Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2006. Том 47, № 1

УДК 512.54

ОБ ЭНГЕЛЕВОЙ ДЛИНЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ЭНГЕЛЕВЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Л. В. Долбак

Аннотация: Рассматривается связь между энгелевыми длинами элементов и энгелевой длиной их произведения. Приводится контрпример к вопросу 11.88 из «Коуровской тетради» [1].

Ключевые слова: энгелев элемент, энгелева группа, энгелева длина элемента.

Вопросы, связанные с энгелевыми группами и энгелевыми элементами, рассматривались во многих работах по теории групп. При этом отмечалось, что до сих пор не найдены ответы на следующие вопросы: будет ли в произвольной группе произведение нормальных энгелевых подгрупп снова энгелевой подгруппой, будет ли множество энгелевых элементов образовывать подгруппу [2, 3], см. также [4]?

В основном мы используем стандартные обозначения и определения теории групп [4, 5]. Напомним определение энгелева элемента.

Определение 1. Элемент g произвольной группы G называется *энгелевым* (или *ограниченно энгелевым*), если для любого $a \in G$ существует натуральное число $n = n(g)$, удовлетворяющее равенству $[a, g; n] = 1$. Здесь $[a, g; 1] = [a, g]$ и $[a, g; i + 1] = [[a, g; i], g]$.

Так определенный энгелевый элемент иногда называют *левым энгелевым*, чтобы отличить его от правого энгелева элемента. Поскольку правые энгелевы элементы в нашей работе не рассматриваются, то термин *левый энгелевый элемент* употреблять не будем.

Определение 2. *Энгелевой длиной* $l_a(g)$ произвольного элемента g из группы G относительно элемента a называется наименьшее число l, удовлетворяющее равенству $[a, g; l] = 1$. Обозначим через $l(g) = \max\limits_{a\in G} l_a(g)$ энгелеву длину элемента g.

Определение 3. Группа называется *энгелевой*, если каждый ее элемент энгелев.

Некоторые подходы к решению вопроса энгелевости произведения энгелевых элементов предложил В. А. Романьков, поставив в [1] вопрос 11.88. В нем спрашивается о существовании линейной (полиномиальной) функции $\varphi(x, y)$ такой, что $l(uv) \le \varphi(l(u), l(v))$.

Вопрос об ограниченности энгелевой длины произведения энгелевых элементов полиномиальной функцией решен в данной статье отрицательно. Однако это не указывает путей решения основного вопроса, связанного с энгелевостью произведения энгелевых элементов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 03–01–00320).

Автор благодарен своему научному руководителю В. В. Блудову за ценные консультации и помощь в подготовке статьи.

Приведем пример группы, который будет необходим нам при доказательстве основного результата.

Пример 1. Рассмотрим семейство нильпотентных групп H_n, $n \in \mathbb{N}$, где

$$H_n = \left\langle b_n, c_n \mid b_n^{p^n} = c_n^p = \left[b_n^{c_n^i}, b_n^{c_n^j}\right] = 1 \ \forall i \in \mathbb{N}\right\rangle.$$

Положим $b_{i,n} = b_n^{c_n^i}$. Подгруппу группы H_n, порожденную всеми $b_{i,n}$, обозначим через B_n. Группа B_n — нормальная абелева p-подгруппа группы H_n. Вся группа H_n является полупрямым произведением группы B_n на циклическую p-группу $C_{p,n} = \left\langle c_n \mid c_n^p = 1\right\rangle$ при помощи автоморфизма $b_{i,n}^{c_n} = b_{i+1,n}$, где сложения в индексах производятся по модулю p: $H_n = B_n \leftthreetimes C_{p,n}$. Обозначим через N подгруппу группы $B_n \leftthreetimes C_{p,n}$, порожденную элементом $b_{0,n}b_{1,n}\dots b_{p-1,n}$, N — нормальная подгруппа группы $B_n \leftthreetimes C_{p,n}$. Фактор-группу $(B_n \leftthreetimes C_{p,n})/N$ обозначим через K_n. Заметим, что $(b_{0,n}c_n)^p = b_{0,n}b_{1,n}\dots b_{p-1,n}$. Таким образом, группа K_n имеет представление

$$K_n = \left\langle b_{0,n}, c_n \mid (b_{0,n}c_n)^p = c_n^p = b_{0,n}^{p^n} = [b_{i,n}, b_{j,n}] = 1,\ i,j = 0,1,\dots,p-2\right\rangle.$$

Для каждого натурального $n > 1$ пусть $G_n = A \wr K_n$ — сплетение циклической p-группы $A = \langle a \mid a^p = 1\rangle$ и определенной выше группы K_n.

Теорема 1. *Существуют энгелевы группы, для которых энгелева длина произведения двух элементов не ограничена никакой полиномиальной функцией от энгелевых длин сомножителей.*

Для доказательства теоремы нам понадобятся три технические леммы.

Лемма 1. *Пусть H — нормальная подгруппа группы G и $x \in G$ — энгелев элемент. Если $l_h(x) \le k$ для всех $h \in H$ и $l(\bar{x}) \le n$, где $\bar{x}$ – образ элемента x в G/H, то $l(x) \le n + k$.*

Доказательство. Возьмем произвольный элемент $g \in G$ и соответствующий ему смежный класс $\bar{g} = gH$. По условию леммы $[\bar{g}, \bar{x}; n] = \bar{1}$, т. е. $[g, x; n]H = H$. Таким образом, $[g, x; n] \in H$. По условию леммы $[[g, x; n], x; k] = 1$. В силу произвольности выбора элемента g получаем $l(x) \le n + k$.

Индукцией по n легко доказывается

Лемма 2. *Пусть в группе G элементы x и y удовлетворяют соотношению $[x, x^{y^i}] = 1$ для любого $i \in \mathbb{N}$. Тогда для всех $n \in \mathbb{N}$ выполняется*

$$[x, y; n] = x^{(-1)^n} x^{(-1)^{n-1}\binom{n}{1}y} x^{(-1)^{n-2}\binom{n}{2}y^2} \dots x^{-\binom{n}{n-1}y^{n-1}} x^{y^n}.$$

Лемма 3. *Пусть H — подгруппа группы G, $x \in H$, $y \in G$ и элементы x, y удовлетворяют соотношению $[x, x^{y^i}] = 1$ для любого $i \in \mathbb{N}$. Если порядки элементов x и y равны p^n и p соответственно, то $[x, y; n(p-1)+1] = 1$.*

Доказательство. Сначала покажем, что для любого $n \in \mathbb{N}$ выполняется $[x, y; n(p-1)+1] = \left[z_n^p, y\right]$, где $z_n \in H^y$. Доказательство проведем индукцией по n.

При $n=1$ по лемме 2 получаем

$$
\begin{aligned}
[x,y;p] &= x^{-1}x^{\binom{p}{1}y}x^{-\binom{p}{2}y^2}\dots x^{-\binom{p}{p-1}y^{p-1}}x^{y^p}\\
&= x^{\binom{p}{1}y}x^{-\binom{p}{2}y^2}\dots x^{-\binom{p}{p-1}y^{p-1}} = \left(x^{\alpha_1 y+\alpha_2 y+\dots+\alpha_{p-1}y^{p-1}}\right)^p\\
&= \left(x^{(\beta_1 y-\beta_1 y^2)+(\beta_2 y^2-\beta_2 y^3)+\dots+(\beta_{p-2}y^{p-2}-\beta_{p-2}y^{p-1})+\beta_{p-1}y^{p-1}}\right)^p,
\end{aligned}
$$

где $\beta_i=\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_i$, $i\in\overline{1,p-1}$. Заметим, что $\beta_{p-1}=\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_{p-1}=0$, так как эта сумма кратна сумме биномиальных коэффициентов. Тем самым

$$
[x,y;p]=\left([x^{\beta_1 y},y][x^{\beta_2 y^2},y]\dots[x^{\beta_{p-2}y^{p-2}},y]\right)^p=\left[z_1^p,y\right],
$$

где $z_1\in H^y$.

Проверим утверждение для $n+1$:

$$
[x,y;(n+1)(p-1)+1]=\left[\left[z_n^{p^n},y\right],y;p-1\right]=\left[z_n^{p^n},y;p\right].
$$

Действуя аналогично случаю $[x,y;p]$, получим

$$
[x,y;(n+1)(p-1)+1]=\left[z_{n+1}^{p^{n+1}},y\right],
$$

где $z_{n+1}\in H^y$.

Таким образом, если порядки элементов x и y равны p^n и p соответственно, то $[x,y;n(p-1)+1]=\left[z_n^{p^n},y\right]=1$.

Доказательство теоремы. Рассмотрим построенную в примере 1 группу G_n. Она является p-группой, поэтому нильпотентна и тем более энгелева. Оценим энгелевы длины элементов c_n, $c_n^{-1}b_0$ и их произведения b_0 .

Сначала оценим энгелеву длину элементов c_n, $c_n^{-1}b_0$ относительно элементов группы K_n.

Так как порядки элементов c_n и $c_n^{-1}b_0$ равны p, а порядок элемента b_0 равен p^n, согласно лемме 3 получаем $[b_0,c_n;n(p-1)+1]=1$ и $\left[b_0,c_n^{-1}b_0;n(p-1)+1\right]=1$. Теперь найдем $l_{c_n}\left(c_n^{-1}b_0\right)$. Порядок элемента c_n равен p, значит, по лемме 3 $\left[c_n,c_n^{-1}b_0;p\right]=1$. Таким образом, $l(c_n)\le n(p-1)+1$, $l\left(c_n^{-1}b_0\right)\le n(p-1)+1$.

Нижняя подгруппа $\overline{A}$ сплетения G_n — элементарная абелева p-группа с порождающими a_g, $g\in K_n$. Найдем энгелевы длины элементов c_n и $c_n^{-1}b_0$ относительно элементов этой группы. Группа $\overline{A}$ является нормальной подгруппой группы G_n, порядок элементов a_g равен p. По лемме 3 получаем $[a_g,c_n;p]=1$ и $\left[a_g,c_n^{-1}b_0;p\right]=1$.

Поскольку $\overline{A}$ — нормальная абелева подгруппа, то $l_{a_g}(c_n)=p$ и $l_{a_g}\left(c_n^{-1}b_0\right)=p$ для всех $a_g\in\overline{A}$. Отметим, что $[a_g,c_n;k]\ne 1$ при $k<p$.

Так как $\overline{A}$ — нормальная подгруппа группы G_n и $G_n/\overline{A}\cong K_n$, по лемме 1 с учетом того, что $l_{a_g}(c_n)=p$ и $l_{a_g}\left(c_n^{-1}b_0\right)=p$, получаем $p\le l(c_n)$, $l\left(c_n^{-1}b_0\right)\le (n+1)p-n+1$.

Оценим энгелеву длину произведения элементов c_n и $c_n^{-1}b_0$. Имеем $[a_1,b_0]=a_1^{-1}a_{b_0}\ne 1$, $[a_1,b_0,b_0]=a_1a_{b_0}^{-1}a_{b_0}^{-1}a_{b_0^2}=a_1a_{b_0}^{-2}a_{b_0^2}\ne 1$, и т. д.

По лемме 2

$$
\begin{aligned}
[a_1,b_0;p] &= a_1^{(-1)^p}a_1^{(-1)^{p-1}\binom{p}{1}b_0}a_1^{(-1)^{p-2}\binom{p}{2}b_0^2}\dots a_1^{-\binom{p}{p-1}b_0^{p-1}}a_1^{b_0^n}\\
&= a_1^{-1}a_{b_0}^{\binom{p}{1}}a_{b_0^2}^{(-1)^{p+2}\binom{p}{2}}\dots a_{b_0^{p-1}}^{-\binom{p}{p-1}}a_{b_0^p}=a_1^{-1}a_{b_0^p}\ne 1,\dots,
\end{aligned}
$$

$$[a_1, b_0; p^n] = a_1^{(-1)^{p^n}} a_1^{(-1)^{p^n-1}\binom{p^n}{1}b_0} a_1^{(-1)^{p^n-2}\binom{p^n}{2}b_0^2} \dots a_1^{-\binom{p^n}{p^n-1}b_0^{p^n-1}} a_1^{b_0^{p^n}} = a_1^{-1} a_{b_0^{p^n}} = 1,$$

значит, $l(b_0) \geq p^n$.

Рассмотрим прямое произведение $\overline{G} = \prod\limits_{n \in \mathbb{N}} G_n$. Положим

$$u_1 = (c_1, 1, 1, \dots),\ u_2 = (1, c_2, 1, \dots), \dots, u_n = (1, 1, \dots, 1, c_n, 1, \dots).$$

Соответственно $v_n = \big(1, 1, \dots, 1, c_n^{-1} b_0, 1, \dots\big)$. Тогда $l(u_n v_n) \geq p^n$, т. е. $l(u_n v_n)$ не ограничена никакой полиномиальной функцией от $l(u_n)$, $l(v_n)$. Следовательно, не существует полиномиальной функции φ от $l(u_n)$, $l(v_n)$ такой, что $l(u_n v_n) \leq \varphi(l(u_n), l(v_n))$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Коуровская тетрадь.* Нерешенные вопросы теории групп. Новосибирск: ИМ СО РАН, 1999.

2. *Плоткин Б. И.* Группы автоморфизмов алгебраических систем. М.: Наука, 1966.

3. *Плоткин Б. И.* Замечания об энгелевых группах и энгелевых элементах в группах и некоторые обобщения // Изв. Урал. гос. ун-та. 2005. № 36. С. 153–166.

4. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп. М.: Наука, 1977.

5. *Курош А. Г.* Теория групп. М.: Наука, 1967.

Статья поступила 7 марта 2004 г.

Долбак Лариса Владимировна
Иркутский институт повышения квалификации работников образования,
кафедра информатизации образования,
ул. Российская, 21, Иркутск 664025
d_lora@nm.ru