Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2006. Том 47, № 3

УДК 515.14

ПРОСТРАНСТВО ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПОГРУЖЕНИЙ СФЕР

Ю. Кая

Аннотация: Пусть $f : M^m \to \mathbb{R}^{m+1}$ — погружение m-мерного связного ориентируемого гладкого многообразия M без края и ξ — поле единичных нормалей вдоль f. Для вещественного t определим отображение $f_{t\xi} : M^m \to \mathbb{R}^{m+1}$, полагая $f_{t\xi}(p) = f(p) + t\xi(p)$. Известно, что, когда $f_{t\xi}$ — погружение, для любого $p \in M$ число фокальных точек на промежутке, соединяющем $f(p)$ и $f_{t\xi}(p)$, целое. Это число, называемое индексом параллельного погружения $f_{t\xi}$, лежит в промежутке между 0 и m. Если $f : \mathbb{S}^m \to \mathbb{R}^{m+1}$ — вложение, то изучается наличие компоненты индекса μ в пространстве погружений $\Omega(f)$. Известно, что если существует компонента с индексом $\mu = m$ в $\Omega(f)$, то f — строго выпуклое вложение в $\mathbb{S}^m$. Описана структура $\Omega(f)$, когда $f(\mathbb{S}^m)$ выпукло и невыпукло. Показано также, что наличие компоненты индекса μ в $\Omega(f)$ позволяет строить непрерывное поле касательных плоскостей размерности μ на $\mathbb{S}^m$, откуда выводится, что для некоторых значений μ не существует компоненты индекса μ на $\Omega(f)$.

Ключевые слова: параллельное погружение, индекс параллельного погружения.

1. Введение и основные определения

Пусть $f : M^m \to \mathbb{R}^{m+1}$ — погружение m-мерного связного ориентируемого гладкого многообразия M без края и ξ — поле единичных нормальных векторов вдоль f. Будем рассматривать множество

$$\Omega(f) = \{t \in \mathbb{R} : f(p) + t\xi(p) \text{ не является фокальной точкой для } p \ \forall p \in M\}.$$

Замечание 1. Если M неориентируемо, то мы возьмем вместо него простое связное накрывающее пространство $\widetilde{M}$ и накрывающее отображение $\pi : \widetilde{M} \to M$ и определим $\Omega(f)$ как $\Omega(f) = \Omega(f \circ \pi)$, где существует всюду определенное поле единичных нормалей вдоль погружения $(f \circ \pi)$.

Пусть $\nu_p(f)$ — нормальная прямая к $f(M)$ в точке $f(p)$. Нормальным расслоением будет

$$N(f) = \{(p, v) \in M \times \mathbb{R}^{m+1} : f(p) + v \in \nu_p(f)\}.$$

Определим *отображение «в конец»* $\eta : N(f) \to \mathbb{R}^{m+1}$, полагая $\eta(p, v) = f(p) + v$. Очевидно, что η — гладкое отображение. Точка $v \in \mathbb{R}^{m+1}$ называется *фокальной точкой* $f(M)$ для p, если $\operatorname{Jac}\eta$ сингулярен в $(p, v - f(p))$. Фокальная точка v имеет *кратность* $\mu > 0$, если $\operatorname{rank}(\operatorname{Jac}\eta) = m + 1 - \mu$ в точке $(p, v - f(p))$.

Для каждого $t \in \mathbb{R}$ определим отображение $f_{t\xi} : M^m \to \mathbb{R}^{m+1}$ правилом $f_{t\xi}(p) = f(p) + t\xi(p)$. Тогда $f_{t\xi}$ является погружением в том и только в том случае, если $f_{t\xi}(p)$ не будет фокальной точкой в p для любого $p \in M$. Если $f_{t\xi}$ — погружение, то его называют *параллельным погружению* f. В качестве второго определения можно положить $\Omega(f) = \{t \in \mathbb{R} : f_{t\xi} \text{ — погружение}\}$.

Известно [1, 2], что если M компактно, то $\Omega(f)$ имеет не более двух связных компонент. Кроме того, в [3] показано, что если M компактно и неориентируемо, то $\Omega(f)$ связно.

Полученные в [2, 4] результаты показывают, что если M компактно, то каждая связная компонента $\Omega(f)$ является открытым интервалом. С каждой такой компонентой связывается некоторое целое число, называемое ее *индексом*. Кроме того, всегда есть одна компонента с индексом 0, и если есть еще связная компонента, то она имеет индекс μ, где $1 \leq \mu \leq m$. Тем самым мы будем писать $\Omega(f) = \Omega^0 \cup \Omega^\mu$, где Ω^0 и Ω^μ — связные компоненты $\Omega(f)$ индексов 0 и μ соответственно при погружении f. Заметим, что $0 \in \Omega^0$.

Пусть $f : M^m \to \mathbb{R}^{m+1}$ — погружение m-мерного связного многообразия M без края и ξ — поле единичных нормалей вдоль f такое, что $f_{t\xi}$ — погружение для некоторого $t \in \mathbb{R}$. Тогда $t \in \Omega(f)$. *Индекс* погружения $f_{t\xi}$ определяется как сумма кратностей фокальных точек на промежутке от $f(p)$ до $f_{t\xi}(p)$, которая постоянна на M и по существу является индексом связной компоненты $\Omega(f)$, которой принадлежит t.

Замечание 2. Пусть $f : M^m \to \mathbb{R}^{m+1}$ — погружение m-мерного многообразия M и ξ — поле единичных нормалей вдоль f. Пусть $\Omega(f) = \Omega^0 \cup \Omega^\mu$ и $s \in \Omega^\mu$ с $\mu \geq 1$. Можно считать $s > 0$. Если же $s < 0$, то можно взять $(-\xi)$ в качестве поля единичных нормалей вдоль f и использовать $(-\xi)$ в определении $\Omega(f)$. Тогда $f_{(-s)(-\xi)} = f_{s\xi}$ — погружение с индексом μ и $(-s) > 0$.

Для любого $z \in \mathbb{S}^m$ определим *функцию высоты* $H_z : M \to \mathbb{R}$ для f, полагая $H_z(p) = \langle z, f(p)\rangle$. Подробное изложение теории критических точек функции высоты можно найти в [5]. Некоторые факты из нее соберем в следующей ниже лемме.

Для $p \in M$ через $K(p)$ обозначают произведение главных кривизн, являющихся собственными значениями матрицы

$$\left(\left\langle \frac{\partial f}{\partial p_i}, \frac{\partial f}{\partial p_j}\right\rangle\right)^{-1} \left(\left\langle z, \frac{\partial^2 f}{\partial p_i \partial p_j}\right\rangle\right)$$

в точке p в направлении z для погружения f и называют его *гауссовой кривизной в направлении z в точке* $f(p)$, где $(p_1, p_2, \dots, p_m)$ — система координат в окрестности $p \in M$.

Лемма 1. *Пусть $f : M^m \to \mathbb{R}^{m+1}$ — погружение и $z \in \mathbb{S}^m$. Тогда*

(i) *точка $p \in M$ является критической точкой H_z тогда и только тогда, когда $f(p) + z \in \nu_p(f)$,*

(ii) *критическая точка p функции H_z невырожденна в том и только в том случае, если гауссова кривизна $K(p)$ отлична от нуля в направлении z, а это, в свою очередь, равносильно тому, что сумма кратностей фокальных точек отображения f в точке p в направлении z равна m,*

(iii) *индекс невырожденной критической точки функции H_z равен сумме кратностей фокальных точек f с основой p вида $f(p) + rz$, где $r < 0$.*

Пусть $t \in \Omega(f)$. Определим $\widehat{H}_z : M \to \mathbb{R}$ формулой $\widehat{H}_z(p) = \langle z, f_{t\xi}(p)\rangle$. Тогда $\widehat{H}_z$ — функция высоты для погружения $f_{t\xi}$. Сравнение индексов критических точек H_z и $\widehat{H}_z$ можно найти в [2] и в [6] для любых погружений с произвольной коразмерностью.

Будем рассматривать классификацию пространства параллельных погружений $\Omega(f)$ m-сферы $\mathbb{S}^m$, погруженной в $\mathbb{R}^{m+1}$ вдоль f. Вначале рассмотрим случай $\Omega(f)$, когда $f(\mathbb{S}^m)$ выпукло.

Определение 1. Пусть $f : M^m \to \mathbb{R}^{m+1}$ — погружение и ξ — единичное нормальное поле вдоль f. Говорят, что $f(M)$ *выпукло*, если для любого $p \in M$ множество $f(M)$ лежит в одном из замкнутых полупространств

$$H_p^+ = \{y \in \mathbb{R}^{m+1} : \langle y - f(p),\ \xi(p)\rangle \geq 0\}, \quad H_p^- = \{y \in \mathbb{R}^{m+1} : \langle y - f(p),\ \xi(p)\rangle \leq 0\}.$$

Если $f(M)$ выпукло и

$$f(M) \cap \{y \in \mathbb{R}^{m+1} : \langle y - f(p),\ \xi(p)\rangle = 0\} = \{f(p)\}$$

для каждого $p \in M$, то $f(M)$ называют *строго выпуклым*.

Установим связь между $\Omega(f)$ и выпуклостью $f(M)$. Следующий результат был доказан в [4], но мы дадим другое доказательство для погружения, использующее теорему Риба [7].

Далее через $H_\lambda(M)$ обозначена группа гомологий размерности λ многообразия M для некоторого поля коэффициентов $\mathbb{F}$ и через $R_\lambda(M)$ — размерность $H_\lambda(M)$ как векторного пространства над $\mathbb{F}$.

Теорема 1. *Пусть $f : M^m \to \mathbb{R}^{m+1}$ — погружение компактного m-мерного многообразия M с $m \geq 2$. Если $\Omega(f) = \Omega^0 \cup \Omega^m$, то*

(i) *$f(M)$ строго выпукло,*

(ii) *f является вложением и тем самым M диффеоморфно $\mathbb{S}^m$.*

Доказательство. Пусть ξ — поле единичных нормалей вдоль f.

(i) Так как $\Omega^m \neq \varnothing$, существует $t \in \Omega^m$ такое, что $f_{t\xi}$ — погружение с индексом m. Пусть H_z — невырожденная функция высоты на M для некоторого $z \in \mathbb{S}^m$ и C_λ — число критических точек H_z с индексом λ. По лемме 1(iii) любая невырожденная функция высоты для f имеет критические точки только индекса 0 или m. Тогда по слабым неравенствам Морса [7] $R_\lambda(M) \leq C_\lambda$ и тем самым $R_\lambda(M) = 0$ ввиду того, что $C_\lambda = 0$ для $0 < \lambda < m$. Здесь используется то, что $m \geq 2$. Кроме того, в силу неравенств Морса [7] $R_0(M) = C_0$, ибо $R_1(M) = 0$. Поскольку

$$R_m(M) - R_{m-1}(M) + \cdots + (-1)^m R_0(M) = C_m - C_{m-1} + \cdots + (-1)^m C_0$$

и $R_\lambda(M) = 0$ для $0 < \lambda < m$, имеем

$$R_m(M) + (-1)^m R_0(M) = C_m + (-1)^m C_0$$

и поэтому $R_m(M) = C_m$.

Пусть D_λ — число критических точек $(-H_z)$ с индексом λ. Известно, что $C_\lambda = D_{m-\lambda}$. Сопоставляя H_z и $(-H_z)$, получаем

$$R_m(M) = C_m = D_0 = R_0(M), \quad R_0(M) = C_0 = D_m = R_m(M).$$

Итак, $R_m(M) = R_0(M) = C_0 = C_m$. Так как по предположению M связно, переходом к полю коэффициентов $\mathbb{Z}_2$ получим $C_0 = C_m = R_m(M) = R_0(M) = 1$. Тогда по теореме Риба [7] M гомеоморфно сфере $\mathbb{S}^m$. Далее, с учетом того, что $C_0 = 1$, если q — точка минимума функции высоты H_z на M, то она должна быть точкой абсолютного минимума H_z и тогда $f(M)$ лежит строго по одну сторону от касательной плоскости к $f(M)$ в точке $f(q)$. Поэтому $f(M)$ строго выпукло, так как $H_{\xi(p)}$ для любого $p \in M$ является функцией Морса.

(ii) Известно, что $\mathbb{S}^m$ односвязна при $m \geq 2$. Нам надо показать, что f — вложение. Поскольку M компактно, достаточно доказать взаимную однозначность f. Пусть $p_1, p_2 \in M$ и $f(p_1) = f(p_2)$. Пусть $\xi(p_1)$ — единичный вектор нормали с основой p_1. Определим функцию высоты

$$H_{\xi(p_1)}(p) = \langle f(p), \xi(p_1)\rangle.$$

Тогда $H_{\xi(p_1)}$ невырожденная и так как $C_0 = C_m = 1$, то $H_{\xi(p_1)}$ имеет по одной точке абсолютного минимума и максимума и не имеет других критических точек. Очевидно, что p_1 — критическая точка $H_{\xi(p_1)}$ и $H_{\xi(p_1)}(p_1) = H_{\xi(p_1)}(p_2)$. Тем самым $p_1 = p_2$ ввиду единственности точек максимума и минимума. Поэтому f — вложение и M диффеоморфно $\mathbb{S}^m$. $\square$

Результат теоремы не сохраняется, если $m = 1$, что следует из рассмотренного ниже примера.

Пример 1. Пусть $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2$ — погружение, заданное функцией $f(\theta) = (1/2 + \cos\theta)(\cos\theta, \sin\theta)$, изображенной на рис. 1. Поле единичных нормалей вдоль f задается по формуле

$$\xi = -\frac{2}{\sqrt{(5 + 4\cos\theta)}}\left(\cos 2\theta + \frac{\cos\theta}{2}, \sin 2\theta + \frac{\sin\theta}{2}\right).$$

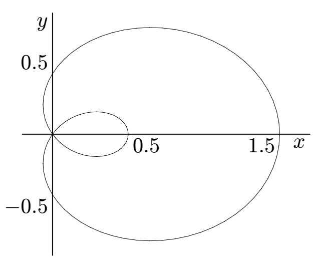

Рис. 1

Легко найти, что $f_{t\xi}(\theta) = f(\theta) + t\xi(\theta)$ — фокальная точка в θ тогда и только тогда, когда $t = \frac{(5+4\cos\theta)^{3/2}}{(18+12\cos\theta)}$. Критические точки t появляются при $\theta = 0$ и $\theta = \pi$, а соответствующие критические значения равны $1/6$ и $27/30$. Тогда $f_{t\xi} = f + t\xi$ — погружение в том и только в том случае, если $t \neq \frac{(5+4\cos\theta)^{3/2}}{(18+12\cos\theta)}$. Итак, $f_{t\xi}$ — погружение тогда и только тогда, когда $t \notin [1/6, 27/30]$. Отсюда $\Omega(f) = \Omega^0 \cup \Omega^1$, где $\Omega^0 = (-\infty, 1/6)$ и $\Omega^1 = (27/30, \infty)$. Но $f(\mathbb{S}^1)$ невыпуклое.

Теорема 2. *Пусть $f : M^m \to \mathbb{R}^{m+1}$ — погружение компактного m-мерного многообразия с $m \geq 2$ такое, что $f(M)$ невыпуклое. Тогда $\Omega^0 = (a, b)$ для некоторых $a < 0 < b$. Если $\Omega^\mu \neq \varnothing$ для некоторого $1 \leq \mu \leq m$, то $\mu < m$ и $\Omega^\mu = (c, d)$ при некотором $d > c$.*

Доказательство. Пусть $f(M)$ невыпуклое и $m \geq 2$. Так как $f(M)$ невыпуклое, существует невырожденная функция высоты H_z на M, имеющая по крайней мере три критические точки с различными индексами. В противном случае, т. е. если каждая невырожденная функция высоты имеет критические точки только индексов 0 и m, по неравенствам Морса [7, с. 30] любая функция высоты имеет в точности одну критическую точку индекса 0 и одну критическую точку индекса m. Ввиду теоремы 8.4 из [5, с. 86] $f(M)$ выпукло. Поэтому если $f(M)$ невыпуклое, то существует невырожденная функция высоты H_z на M с критической точкой индекса λ, где $\lambda \neq 0, m$. Для произвольного $p \in M$ положим

$$\nu_p^+(f) = \{f_{t\xi}(p) = f(p) + t\xi(p) : t > 0\}, \quad \nu_p^-(f) = \{f_{t\xi}(p) = f(p) + t\xi(p) : t < 0\},$$

где ξ — поле единичных нормалей к f. Пусть q — критическая точка функции высоты H_z индекса λ, где $\lambda \neq 0, m$. Отсюда по лемме 1 в $\nu_q^+(f)$ и $\nu_q^-(f)$ есть фокальные точки, ибо сумма кратностей фокальных точек f для q равна m. Определим

$$b_q = \min\{t > 0 : f(q) + t\xi(q) \text{ — фокальная точка для } q\},$$

$$a_q = \max\{t < 0 : f(q) + t\xi(q) \text{ — фокальная точка для } q\}.$$

Очевидно, что Ω^0 содержится в (a_q, b_q) и тем самым ограничено. Так как Ω^0 открыто и связно, оно имеет вид $\Omega^0 = (a, b)$ с какими-то $a_q \le a < 0 < b \le b_q$.

Для доказательства второго утверждения положим $\Omega(f) = \Omega^0 \cup \Omega^\mu$, $1 \le \mu \le m$, и пусть $s \in \Omega^\mu$. Согласно замечанию 2 можно считать, что $s > 0$, и тогда $f_{s\xi}$ имеет индекс μ. Функция высоты H_z имеет критическую точку индекса λ с некоторым $\lambda \ne 0, m$, поэтому $f_{t\xi}$ не может быть погружением с индексом m. Отсюда $\mu < m$. Поскольку M компактно, функция высоты H_z имеет критическую точку индекса 0, пусть q'. Тогда по лемме 1 все фокальные точки с основой q' лежат в $\nu^+_{q'}(f)$. Положим

$$c_{q'} = \max\{t : 0 < t < s \text{ и } f(q') + t\xi(q') \text{ — фокальная точка для } q'\},$$

$$d_{q'} = \min\{t : t > s \text{ и } f(q') + t\xi(q') \text{ — фокальная точка для } q'\}.$$

Ясно, что Ω^μ содержится в $(c_{q'}, d_{q'})$ и тем самым ограничено. Так как Ω^μ открыто и связно, оно имеет вид $\Omega^\mu = (c, d)$ с некоторыми $c_{q'} \le c < d \le d_{q'}$. $\square$

Следствие 1. *Пусть $f : M^m \to \mathbb{R}^{m+1}$ — погружение компактного m-мерного неориентируемого многообразия с $m \ge 2$. Тогда $\Omega(f) = \Omega^0$, где $\Omega^0 = (a, b)$ при некоторых $a < 0 < b$.*

Доказательство. Известно [3], что $\Omega(f) = \Omega^0$, когда M неориентируемо. Поскольку $f(M)$ не может быть выпуклым, результат следствия вытекает из теоремы 2. $\square$

Пусть $f : M^m \to \mathbb{R}^{m+1}$ — погружение m-мерного компактного многообразия. Если $f(M)$ выпукло и $m \ge 2$, то по теореме 4.7 из [5, с. 19] f является вложением и M диффеоморфно $\mathbb{S}^m$. В следующей теореме мы исследуем пространство параллельных погружений $\Omega(f)$.

Теорема 3. *Пусть $f : \mathbb{S}^m \to \mathbb{R}^{m+1}$ — вложение такое, что $f(\mathbb{S}^m)$ выпукло. Тогда при соответствующем выборе поля единичных нормалей вдоль f справедливы свойства:*

(i) *$\Omega^0 \subset \Omega(f)$ имеет вид $\Omega^0 = (-\infty, a)$ при некотором $a > 0$,*

(ii) *если $m \ge 2$ и $\Omega(f) = \Omega^0 \cup \Omega^\mu$, то $\mu = m$,*

(iii) *если гауссова кривизна $K(p)$ равна 0 при некотором $p \in \mathbb{S}^m$, то $\Omega(f) = \Omega^0$.*

Доказательство. Так как f — вложение, можно выбрать поле внутренних нормалей ξ для f. Определим $\nu^+_p(f), \nu^-_p(f)$, как в доказательстве теоремы 2 для $p \in \mathbb{S}^m$.

(i) Пусть $q \in \mathbb{S}^m$. Возьмем $s < 0$, тогда $f_{s\xi}(q) \in \nu^-_q(f)$. Положим $x = f_{s\xi}(q)$ и определим функцию расстояния $L_x : \mathbb{S}^m \to \mathbb{R}$ равенством $L_x(p) = \|x - f(p)\|^2$. Поскольку есть лишь конечный набор фокальных точек в $\nu^+_q(f) \cup \nu^-_q(f)$, можно считать q невырожденной критической точкой L_x. Так как по предположению $f(\mathbb{S}^m)$ выпукло, $f(\mathbb{S}^m)$ содержится в замкнутом полупространстве H^+_q. Поэтому L_x достигает абсолютного минимума в точке q. В противном случае должна существовать точка $p_0 \in \mathbb{S}^m$ такая, что $\|x - f(p_0)\| < |s|$, а это противоречит выпуклости $f(\mathbb{S}^m)$. По теореме Морса об индексе, см. [7, с. 37], L_x достигает минимума в q тогда и только тогда, когда нет фокальных точек f с основой q между $f(q)$ и x на $\nu_q^-(f)$. Следовательно, нет фокальных точек между $f(q)$ и $x = f_{s\xi}(q)$ на $\nu_q^-(f)$, и это выполнено для всех $s < 0$. Поэтому для любого $t < 0$ точка $f_{t\xi}(q)$ не является фокальной для f с основой q для любого $q \in M$ и тем самым $f_{t\xi}$ — погружение с индексом 0 для любого $t < 0$. Тогда $(-\infty, 0] \subset \Omega^0$ и Ω^0 неограниченное снизу. Пусть q' — точка максимума L_x. Известно, что нет фокальных точек на $\nu_{q'}^-(f)$, так что все фокальные точки с основой q' лежат на $\nu_{q'}^+(f)$ с суммой кратностей m по теореме Морса об индексе, см. [7, с. 37]. Положим теперь

$$a_{q'} = \min\{t > 0 : f(q') + t\xi(q') \text{ — фокальная точка для } q' \in \mathbb{S}^m\}.$$

Тогда Ω^0 ограничено сверху величиной $a_{q'}$, откуда Ω^0 имеет вид $\Omega^0 = (-\infty, a)$ при некотором $0 < a \le a_{q'}$, так как оно связное открытое множество, включающее 0.

(ii) Пусть $f(\mathbb{S}^m)$ выпукло, $m \ge 2$ и $\Omega(f) = \Omega^0 \cup \Omega^\mu$. Предположим, что $\mu < m$. Пусть $s \in \Omega^\mu$ и $p \in \mathbb{S}^m$ — точка минимума $\widehat{H}_z$, где $\widehat{H}_z : \mathbb{S}^m \to \mathbb{R}$ — невырожденная функция высоты для $f_{s\xi}$, определенная равенством $\widehat{H}_z(q) = \langle z, f_{s\xi}(q)\rangle$ при $z \in \mathbb{S}^m$. Тогда по лемме 1(iii) все фокальные точки в $\nu_p^+(f) \cup \nu_p^-(f)$ лежат по одну сторону от $f_{s\xi}(p)$ с суммой кратностей m. Но, как известно, существуют фокальные точки с суммой кратностей μ между $f(p)$ и $f_{s\xi}(p)$ на нормали, проходящей через $f(p)$. Тем самым есть фокальные точки на $\nu_p^-(f)$ и $\nu_p^+(f)$ кратностей $(m - \mu)$ и μ соответственно. Это противоречит выпуклости $f(M)$ по теореме 3(i). Итак, $\mu = m$.

(iii) Пусть $f(\mathbb{S}^m)$ выпукло и $K(p) = 0$ для некоторой точки $p \in \mathbb{S}^m$. Тогда сумма кратностей фокальных точек f с основой p равна $\mu < m$ по лемме 1(ii). Это говорит о том, что не может быть $s \in \Omega(f)$ такой, что $f_{s\xi}$ — погружение с индексом m. Принимая во внимание утверждения (i), (ii) из теоремы 3, получаем $\Omega(f) = \Omega^0 = (-\infty, a)$ с некоторым $a > 0$. □

2. Классификация пространства параллельных погружений m-сфер $\mathbb{S}^m$

Сначала отметим следующий факт.

Теорема 4. *Пусть $f : M^m \to \mathbb{R}^{m+1}$ — погружение такое, что $\Omega(f) = \Omega^0 \cup \Omega^\mu$. Тогда существует непрерывное поле касательных μ-плоскостей на M.*

Доказательство. Пусть ξ — поле единичных нормалей на M и $s \in \Omega^\mu$. Тогда найдется фокальная точка вида $f(p) + \frac{1}{\lambda_i}\xi(p)$, $1 \le i \le \mu$, на отрезке между $f(p)$ и $f_{s\xi}(p)$ с суммой кратностей μ для любого $p \in M$, где λ_i — собственное значение оператора формы $A_{\xi(p)} : T_pM \to T_pM$ для любого $1 \le i \le \mu$. Так как $A_{\xi(p)}$ определяется симметрической $m \times m$-матрицей, его собственные векторы, соответствующие собственным значениям λ_i, $1 \le i \le \mu$, порождают μ-мерное подпространство в T_pM. Тогда μ-мерное подпространство порождает μ-мерную касательную плоскость к f в $p \in M$. Поскольку каждое λ_i непрерывно, эти касательные μ-плоскости меняются непрерывно на M. □

Пусть $m \ge 1$ целое и l — наибольшая степень 2, делящая $m + 1$, так что с некоторым целым r можно записать

$$m + 1 = 2^l(2r + 1).$$

Отметим следующий результат из [8].

Лемма 2. *Если m, l таковы, как в предыдущем равенстве, и если $2^l \le q \le m - 2^l$, то $\mathbb{S}^m$ не обладает непрерывным полем касательных q-плоскостей.*

Используя этот результат, мы можем полностью классифицировать пространство параллельных погружений четномерных сфер, погруженных в $\mathbb{R}^{m+1}$.

Теорема 5. *Пусть $f : \mathbb{S}^m \to \mathbb{R}^{m+1}$ — погружение с четным m. Если $\Omega(f) = \Omega^0 \cup \Omega^\mu$, то $\mu = m$.*

Доказательство. Так как m четно, имеем $m + 1 = 2^0\big(2\big(\frac{m}{2}\big) + 1\big)$. По лемме 2 $\mathbb{S}^m$ не допускает непрерывного поля касательных μ-плоскостей для $1 \le l \le m-1$. Тогда остается единственная возможность, когда μ можно взять равным m. □

Теорема 3.6(ii) из [2] приводит к следующему результату.

Лемма 3. *Пусть $f : M^m \to R^{m+1}$ — погружение компактного ориентируемого многообразия M такое, что $\Omega(f) = \Omega^0 \cup \Omega^\mu$. Тогда если $m + \mu$ нечетно и $\mu \ge \frac{1}{2}(m+2)$, то $\sum\limits_{\lambda=0}^{m-\mu}(-1)^\lambda R_\lambda(M) = 0$ и $R_{m-\mu+1}(M) = \cdots = R_{\mu-1}(M) = 0$.*

Теорема 6. *Пусть $f : \mathbb{S}^m \to \mathbb{R}^{m+1}$ — погружение с нечетным m. Если $\Omega(f) = \Omega^0 \cup \Omega^\mu$ и $m = 4l+1$ для некоторого целого l, то либо $\mu = 1$, либо $\mu = m$.*

Доказательство. Так как $m = 4l+1$, имеем $m+1 = 4l+2 = 2(2l+1)$. По лемме 2 $\mathbb{S}^m$ не допускает непрерывного поля касательных μ-плоскостей при $2 \le \mu \le m-2$. Тогда для значений μ имеется только три возможности: $1, m-1, m$. Но мы знаем согласно лемме 3, что для любого $m > 3$ не существует погружения $f : \mathbb{S}^m \to \mathbb{R}^{m+1}$, для которого $\Omega(f) = \Omega^0 \cup \Omega^{m-1}$. Поэтому либо $\mu = 1$, либо $\mu = m$. □

Теорема 7. *Пусть $f : \mathbb{S}^m \to \mathbb{R}^{m+1}$ — погружение с нечетным m. Если $m = 2l+1$ для некоторого целого l, то $\Omega(f)$ не может иметь компоненты с индексом μ, для которого $\mu \ge l+2$ и μ четно.*

Доказательство. Результат снова вытекает из леммы 3. □

Пусть $f : \mathbb{S}^m \to \mathbb{R}^{m+1}$ — погружение с нечетным m и $1 \le m \le 29$, и пусть $\Omega(f) = \Omega^0 \cup \Omega^\mu$. Тогда для μ' возможны следующие значения:

m	μ
1	1
3	1, 2, 3
5	1, 5
7	1, 2, 3, 4, 5, 7
9	1, 9
11	1, 2, 3, 9, 11
13	1, 13
15	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 15

m	μ
17	1, 17
19	1, 2, 3, 17, 19
21	1, 21
23	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 17, 19, 21, 23
25	1, 25
27	1, 2, 3, 23, 25, 27
29	1, 29

Трудно привести пример погружения $f : \mathbb{S}^{2m+1} \to \mathbb{R}^{2m+2}$ такого, что $\Omega(f) = \Omega^0 \cup \Omega^\mu$, где $1 \leq \mu \leq 2m$. Если такая компонента есть, то мы получаем следующий результат.

Теорема 8. *Пусть $f : \mathbb{S}^{2m+1} \to \mathbb{R}^{2m+2}$ — погружение. Допустим, что $\Omega(f) = \Omega^0 \cup \Omega^\mu$ с $1 \leq \mu \leq 2m$. Тогда невырожденные функции высоты или расстояния для f имеют по крайней мере*

(i) 4 *критические точки, если $\mu = m$ или $\mu = m+1$,*

(ii) 6 *критических точек, если $\mu \neq m$ или $\mu \neq m+1$.*

Доказательство. Мы докажем теорему только для функций высоты, для функций расстояния доказательство проводится аналогично. Итак, пусть H_z — невырожденная функция высоты для f при некоторой $z \in \mathbb{S}^{2m+1}$, и пусть $s \in \Omega^\mu$. Тогда $f_{s\xi}$ — погружение с индексом μ для некоторого поля единичных нормалей ξ для f. Определим функцию высоты $\widehat{H}_z$ для $f_{s\xi}$ равенством $\widehat{H}_z = \langle z, f_{s\xi}\rangle$.

(i) Можно считать $s > 0$ согласно замечанию 2. Сравнивая индексы критических точек функций высоты H_z и $\widehat{H}_z$, как в [2] (см. [6] для функции расстояния), выводим, что должны существовать критические точки H_z с индексами $0, \mu, (2m+1-\mu)$ и $(2m+1)$. Тем самым получаем по крайней мере четыре критические точки.

(ii) Допустим теперь, что $\mu \neq m$ и $\mu \neq m+1$. Тогда либо $\mu < m$, либо $\mu > m+1$. Не уменьшая общности, можно считать $\mu < m$. Пусть C_λ — число критических точек H_z с индексом λ. Если $C_0 = C_\mu = C_{2m+1-\mu} = C_{2m+1} = 1$ и нет иных критических точек другого индекса, то $C_{\mu+1} = 0$ при $\mu \neq m$. Согласно неравенствам Морса [6, с. 30] имеем

$$R_\mu(M) - R_{\mu-1}(M) + \dots + (-1)^\mu R_0(M) = C_\mu - C_{\mu-1} + \dots + (-1)^\mu C_0,$$

откуда $(-1)^\mu = 1 + (-1)^\mu$. Тем самым должна быть по крайней мере еще одна критическая точка для некоторого индекса. Но, рассматривая также $\chi(M) = 0$, мы должны получить другую критическую точку для обращения в нуль эйлеровой характеристики. Итак, имеем по крайней мере шесть критических точек для любой невырожденной функции высоты H_z. $\square$

Замечание 3. Пусть $f : \mathbb{S}^m \to \mathbb{R}^{m+1}$ — погружение и $0 < \mu < m$. Тогда не существует параллельного f погружения с индексом μ, где m четно. Если же m нечетно, то имеется лишь несколько возможностей, которые (если они есть) должны реализоваться, когда $f(\mathbb{S}^m)$ невыпуклое. Это утверждение и предыдущая теорема позволяют высказать следующее предположение: если $f : M^m \to \mathbb{R}^{m+1}$ — погружение компактного многообразия M и $R_\mu(M) = 0$, то не существует параллельного f погружения с индексом μ, где $0 < \mu < m$.

Принимая во внимание предыдущее замечание, мы можем доказать следующий частный результат.

Теорема 9. *Пусть $f : M^m \to \mathbb{R}^{m+1}$ — погружение компактного связного m-мерного многообразия с $m \geq 2$ такого, что $R_\lambda(M) \neq 0$ при некотором $0 < \lambda < m$. Если $\Omega(f) = \Omega^0 \cup \Omega^\mu$, то $\mu \leq \max\{\lambda, m-\lambda\}$.*

Доказательство. Поскольку $R_\lambda(M) \neq 0$, где $\lambda \neq 0, m$, любая невырожденная функция высоты H_z для некоторого $z \in \mathbb{S}^m$ имеет критические точки с индексом λ. Пусть p — критическая точка невырожденной функции высоты H_z с индексом λ. Тогда $z = \pm\xi(p)$, где ξ — поле единичных нормалей к f. Возьмем $\nu_p^+(f)$, $\nu_p^-(f)$, как в теореме 2. По лемме 1(ii) сумма кратностей фокальных точек с основой p на $\nu_p^+(f) \cup \nu_p^-(f)$ равна m. Значит, по лемме 1(iii) существуют фокальные точки f с основой p на $\nu_p^+(f)$, $\nu_p^-(f)$ с суммой кратностей $(m-\lambda)$, λ, если $z = \xi(p)$, и λ, $(m-\lambda)$, если $z = -\xi(p)$, соответственно. Отсюда $\mu \leq \lambda$ или $\mu \leq (m-\lambda)$. Итак, $\mu \leq \max\{\lambda, m-\lambda\}$. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Smyth B.* Efimov's inequality and other inequalities in a sphere // Geometry and topology of submanifolds IV. Eds. F. Dillen and L. Verstraelen. Singapore: World Sci, 1992. P. 76–86.

2. *Carter S., Şentürk Z.* The space of immersions parallel to a given immersion // J. London Math. Soc. 1994. V. 50, N 2. P. 404–416.

3. *Carter S., Şentürk Z., West A.* The push-out space of a submanifold // Geometry and topology of submanifolds VI. Eds. F. Dillen, I. Van de Woestijne, and L. Verstraelen Singapore: World Sci. 1994. P. 50–57.

4. *Carter S., Şentürk Z.* On the index of parallel immersion // Geometry and topology of submanifolds VI. Eds. F. Dillen, I. Van de Woestijne, and L. Verstraelen. Singapore: World Sci., 1994. P. 43–49.

5. *Cecil T. E., Ryan P. J.* Tight and taut immersions of manifolds. London: Pitman, 1985.

6. *Carter S., Kaya Y.* Immersions with a parallel normal field // Beiträge zur Algebra und Geometrie. Contrubutions to algebra and geometry. 2000. V. 41, N 2. P. 359–370.

7. *Milnor J.* Morse theory. Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 1973.

8. *Steenrod N.* The topology of fibre bundles. Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 1951.

Статья поступила 15 сентября 2004 г.

Yusuf Kaya (Юсуф Кая)
Zonguldak Karaelmas Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi,
Matematik Bölümü, ZONGULDAK / TÜRKİYE
yusuf_kaya@hotmail.com