Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2006. Том 47, № 3

УДК 512.542

ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ ЗНАКОПЕРЕМЕННЫХ ГРУПП С ПОМОЩЬЮ МНОЖЕСТВА ПОРЯДКОВ ИХ МАКСИМАЛЬНЫХ АБЕЛЕВЫХ ПОДГРУПП

Г. Чэнь

Аннотация: Доказано, что знакопеременные группы, граф простых чисел которых распадается на три компоненты связности, с точностью до изоморфизма определяются множеством порядков их максимальных абелевых подгрупп.

Ключевые слова: абелева группа, знакопеременная группа, граф простых чисел.

Впервые вопрос о том, как порядки максимальных абелевых подгрупп влияют на структуру группы, изучался в [1]. Было доказано, что однозначно определяются множеством порядков их максимальных абелевых подгрупп следующие простые группы: k_3-группы, A_n, $n \leq 10$, группы Матье и Янко, $PSL(2, 2^n)$, $Sz(2^{2m+1})$.

Здесь мы докажем, что знакопеременные группы A_p с простыми p и $p-2$ могут быть однозначно определены по множеству порядков их максимальных абелевых подгрупп, и укажем подмножества множества порядков их максимальных абелевых подгрупп, которые также могут определять эти группы.

Определения и обозначения. Символом $\Gamma(G)$ мы обозначаем граф простых чисел группы G, $t(\Gamma(G))$ — число его компонент, π_i, $1 \leq i \leq t(\Gamma(G))$, — множество вершин. Если порядок G четный, то π_1 всегда означает компоненту графа простых чисел группы G, содержащую 2. Через $\pi_e(G)$ обозначаем множество порядков элементов G, $\pi(G)$ — множество простых делителей $|G|$, $M(G) = \{n = |N| \mid N$ — максимальная абелева подгруппа в $G\}$. Пусть p простое, a целое. Символ $p^n \| a$ означает, что $p^n \mid a$ и $p^{n+1} \nmid a$. Пусть m, n — положительные числа, тогда $(m,\ n)$ — наибольший общий делитель m и n.

Предположим, что $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_t$ — все компоненты графа простых чисел G. Тогда $|G| = m_1 m_2 \dots m_t$, где $\pi(m_i) = \pi_i$, $i = 1, 2, \dots, t$. Назовем $m_1, m_2, \dots, m_t$ *порядковыми компонентами* G (см. [2]). С использованием классификационной теоремы для простых конечных групп и [3, 4] составлен список порядковых компонент конечных простых групп с несвязным графом простых чисел [2, табл. 1–4].

Лемма 1. *Если G — конечная простая группа с более чем одной компонентой графа простых чисел, то выполнено одно из следующих условий:*

(a) *G фробениусова или 2-фробениусова и граф простых чисел G имеет в точности две компоненты;*

This work is supported by NSFC (N 10171074), NSF of Chongqing (CSTC: 2005BB8096) Sino-Russian Exchange Project of Natural Science.

(b) *в G есть нормальный ряд $H \trianglelefteq K \trianglelefteq G$ такой, что H и G/K являются π_1-группами и K/H простая, где π_1 — компонента графа простых чисел, содержащая 2, H — нильпотентная группа и $|G/K| \mid |\operatorname{Aut}(K/H)|$; кроме того, каждая нечетная порядковая компонента G будет также порядковой компонентой K/H.*

Доказательство. Результат леммы получается из определения порядковой компоненты, теоремы A и леммы 3 в [4].

Из определения $M(G)$ легко вытекает следующая

Лемма 2. *Пусть G и M таковы, что $M(G) = M(M)$. Тогда G и M имеют одинаковые графы простых чисел.*

Лемма 3. *Пусть G и M таковы, что $M(G) = M(M)$. Если граф простых чисел M имеет изолированные точки и силовская подгруппа, соответствующая этим простым числам, простого порядка, то множество нечетных порядковых компонент K/H в лемме 1 является подмножеством порядковых компонент группы G.*

Доказательство. По леммам 1, 2 порядковая компонента графа простых чисел K/H, не содержащая 2, является таковой в M. В предположении выполнения условий леммы пусть в графе простых чисел группы M есть изолированная точка p и p-силовская подгруппа M имеет порядок p. Тогда нечетная порядковая компонента K/H должна быть степени p, что совпадает с порядком силовской подгруппы. Если порядок соответствующей силовской подгруппы K/H отличен от p, то она содержит абелеву подгруппу порядка p^2, но максимальная абелева p-подгруппа группы G имеет порядок, равный p.

Лемма 4. *A_n с $n > 8$ имеет единственное точное 2-модулярное представление наименьшей степени. Эта степень равна $n-1$ или $n-2$ в зависимости от четности n. Это представление реализуемо над $GF(2)$ (см. [5]).*

Лемма 5. *Если $p > 2$, то A_n с $n > 6$ имеет два точных p-модулярных представления наименьшей степени или одно такое представление. Эта степень равна $n-1$ или $n-2$ в случаях $p \nmid n$ или $p \mid n$ соответственно. Это представление реализуемо над $GF(p)$ (см. [6]).*

Теорема 1. *Пусть G — конечная группа, M — знакопеременная группа A_p, где p и $p-2$ простые. Если $M(G) = M(M)$, то $G \cong M$.*

Доказательство. По лемме 2 у G и M одинаковые компоненты графа простых чисел. Так как M имеет в точности три порядковые компоненты, в G есть нормальный ряд $1 \trianglelefteq H \trianglelefteq K \trianglelefteq G$ такой, что K/H — простая группа с двумя нечетными порядковыми компонентами, совпадающими с таковыми в A_p, т. е. p и $p-2$. Поскольку две нечетные порядковые компоненты A_p с p и $p-2$ простыми имеют разность 2, согласно таблице порядковых компонент из [2] замечаем, что K/H могут быть такими: $A_2(4)$, ${}^2E_6(2)$, J_3, Suz и $A_{p'}$, где p' и $p'-2$ простые.

Если $K/H = A_2(4)$, то $p = 7$, $M = A_7$ и $|G/K| \mid 2$. Так как $M(M) = \{4, 12, 5, 7\}$, порядок центра силовских подгрупп H делит 3 или 4. Но эти центры нормальны в G, тем самым произведение их порядков без 1 должно делиться на произведение нечетных порядковых компонент, т. е. 35; противоречие.

Если $K/H ={}^2 E_6(2)$, то $p = 19$, $p = 17$. На этот раз A_{19} имеет подгруппы порядка 55 и 5×13, а K/H нет. Поэтому подгруппы порядка 55 и 5×13 должны содержаться в K. Отсюда $5 \mid |H|$. Однако A_{19} имеет максимальную абелеву подгруппу порядка $5^3 \times 4$, значит, $Z(H)$ порядка 5, 5^2 или 5^3. Очевидно, что

$Z(H)$ нормальна в G, тем самым $17 \times 19 \mid |Z(G)| - 1$; противоречие. Отсюда $H = 1$ и ${}^2E_6(2) \trianglelefteq G \trianglelefteq \mathrm{Aut}({}^2E_6(2))$. Так как M имеет абелеву подгруппу порядка 13×5, то G должна обладать абелевой подгруппой того же порядка, т. е. 13×5. Следовательно, RK/K порядка 5, откуда $5 \mid |\operatorname{Out}(K)|$; противоречие с тем, что $|\operatorname{Out}(K)| = 6$.

Если $K/H = J_3$, то $p = 19$. Так как $5 \mid |J_3|$, то $5 \mid |H|$. Максимальная абелева подгруппа в A_{19} имеет порядок 25, поэтому порядок центра W 5-силовской подгруппы H имеет порядок ≤ 25. Но $W \trianglelefteq G$, откуда $17 \times 19 \mid |W| - 1$; противоречие.

Если $K/H = Suz$, то $p = 13$, $M = A_{13}$. Если $3 \mid |H|$, то порядок 3-силовской подгруппы равен 3^i, где $i = 1, 2, \dots, 5$. Пусть S_3 — силовская 3-подгруппа. Поскольку нечетные порядковые компоненты G суть 11 и 13, то 11×13 делит $|S_3| - 1$, что невозможно. Тем самым $3 \mid |H|$. Таким образом, все 3-подгруппы изоморфны таковым в K/H. Отметим, что $K/H = Suz$ имеет абелеву подгруппу порядка 3^5, тем самым G имеет подгруппу того же порядка. Но в $M = A_{13}$ нет подгруппы порядка 3^5; противоречие.

Мы доказали, что $K/H = A'_p$, где p' и $p' - 2$ простые, и легко видеть, что $K/H = A_p$. Если $H \neq 1$ и S_r — силовская подгруппа в H, то $Z(S_r) \trianglelefteq G$. Предположим, что K действует на $Z(S_r)$. Имеем, что K/H действует точно на $Z(S_r)$, ибо $C_K(Z(S_r)) = H$. По леммам 4 и 5 это означает, что $|Z(S_r)| \geq p - 1$. Так как $M(M) = M(G)$, то $|Z(S_r)| = p$ для $p > 7$, откуда K/H циклическая; противоречие. Поэтому $H = 1$, $A_p \leq G \leq S_p$. Ввиду того, что A_p обладает абелевой подгруппой порядка $2(p-2)$, а A_p не обладает, находим, что $G = A_p$. Для $p = 5$ или $p = 7$ ввиду [1] приходим к тому, что $G = M$.

Благодарности. Автор признателен профессору В. Д. Мазурову за поддержку и советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Linhong Wang.* Characterization of some simple groups by the set of the orders of their Abelian subgroups. Thesis for Master Degree. Southwest China Normal University, China, 2000
2. *Guiyun Chen.* A new characterization of sporadic simple groups // Algebra Colloq. 1996. V. 3, N 1. P. 49–58.
3. *Кондратьев А. С.* О компонентах графа простых чисел конечных простых групп // Мат. сб. 1989. Т. 180, № 6. С. 787–797.
4. *Williams J. S.* Prime graph components of finite groups // J. Algebra. 1981. V. 69, N 2. P. 487–513.
5. *Wagner A.* The faithful linear representations of least degree of S_n and A_n over a field of odd characteristic // Math. Z. 1977. Bd 154. S. 103–114.
6. *Wagner A.* The faithful linear representations of least degree of S_n and A_n over a field of characteristic 2 // Math. Z. 1976. Bd 151. S. 127–137.

Статья поступила 19 сентября 2004 г.

Guiyun Chen (Гуйюнь Чэнь)
Department of Mathematics,
Southwest University, 400715,
Chongqing, P. R. China
gychen@swu.edu.cn