nu}$, $\nu > 0$, является негативным пространством в тройке $H^l_\nu \to H^l \to H^l_{-\nu}$ по отношению к позитивному пространству H^l_ν.

Ближайшей нашей целью является доказательство для достаточно больших по модулю $\lambda \in S$ представления

$$(\mathscr{A} - \lambda E)^{-1} = \gamma \mathscr{B}_\lambda^{-1}(E + \mathscr{J}_{\nu,\lambda}), \tag{13}$$

где $\mathscr{J}_{\nu,\lambda} : H^l_{-\nu} \to H^l_{-\nu}$ — непрерывный оператор,

$$\|\mathscr{J}_{\nu,\lambda}\|_{H^l_{-\nu} \to H^l_{-\nu}} \le \frac{1}{2} \quad (1 \le \nu < 4|\lambda|,\ \lambda \in S,\ |\lambda| > c_S). \tag{13$'$}$$

Доказательству предпошлем следующую лемму.

Лемма 1. *Для $t \geq 1$, $|\sigma| < |\alpha| \leq m$ выполняется неравенство*

$$|p_\alpha D^\sigma u|_{H^l} \leq q(t)|(P+tE)^{1/2}u|_{H^l}, \quad u \in H^l_+, \tag{14}$$

где $q(t) \to 0$ $(t \to +\infty)$. Имеет место также неравенство

$$\|(P+tE)^{1/2}\gamma(P+tE)^{-1/2}\|_{H^l \to H^l} \leq M \quad (t \geq 1). \tag{14$'$}$$

Доказательство. В случае $\partial\Omega \in C^\infty$ неравенство (14) вытекает из (12) и теоремы 1.1.7 работы [6]. В общем случае введем множества

$$\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega : \rho(x) > \varepsilon\}, \quad \Omega'_\varepsilon = \Omega \backslash \overline{\Omega}_\varepsilon, \ 0 < \varepsilon.$$

Для достаточно малого $\varepsilon > 0$ множество Ω_ε будет областью с границей $\partial\Omega_\varepsilon \in C^\infty$. Для любого $\nu > 0$ найдется число $K(\varepsilon, \nu) > 0$ такое, что выполняется следующее (см. теорему 1.1.7 из [6]) неравенство:

$$|D^\sigma u|_{L_2(\Omega_\varepsilon)^l} \leq \nu \sum_{|\beta|=m} |D^\beta u|_{L_2(\Omega_\varepsilon)^l} + K(\varepsilon,\nu)|u|_{H^l}, \quad u \in H^l_+.$$

Отсюда

$$|p_\alpha D^\sigma u|_{L_2(\Omega_\varepsilon)^l} \leq \nu C_1 \sum_{|\beta|=m} |\rho^\theta D^\beta u|_{H^l} + K(\varepsilon,\nu)|u|_{H^l},$$

$$C_1 = (\inf_{x\in\Omega_\varepsilon} \rho^\theta(x))^{-1} (\sup_{x\in\Omega_\varepsilon} \rho^{\theta+|\alpha|-m}(x)) \leq C_2 \varepsilon^{-|\theta|-m},$$

где число $C_2 > 0$ не зависит от ε. Аналогично на основании неравенства (10) имеем

$$|p_\alpha D^\sigma u|_{L_2(\Omega'_\varepsilon)^l} \leq C_3 |p_\sigma \rho^{1/2} D^\sigma u|_{H^l} < C_3 M |u|_{H^l_+},$$

$$C_3 = \sup_{x\in\Omega'_\varepsilon} \{p_\alpha(x) p_\sigma^{-1}(x) \rho^{-1/2}(x)\} \leq C_4 \varepsilon^{1/2};$$

числа $M, C_4 > 0$ не зависят от ε. Подытоживая, при $\nu = \varepsilon^{1+|\theta|+m}$ получим

$$\begin{aligned}|p_\alpha D^\sigma u|_{H^l} &\leq C_4 \varepsilon^{1/2}|u|_+ + C_5 \nu \varepsilon^{-m-|\theta|}|u|_+ + K(\varepsilon,\nu)|u|_{H^l} \\ &\leq C_6 \varepsilon^{1/2}|u|_+ + R(\varepsilon)|u|_{H^l},\end{aligned}$$

где $R(\varepsilon)$ $(0 < \varepsilon < \varepsilon_0)$ — положительная функция, относительно которой можно считать, что она невозрастающая, непрерывная слева и $R(0+) = +\infty$. Для достаточно больших $t \geq t_0$ определим ε и $q_0 = q_0(t)$ из равенств

$$\varepsilon = \min\{\varepsilon' : R(\varepsilon') \leq (1/2)t^{1/4}\}, \quad q_0 = 2C_6\sqrt{\varepsilon}.$$

Для доказательства (14) при $t \geq t_0$ теперь достаточно привлечь (12) и положить $q(t) = \max\{q_0(t),\, t^{-1/4}\}$.

Из оценки (14) для $|\sigma| < |\alpha| \leq m$, $\beta + \sigma = \alpha$, следует

$$|p_\alpha (D^\sigma \gamma) D^\beta u|_{H^l} \leq M' |(P+tE)^{1/2}u|_{H^l}, \quad u \in H^l_+, \ t \geq 1,$$

что в силу (12$'$) доказывает (14$'$). Лемма доказана.

6. Билинейная форма $B'_\lambda[u,v]$ (8) секториальна с вершиной в нуле, т. е. (см. (9), (11))

$$|\arg B'_\lambda[u,u]| \leq \psi < \frac{\pi}{2} \quad \forall u \in H^l_+.$$

При этом число ψ не зависит от $0 \neq \lambda \in S$. Рассмотрим m-секториальный оператор B_λ, $0 \neq \lambda \in S$, в пространстве H^l, ассоциированный (см. [17, гл. VI]) с билинейной формой $B'_\lambda[u,v]$. Согласно теореме 3.2 из [17, гл. VI] справедливо равенство

$$B_\lambda^{-1} = (P_0 + |\lambda|E)^{-1/2} X_0(\lambda)(P_0 + |\lambda|E)^{-1/2},$$

где $\|X_0(\lambda)\|_{H^l \to H^l} \leq M$ $(\lambda \in S, |\lambda| \geq 1)$. Учитывая эквивалентность равномерно по $t \geq 1$ норм (12), (12′), получим

$$B_\lambda^{-1} = (P + |\lambda|E)^{-1/2} X(\lambda)(P + |\lambda|E)^{-1/2},$$

где $\|X(\lambda)\|_{H^l \to H^l} \leq M'$ $(\lambda \in S, |\lambda| \geq 1)$. Ясно, что оператор B_λ совпадает с сужением в H^l оператора $\mathscr{B}_\lambda$. Отсюда по непрерывности получаем равенство

$$\mathscr{B}_\lambda^{-1} = (P + |\lambda|E)^{-1/2} X(\lambda) \mathscr{P}^{-1}(|\lambda|) \quad (\lambda \in S,\ |\lambda| \geq 1). \tag{15}$$

По определению оператора $\mathscr{B}_\lambda$ выполняются равенства

$$\left\langle \mathscr{B}_\lambda \mathscr{B}_\lambda^{-1} u, v \right\rangle = B'_\lambda\left[\mathscr{B}_\lambda^{-1} u, v\right] = \langle u, v\rangle \quad \forall u \in H^l_-,\ v \in H^l_+,\ 0 \neq \lambda \in S.$$

Поэтому согласно (8) для $u \in H^l_-$, $v \in H^l_+$, $0 \neq \lambda \in S$

$$\langle u, v\rangle = \sum_{|\alpha|,|\beta| \leq m} \left(\gamma p_\alpha a_{\alpha\beta} D^\alpha \mathscr{B}_\lambda^{-1} u, p_\beta D^\beta v\right) - \lambda\left(\gamma \mathscr{B}_\lambda^{-1} u, v\right). \tag{16}$$

Для $u \in H^l_-$ имеем $F = \gamma \mathscr{B}_\lambda^{-1} u \in H^l_+$. По определению оператора $\mathscr{A}$

$$\langle (\mathscr{A} - \lambda E) F, v\rangle = \sum_{|\alpha|,|\beta| \leq m} \left(p_\alpha a_{\alpha\beta} D^\alpha \gamma \mathscr{B}_\lambda^{-1} u, p_\beta D^\beta v\right) - \lambda (F, v).$$

Вычитая из обеих частей этого равенства соответствующие части равенства (16), получим

$$\begin{aligned} &\left\langle (\mathscr{A} - \lambda E)\gamma \mathscr{B}_\lambda^{-1} u, v \right\rangle - \langle u, v\rangle \\ &\qquad = \sum_{|\alpha|,|\beta| \leq m} \left(p_\alpha a_{\alpha\beta} \sum C_{\alpha,\sigma} (D^{\sigma'} \gamma) D^\sigma \mathscr{B}_\lambda^{-1} u, p_\beta D^\beta v\right) \end{aligned} \tag{17}$$

для всех $u \in H^l_-$, $v \in H^l_+$, $\lambda \in S$, $|\lambda| \geq 1$. Здесь $C_{\alpha,\sigma}$ — некоторые константы, получающиеся из формулы многократного дифференцирования произведения функций; во второй сумме суммирование проводится по мультииндексам $\sigma, \sigma' \in \mathbb{Z}^n_+$ таким, что $|\sigma| < |\alpha|$, $\sigma + \sigma' = \alpha$.

Из представления (15) согласно лемме 1 имеем

$$\begin{aligned} \left|p_\alpha D^\sigma \mathscr{B}_\lambda^{-1} u\right|_{H^l} &\leq q(|\lambda|) |(P + |\lambda|E)^{1/2} \mathscr{B}_\lambda^{-1} u|_{H^l} \\ &\leq c_1 q(|\lambda|) |\mathscr{P}^{-1}(|\lambda|) u|_{H^l} \leq c_2 q(|\lambda|) |u|_{H^l_{-|\lambda|}}, \quad u \in H^l_-, \end{aligned}$$

для всех $\lambda \in S$, $|\lambda| \geq 1$, $|\sigma| < |\alpha| \leq m$; $q(t) \to 0$ $(t \to +\infty)$. Следовательно, правая часть (17) по модулю не превосходит $c_3 q(|\lambda|) |u|_{-\nu} |v|_\nu$ для всех $1 \leq \nu < 4|\lambda|$, $\lambda \in S$ и всех $u \in H^l_-$, $v \in H^l_+$.

Таким образом, оператор $J'_{\nu,\lambda}$ $(1 \leq \nu < 4|\lambda|,\ \lambda \in S)$, определенный равенством

$$J'_{\nu,\lambda} = \left(E - (\mathscr{A} - \lambda E)\gamma \mathscr{B}_\lambda^{-1}\right) : H^l_{-\nu} \to H^l_{-\nu},$$

удовлетворяет оценке $\|J'_{\nu,\lambda}\|_{H^l_{-\nu}\to H^l_{-\nu}} \le Mq(\lambda)$. Аналогичные рассуждения можно проводить для оператора $\mathscr{A}^+ - \bar{\lambda}E$, где оператор $\mathscr{A}^+ : H^l_+ \to H^l_-$ действует по формулам

$$\langle \mathscr{A}^+ u, v\rangle = \overline{\mathscr{U}[v,u]} = \sum_{|\alpha|,|\beta|\le m} (p_\alpha a^*_{\beta\alpha} D^\alpha u, p_\beta D^\beta v), \quad u, v \in H^l_+, \tag{18}$$

откуда следует, что $\ker(\mathscr{A} - \lambda E) = 0$ ($\lambda \in S$, $|\lambda| > \tilde{c}_S$). Таким образом, для достаточно больших по модулю $\lambda \in S$, $1 \le \nu < 4|\lambda|$, оператор $\mathscr{A} - \lambda E$ непрерывно обратим и оператор $\mathscr{J}_{\nu,\lambda}$ в формуле (13) можно задавать по формулам

$$E + \mathscr{J}_{\nu,\lambda} = (E - J'_{\nu,\lambda})^{-1} = E + J'_{\nu,\lambda} + (J'_{\nu,\lambda})^2 + \dots.$$

Используя (13), (14′), (15), получим

$$\begin{aligned}(\mathscr{A} - \lambda E)^{-1} &= \gamma(P + |\lambda|E)^{-1/2} X(\lambda)\mathscr{P}^{-1}(|\lambda|)\cdot(E + \mathscr{J}_{\nu,\lambda})\\ &= (P + |\lambda|E)^{-1/2} X_1(\lambda)\mathscr{P}^{-1}(|\lambda|)\cdot(E + \mathscr{J}_{\nu,\lambda})\mathscr{P}(|\lambda|)\mathscr{P}^{-1}(|\lambda|),\end{aligned}$$

$$\|X_1(\lambda)\|_{H^l\to H^l} \le M \quad (\lambda \in S,\ |\lambda| > c_S).$$

Для доказательства представления (4) остается только проверить, что

$$\|\mathscr{P}^{-1}(|\lambda|)\mathscr{J}_{\nu,\lambda}\mathscr{P}(|\lambda|)\|_{H^l\to H^l} \le M$$

равномерно по $\lambda \in S$, $|\lambda| > c_S$, $\nu = |\lambda|$:

$$|\mathscr{P}^{-1}(|\lambda|)\mathscr{J}_{\nu,\lambda}\mathscr{P}(|\lambda|)u|_{H^l} \le |\mathscr{J}_{\nu,\lambda}\mathscr{P}(|\lambda|)u|_{-|\lambda|} \le M_1|\mathscr{P}(|\lambda|)u|_{-|\lambda|} \le M_2|u|_{H^l}.$$

7. Докажем теорему 1. Пусть A — сужение оператора $\mathscr{A}$ в H^l (см. (3)). Тогда свойство (i) для оператора A сразу следует из определения оператора $\mathscr{A}$. Согласно (13) при $\lambda \in S$, $|\lambda| > c_S$, оператор $A - \lambda E$ имеет нулевое ядро. Отсюда и из (3), (4) вытекает, что существует непрерывный обратный

$$(A - \lambda E)^{-1}u = (\mathscr{A} - \lambda E)^{-1}u \quad (u \in H^l,\ \lambda \in S,\ |\lambda| > c_S). \tag{19}$$

Пусть теперь A' — некоторый замкнутый оператор в H^l такой, что

$$D(A') \subset H^l_+, \quad (A'u, v) = \mathscr{U}[u,v] \quad \forall v \in H^l_+,\ u \in D(A'),$$

и существует непрерывный обратный $(A' - \lambda_0 E)^{-1}$ для некоторого $\lambda_0 \in \mathbb{C}$. Ясно, что $D(A') \subset \{u \in H^l_+ : \mathscr{A}u \in H^l\} = D(A)$ и оператор A является расширением оператора A'. Следовательно,

$$(A - \lambda_0 E)(A' - \lambda_0 E)^{-1}u = u \quad \forall u \in H^l. \tag{20}$$

Далее нам понадобится следующая

Лемма 2. *Вложение $H_+ \subset H$ при $\theta < m$ компактно.*

Следствие. *Оператор P имеет дискретный спектр.*

Для доказательства леммы применяется следующее вытекающее из (10) неравенство:

$$|\rho^{-\nu}u|_H \le M|u|_+,\ u \in H_+, \quad \nu = \frac{m-\theta}{2} > 0.$$

Пусть Ω_ε, Ω'_ε — области такие, как в лемме 1. Используя компактность вложения $W_2^m(\Omega_\varepsilon) \subset L_2(\Omega_\varepsilon)$, из любой последовательности $u'_1, u'_2, \ldots \in H_+$,

$|u'_j|_+ \leq 1$, можно выделить подпоследовательность $u_{1,\varepsilon}, u_{2,\varepsilon}, \ldots$ такую, что $|u_{i,\varepsilon} - u_{j,\varepsilon}|_{L_2(\Omega_\varepsilon)} \to 0$, $i, j \to +\infty$. Так как

$$|u|_{L_2(\Omega'_\varepsilon)} \leq \varepsilon^\nu |\rho^{-\nu} u|_{L_2(\Omega)} \leq M\varepsilon^\nu |u|_+ \quad (u \in H_+),$$

имеем

$$\overline{\lim_{i,j\to+\infty}} |u_{i,\varepsilon} - u_{j,\varepsilon}|_H \leq 2M\varepsilon^\nu. \tag{21}$$

Из последовательности $u_{1,\varepsilon}, u_{2,\varepsilon}, \ldots$ можно выделить подпоследовательность $u_{1,\varepsilon/2}, u_{2,\varepsilon/2}, \ldots$, для которой указанное неравенство выполняется с $\frac{\varepsilon}{2}$ вместо ε. Повторяя эту процедуру k раз, получим подпоследовательность $u_{i,\varepsilon_k/2}$, $i = 1, 2, \ldots$, $\varepsilon_k = 2^{-k}\varepsilon$, последовательности u_{i,ε_k}, $i = 1, 2, \ldots$, такую, что (21) выполняется с $\varepsilon_k/2$ вместо ε. Применяя стандартный прием диагонализации, находим нужную сходящуюся последовательность $u_j = u_{j,\varepsilon_{j+1}}$, $j = 1, 2, \ldots$.

Так как $D(A') \subset H^l_+$, из леммы 2 следует, что оператор A' имеет дискретный спектр. Поэтому, не нарушая общности, можно считать, что в (20) $\lambda_0 \in S$, $|\lambda_0| > c_S$, и, следовательно, $(A - \lambda_0 E)^{-1} = (A' - \lambda_0 E)^{-1}$. Таким образом, $A = A'$, что доказывает теорему 1. Из (4) и (19) следует (4′), что завершает доказательство теоремы 2.

8. Пусть A, P — операторы такие, как в теореме 2. Обозначим через $N(t)$, $N_0(t)$, $t > 0$, числа собственных значений (с.з.) соответственно операторов A, P, не превосходящих по модулю t, с учетом их алгебраических кратностей. Напомним, что $P = P^* \geq 0$. Введем для $\theta \neq \frac{m}{n}$ функцию $\Phi(t) = t^w$ $(1 \leq t < +\infty)$, где $w = \max\{\frac{n}{2m}, \frac{n-1}{2m-2\theta}\}$. Для $\theta = \frac{m}{n}$ полагаем $\Phi(t) = t^w \ln t$.

Согласно результатам статьи [18] в случае конечных областей $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\partial\Omega \in C^1$, при $\theta + \frac{1}{2} \notin \{1, \ldots, m\}$ верна оценка $N_0(t) \leq M\Phi(t)$, $1 < t < +\infty$. Гладкость границы использовалась в [18] только для обоснования применимости неравенства Харди. Соответствующее неравенство типа Харди (10) установлено в [7] для произвольных конечных областей $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, удовлетворяющих условию конуса. Поэтому мы можем в дальнейшем использовать оценку $N_0(t) = O(1)\Phi(t)$ для $\theta + \frac{1}{2} \notin \{1, \ldots, m\}$. В случае $\theta + \frac{1}{2} \in \{1, \ldots, m\}$ функция $N_0(t)$ сравнивается с функцией $N_{\varepsilon'}(t)$ распределения с.з. оператора $P_{\varepsilon'}$, который строится так же, как оператор P, но с показателем $\theta + \varepsilon' < m$ вместо θ, так что $\theta + \varepsilon' + \frac{1}{2} \notin \{1, \ldots, m\}$, $\varepsilon' > 0$. Тогда мы можем так же, как выше, написать некоторую оценку сверху для функции $N_{\varepsilon'}(t)$. Окончательно, учитывая произвольность числа $\varepsilon' > 0$, находим

$$N_0(t) \leq M_\varepsilon t^{w+\varepsilon} \quad (1 \leq t < +\infty) \quad \forall \varepsilon > 0, \tag{22}$$

причем эта оценка имеет место для любого $\theta < m$. Отсюда на основании (4′), в частности, следует, что порядки резольвент операторов A, P не превосходят числа w.

Теорема 4. *Для функции $N(t)$ распределения с.з. оператора A справедлива оценка $N(t) \leq M'_\varepsilon t^{w+\varepsilon}$ $(t \geq 1)$ $\forall \varepsilon > 0$, причем если $\theta + \frac{1}{2} \notin \{1, \ldots, m\}$, то $N(t) \leq M'\Phi(t)$ $(t \geq 2)$.*

Для доказательства возводим обе части равенства (4′) в целую степень $k > w$. Для достаточно больших $t \geq t_0$ имеем

$$|(A + tE)^{-k}|_1 \leq M|(P + tE)^{-1/2}|^{2k}_{2k} \leq M \int_0^{+\infty} \frac{dN_0(\tau)}{(t+\tau)^k};$$

здесь символы $|\cdot|_1$, $|\cdot|_{2k}$ обозначают соответственно ядерную норму и σ_{2k}-норму оператора [12]. Согласно теореме 2 с.з. $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ оператора A удовлетворяют неравенствам

$$c'(\tau + |\lambda_i|) \le |\tau + \lambda_i|, \quad i = 1, 2, \ldots, \ \tau > \tau_0 \ (c' > 0).$$

Сумма модулей с.з. ядерного оператора не превосходит его ядерной нормы. Поэтому для $\theta + \frac{1}{2} \notin \{1, \ldots, m\}$ имеем

$$\sum_{i=1}^{+\infty} |(t + |\lambda_i|)|^{-k} \le M_1 \int\limits_0^{+\infty} \frac{d\Phi(\tau)}{(t+\tau)^k}.$$

Следовательно,

$$N(t) \le \int\limits_0^t dN(\tau) \le 2^k t^k \int\limits_0^t \frac{dN(\tau)}{(\tau + t)^k} \le M_2 t^k \int\limits_0^{+\infty} \frac{d\Phi(\tau)}{(\tau+t)^k} \le M'\Phi(t) \quad (t \ge 2).$$

Первая оценка в теореме 4 доказывается аналогично с привлечением неравенства (22).

9. Пусть $\mathscr{A}^+ : H^l_+ \to H^l_-$ — оператор, введенный выше в (18), A' — сужение в H^l оператора $\mathscr{A}^+$, т. е.

$$D(A') = \{u \in H^l_+ : \mathscr{A}^+ u \in H^l\}, \quad A'u = \mathscr{A}^+ u \quad (u \in D(A')).$$

Теорема 5. *Справедливы следующие утверждения.*

(а) *$A' = A^*$, где A^* — оператор, сопряженный к оператору A.*

(б) *Для любого замкнутого сектора $S \subset \{0\} \cup \{z \in \mathbb{C} : |\arg z| > \varphi\}$ с вершиной в нуле найдется число $c = c_S > 0$ такое, что для $\lambda \in S$, $|\lambda| > c$, имеют место равенства*

$$(\mathscr{A}^+ - \lambda E)^{-1} = (P + |\lambda| E)^{-1/2} Y_1(\lambda) \mathscr{P}^{-1}(|\lambda|),$$

$$(A^* - \lambda E)^{-1} = (P + |\lambda| E)^{-1/2} Y_1(\lambda)(P + |\lambda| E)^{-1/2},$$

где нормы операторов $Y_1(\lambda) : H^l \to H^l$ равномерно ограничены сверху по $\lambda \in S$, $|\lambda| > c$; сектор S содержит конечное число точек спектров операторов A, A^*.

(в) *Области определений $D(A), D(A^*)$ операторов A, A^* состоят из вектор-функций $u \in H^l_+$, удовлетворяющих соответственно следующим условиям:*

$$\exists f \in H^l \ (f, v) = \mathscr{U}[u, v] \quad \forall v \in H^l_+,$$

$$\exists f \in H^l \ (f, v) = \overline{\mathscr{U}[v, u]} \quad \forall v \in H^l_+.$$

Доказательство в основном следует из того факта, что утверждения теорем 1, 2 верны и для операторов $A', \mathscr{A}^+$ (взятых вместо $A, \mathscr{A}$). Равенство $A' = A^*$ устанавливается такими же рассуждениями, как в п. 7.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бойматов К. Х.* Матричные дифференциальные операторы, порожденные некоэрцитивными формами // Докл. РАН. 1994. Т. 339, № 1. С. 5–10.

2. *Бойматов К. Х.* Некоторые спектральные свойства матричных дифференциальных операторов, далеких от самосопряженных // Функцион. анализ и его приложения. 1995. Т. 29, № 3. С. 55–58.

3. *Бойматов К. Х., Исхоков С. А.* О разрешимости и гладкости решения вариационной задачи Дирихле, связанной с некоэрцитивной билинейной формой // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова РАН. 1997. Т. 214. С. 107–134.
4. *Бойматов К. Х.* О спектральной асимптотике и суммируемости методом Абеля рядов по системе корневых вектор-функций негладких эллиптических дифференциальных операторов, далеких от самосопряженных // Докл. РАН. 2000. Т. 372, № 4. С. 442–445.
5. *Егоров И. Е., Пятков С. Г., Попов С. В.* Неклассические дифференциально-операторные уравнения. Новосибирск: Наука, 2000.
6. *Лизоркин П. И., Никольский С. М., Мирошин Н. В.* Весовые функциональные пространства и их приложения к исследованию краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений // Изв. вузов. Математика. 1988. № 8. С. 4–30.
7. *Красносельский М. А., Забрейко П. П., Пустыльник Е. И., Соболевский П. Е.* Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. М.: Наука, 1966.
8. *Агранович М. С.* Эллиптические операторы на замкнутых многообразиях // Соврем. проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНИТИ, 1990. Т. 63. С. 5–129. (Итоги науки и техники).
9. *Лидский В. Б.* О суммируемости рядов по главным векторам несамосопряженных операторов // Тр. Моск. мат. об-ва. 1962. Т. 11. С. 3–35.
10. *Sango M.* A spectral problem with an indefinite weight for an elliptic system // Electronic J. Differential Equations. 1997. V. 21. P. 1–14.
11. *Yakubov S.* Abel basis of root functions of regular boundary value problems // Math. Nachr. 1999. V. 197. P. 157–187.
12. *Pyatkov S. G.* Riesz's bases from the eigenvectors and associated vectors of elliptic eigenvalue problems with an indefinite weight function // Siberian J. Differential Equations. 1995. V. 1, N 2. P. 179–196.
13. *Агранович М. С.* О рядах по корневым векторам операторов, определяемых формами с самосопряженной главной частью // Функциональный анализ и его приложения. 1994. Т. 28, № 3. С. 1–21.
14. *Agranovich M. S.* Nonselfadjoint elliptic operators in nonsmooth domains // Russian J. Math. Phys. 1994. V. 2, N 2. P. 139–148.
15. *Faierman M.* An elliptic boundary problem involving an indefinite weight // Proc. Royal Soc. Edinburgh Ser. A. 2000. V. 130. P. 287–305.
16. *Бойматов К. Х.* Описание функций из весовых классов С. Л. Соболева с нулевыми следами на C^0-многообразиях // Докл. РАН. 1994. Т. 339, № 6. С. 727–731.
17. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972.
18. *Бойматов К. Х.* Двусторонние оценки собственных значений задачи Дирихле для одного класса вырождающихся эллиптических дифференциальных операторов // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. 1985. Т. 172. С. 16–28.

Статья поступила 22 мая 2002 г., окончательный вариант — 19 августа 2004 г.

Бойматов Камолиддин Хамроевич
Институт математики Академии наук Республики Таджикистан
ул. Айни, 299, Душанбе 734041, Таджикистан