Сибирский математический журнал
Июль—август, 2006. Том 47, № 4

УДК 517.9

О РЕДУКЦИИ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ К УРАВНЕНИЯМ С МЕНЬШИМ ЧИСЛОМ ПЕРЕМЕННЫХ И ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ

Ю. В. Засорин

Аннотация: Устанавливается связь между фундаментальными решениями некоторых классов линейных нестационарных уравнений в частных производных с фундаментальными решениями также нестационарных уравнений, но с меньшим числом переменных. В частности, метод редукции позволяет получать точные формулы фундаментальных решений некоторых пространственных нестационарных уравнений математической физики (например, Кадомцева — Петвиашвили, Кельвина — Фойгта и др.) с помощью известных фундаментальных решений одномерных стационарных уравнений.

Ключевые слова: фундаментальное решение Коши, вязкое трансзвуковое уравнение, уравнение Кадомцева — Петвиашвили, уравнение Кельвина — Фойгта, уравнение Кортевега — де Фриза.

Введение

Повышенный интерес к появившимся сравнительно недавно нестационарным уравнениям математической физики высоких порядков (особенно с невыделенными производными по времени) привел к, несомненно, огромному прогрессу в качественной теории этих уравнений (см., например, [1]). С другой стороны, изучение структуры решений этих моделей (линейных и нелинейных) в пространственном случае значительно отстает от одномерных моделей (см., например, [2, 3]). Одна из причин этого — наличие гораздо большего числа точных решений одномерных уравнений по сравнению с трехмерными (см. [1–3]). В частности, хорошим инструментом для исследования структуры решений трехмерных уравнений могли бы служить явные формулы фундаментальных решений, однако, за редким исключением (см., например, [1, 4, 5]), такие формулы пока еще отсутствуют.

В данной статье предлагается метод, позволяющий с помощью известных фундаментальных решений для нестационарных операторов с малым числом пространственных переменных (в частности, одномерных) получать явные формулы для некоторых достаточно широких классов операторов с бóльшим числом пространственных переменных (в частности, трехмерных). Как частный случай этот метод позволяет построить фундаментальные решения нестационарного вязкого трансзвукового уравнения, пространственного уравнения Кадомцева — Петвиашвили, большого числа пространственных модификаций уравнений Кельвина — Фойгта и некоторых других известных нестационарных уравнений с невыделенной производной по времени.

© 2006 Засорин Ю. В.

§ 1. Фундаментальные решения Коши для уравнений с невыделенной временно́й производной

Введем обозначения. Символы $x = (x_1, \dots, x_n)$, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ означают векторы евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$. Пусть $D_x = (D_1, \dots, D_n)$, $D_j = \partial/\partial x_j$, $j = 1, \dots, n$. Через $\mathbb{R}^{n+1}_+$ будем обозначать верхнее полупространство векторов $(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1}$ таких, что $t > 0$, а через Ω_ε — область в $\mathbb{R}^{n+1}_+$ всех точек (t, x) таких, что $t > \varepsilon > 0$. Как обычно, $S'(\mathbb{R}^m)$, $m \geq n$, будет обозначать пространство Шварца распределений умеренного роста, а $\overset{\circ}{S}{}'(\overline{\mathbb{R}}^{n+1}_+)$ — подпространство (см. [6]) всех распределений $T \in S'(\mathbb{R}^{n+1})$ таких, что $\operatorname{supp}(T) \subset \overline{\mathbb{R}}^{n+1}_+$. Как всегда, через $P(D_x)$ обозначаются дифференциальные полиномы с постоянными вещественными коэффициентами.

Рассмотрим нестационарный оператор

$$L = L\left(\frac{\partial}{\partial t}, D_x\right) \equiv P_1(D_x)\frac{\partial}{\partial t} + P_2(D_x). \tag{1}$$

Для простоты будем полагать, что

$$\operatorname{Re}(P_1(-i\xi)P_2(i\xi)) \geq 0. \tag{2}$$

Введем понятие фундаментального решения Коши для оператора L.

Определение. Распределение $E(t, x) \in \overset{\circ}{S}{}'(\overline{\mathbb{R}}^{n+1}_+)$ будем называть *фундаментальным решением Коши для оператора* L, если

$$LE(t, x) = 0, \quad (t, x) \in \mathbb{R}^{n+1}_+, \tag{3}$$

$$(P_1(D_x)E)|_{t=+0} = \delta(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{4}$$

где $\delta \in S'(\mathbb{R}^n)$ означает дельта-функцию Дирака.

Замечание 1. Термин «фундаментальное решение Коши» для операторов вида (1) (т. е. с невыделенной временно́й производной) не является устоявшимся (см., например, [1]), однако он уже вводился ранее, по крайней мере для нестационарного вязкого трансзвукового уравнения (см. [4]). Следующее утверждение показывает, что фундаментальное решение Коши, определяемое равенствами (3), (4), является и вполне «полноценным» фундаментальным решением в обычном смысле.

Теорема 1. *Фундаментальное решение Коши* $E \in \overset{\circ}{S}{}'(\overline{\mathbb{R}}^{n+1}_+)$, *определенное равенствами* (3), (4), *удовлетворяет уравнению*

$$LE(t, x) = \delta(t) \otimes \delta(x). \tag{5}$$

Доказательство. Не ограничивая общности, будем считать $E(t, x)$ регулярным распределением. Фиксируя произвольную пробную функцию $\varphi(t, x) \in S(\mathbb{R}^{n+1})$, имеем

$$\begin{aligned} \langle LE; \varphi \rangle &\overset{\text{def}}{=} \left\langle E; L\left(-\frac{\partial}{\partial t}, -D_x\right)\varphi \right\rangle \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\Omega_\varepsilon} E(t, x) L\left(-\frac{\partial}{\partial t}, -D_x\right)\varphi(t, x)\, dt dx = \lim_{\varepsilon \to 0}\{I_1(\varepsilon) + I_2(\varepsilon)\}, \end{aligned}$$

$$I_1(\varepsilon) = \int\limits_{\Omega_\varepsilon} LE \cdot \varphi\, dt dx, \quad I_2(\varepsilon) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} P_1(D_x)E(\varepsilon, x)\varphi(\varepsilon, x)\, dx.$$

В силу равенства (3) $I_1(\varepsilon) = 0$, а ввиду (4) $I_2(\varepsilon) \to \varphi(0, 0)$, $\varepsilon \to 0$, что и доказывает равенство (5), а вместе с ним — и теорему.

§ 2. Конструкция фундаментальных решений Коши для большего числа пространственных переменных

Пусть $y = (y_1, y_2)$, $\eta = (\eta_1, \eta_2)$ — векторы пространства $\mathbb{R}^2$, а $r = |y|$, $\rho = |\eta|$ — их евклидовы длины; $\mathbb{R}^{n+2} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}^n,\, y \in \mathbb{R}^2\}$, $\mathbb{R}^{n+3} = R \times \mathbb{R}^{n+2} = \{(t, x, y) : t \in R, x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^2\}$, $\mathbb{R}^{n+3}_+ = \{(t, x, y) \in \mathbb{R}^{n+3} : t > 0\}$. Пусть, далее, $D = (D_x, D_y)$, $D_y = (\partial/\partial y_1, \partial/\partial y_2)$, а $\Delta = D_y \cdot D_y$ — двумерный оператор Лапласа по переменным $y \in \mathbb{R}^2$. Подпространство $\overset{\circ}{S}{}'\big(\overline{\mathbb{R}}^{n+3}_+\big) \subset S'(\mathbb{R}^{n+3})$ определим аналогично подпространству $\overset{\circ}{S}{}'\big(\overline{\mathbb{R}}^{n+1}_+\big)$ из предыдущего параграфа.

В пространствах $\overset{\circ}{S}{}'\big(\overline{\mathbb{R}}^{n+1}_+\big)$ и $\overset{\circ}{S}{}'\big(\overline{\mathbb{R}}^{n+3}_+\big)$ соответственно рассмотрим следующие операторы:

$$L^{(0)} = L^{(0)}\left(\frac{\partial}{\partial t}, D_x\right) \equiv \frac{\partial}{\partial t} + P(D_x), \quad \operatorname{Re}(P(i\xi)) \geq 0, \tag{6}$$

$$L^{(1)} = L^{(1)}\left(\frac{\partial}{\partial t}, D\right) \equiv P_1(D_x)\left(\frac{\partial}{\partial t} + P_2(D_x)\right) - \Delta, \tag{7}$$

$$P_j(D_x) = a_j + b_j D_x + c_j P(D_x), \quad j = 1, 2, \tag{8}$$

$$a_j, c_j \geq 0, \quad b_j \in \mathbb{R}^n, \quad a_1 + a_2 + c_1 + c_2 + |b_1| + |b_2| > 0. \tag{9}$$

Теорема 2. *Пусть* $E^{(0)}(t, x) \in \overset{\circ}{S}{}'\big(\overline{\mathbb{R}}^{n+1}_+\big)$ *— фундаментальное решение Коши оператора* $L^{(0)}$, *определенного равенством* (6). *Тогда оператор* $L^{(1)}$, *определенный равенствами* (7)–(9), *также имеет фундаментальное решение Коши* $E^{(1)}(t, x, y) \in \overset{\circ}{S}{}'\big(\overline{\mathbb{R}}^{n+3}_+\big)$, *причем*

$$E^{(1)}(t, x, y) = (4\pi t)^{-1} \exp(-\omega_1) E^{(0)}(\omega_2, z), \tag{10}$$

$$\omega_1 = a_2 t + \frac{a_1}{4t} r^2, \quad \omega_2 = c_2 t + \frac{c_1}{4t} r^2, \quad z = x - b_2 t - \frac{b_1}{4t} r^2, \quad r = \sqrt{y_1^2 + y_2^2}. \tag{11}$$

Замечание 2. Формулировка теоремы 2 корректна, поскольку ограничение (6) на символ $P(i\xi)$ (являющееся частным случаем ограничения (2)) обеспечивает существование фундаментального решения Коши $E^{(0)}$; при этом в силу (6)

$$E^{(0)}(t, x) = (2\pi)^{-n} \theta(t) \int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp(ix \cdot \xi - P(i\xi) t)\, d\xi, \tag{12}$$

где $\theta(\cdot)$ — функция Хевисайда.

Замечание 3. Точно так же ограничения (9) обеспечивают существование фундаментального решения Коши $E^{(1)}$, которое определяется аналогично фундаментальным решениям E из предыдущего параграфа (т. е. равенствами, аналогичными (3) и (4)).

Доказательство теоремы 2. Применим к распределению $E^{(1)}(t, x, y)$ прямое преобразование Фурье по пространственным переменным $(x, y) \in \mathbb{R}^{n+2}$. Обозначая через $\widehat{E}^{(1)}(t, \xi, \eta)$ Фурье-образ $E^{(1)}$, получим (см. замечание 3), что

$$\begin{gathered} \left[P_1(i\xi)\left(\frac{\partial}{\partial t} + P_2(i\xi) + \rho^2\right)\right] \widehat{E}^{(1)}(t, \xi, \eta) = 0, \quad t > 0; \\ P_1(i\xi) \widehat{E}^{(1)}|_{t=+0} = 1(\xi, \eta), \quad (\xi, \eta) \in \mathbb{R}^{n+2}. \end{gathered} \tag{13}$$

Решая задачу Коши (13), находим

$$\widehat{E}^{(1)}(t,\xi,\eta) = \theta(t)(P_1(i\xi))^{-1}\exp[-(P_2(i\xi)+\rho^2/P_1(i\xi))t]. \tag{14}$$

Восстановим распределение $E^{(1)}$ равенством

$$E^{(1)}(t,x,y) = (2\pi)^{-n-2}\int\limits_{\mathbb{R}^{n+2}} \exp(ix\cdot\xi + iy\cdot\eta)\widehat{E}^{(1)}(t,\xi,\eta)\,d\xi d\eta. \tag{15}$$

Заметим, что интеграл (15) может иметь (в силу равенства (14)) несуммируемую особенность на гиперплоскости $\{\xi = 0\}$. Обойдем эту трудность путем выбора подходящей регуляризации интеграла (15), например сведением его к повторному:

$$E^{(1)}(t,x,y) = (2\pi)^{-n}\theta(t)\int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp(ix\cdot\xi - P_2(i\xi)t)\,d\xi\cdot\widehat{I}_1(t,y,\xi), \tag{16}$$

$$\widehat{I}_1(t,y,\xi) = (2\pi)^{-2}(P_1(i\xi))^{-1}\int\limits_{\mathbb{R}^2}\exp(iy\cdot\eta - \rho^2 t/P_1(i\xi))\,d\eta$$

$$= (2\pi)^{-2}(P_1(i\xi))^{-1}\widehat{I}_2(t,y,\xi). \tag{17}$$

В интеграле $\widehat{I}_2$ перейдем к полярным переменным интегрирования (ρ,ψ), где $\rho = |\eta|$, а ψ — угол между векторами y и η:

$$\widehat{I}_2(t,y,\xi) = \int\limits_0^{+\infty}\exp(-\rho^2 t/P_1(i\xi))\rho\,d\rho\cdot\widehat{I}_3(t,y), \tag{18}$$

$$\widehat{I}_3(t,y) = \int\limits_0^{2\pi}\exp(ir\rho\cos\psi)\,d\psi.$$

Интеграл $\widehat{I}_3$ вычисляется непосредственно (см. [7, с. 92, формула (7.12.2)]) и равен

$$\widehat{I}_3(t,y) = 2\pi J_0(r\rho), \tag{19}$$

где $J_0(\cdot)$ — функция Бесселя 1-го рода. Из равенств (18) и (19) получаем, что

$$\widehat{I}_2(t,y,\xi) = 2\pi\int\limits_0^{+\infty}\exp(-\rho^2 t/P_1(i\xi))J_0(r\rho)\rho\,d\rho. \tag{20}$$

Интеграл $\widehat{I}_2$ из равенства (20) также может быть вычислен непосредственно (см. [7, с. 60, формула (7.7.3.24)]):

$$\widehat{I}_2(t,y,\xi) = \pi t^{-1}P_1(i\xi)\cdot\exp(-P_1(i\xi)r^2/4t). \tag{21}$$

Объединяя (8), (16), (17) и (21), получаем, что

$$E^{(1)}(t,x,y) = (4\pi t)^{-1}(2\pi)^{-n}\theta(t)\exp(-\omega_1)\int\limits_{\mathbb{R}^n}\exp(iz\cdot\xi - P(i\xi)\omega_2)\,d\xi, \tag{22}$$

где автомодельные переменные ω_1, ω_2 и z определены равенствами (11). Сравнивая формулы (12) и (22), немедленно устанавливаем справедливость равенства (10). Теорема доказана.

Замечание 4. Теорема 2 легко может быть обобщена (см. [8]) на случай $y \in \mathbb{R}^{2m}$, $m > 1$, путем замены «двумерного» лапласиана «$2m$-мерным» $\Delta = D_y \cdot D_y$ в операторе $L^{(1)}$ из равенства (7); при этом соответствующее фундаментальное решение Коши $E^{(m)}(t,x,y)$ может быть получено из фундаментального решения $E^{(1)}$, определенного равенствами (10), (11), с помощью формулы

$$E^{(m)} = (-2\pi)^{1-m} \left(\frac{\partial}{r\partial r}\right)^{m-1} E^{(0)}, \quad r = |y|, \quad m = 2, 3, \dots .$$

§ 3. Некоторые приложения

Проиллюстрируем на примерах приложения изложенного выше метода для построения фундаментальных решений некоторых известных уравнений математической физики. Ограничимся случаем $n = 1$ (т. е. x, b_j — скаляры). В дальнейшем в силу традиций вместо y_1, y_2 будем употреблять обозначение y, z, а вместо Δ — обозначение $\Delta_{(y,z)}$; $r = \sqrt{y^2 + z^2}$ — полярный радиус в цилиндрической системе координат (x, r, ψ).

Пример 1. Пусть $P_2(D_x) = -D_x^2$, т. е.

$$L^{(0)} \equiv \frac{\partial}{\partial t} - D_x^2, \quad E^{(0)}(t,x) = 2^{-1}(\pi t)^{-1/2}\theta(t)\exp(-x^2/4t). \tag{23}$$

1. Нестационарное вязкое трансзвуковое уравнение (см. [4]) с оператором

$$L^{(1)} \equiv D_x \frac{\partial}{\partial t} - D_x^3 - \Delta_{(y,z)}. \tag{24}$$

С помощью теоремы 2 (точнее, формул (6)–(8), (10), (11), (23), (24)) находим фундаментальное решение Коши:

$$E^{(1)}(t, \vec{r}) = 8^{-1}(\pi t)^{-3/2}\theta(t)\exp(-(x - r^2/4t)^2/4t). \tag{25}$$

2. Одно из многочисленных обобщений одномерного уравнения Кельвина — Фойгта на трехмерный случай (см. [2, 3]) с оператором

$$L^{(1)} \equiv \left(1 - D_x^2\right)\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_{(y,z)}. \tag{26}$$

Согласно теореме 2 находим, что

$$E^{(1)}(t, \vec{r}) = (4\pi^{3/2} r t^{1/2})^{-1}\exp[-(4r^4 + (r^2 - 4xt)^2)/4r^2 t]. \tag{27}$$

3. Уравнение, часто встречающееся в теории пограничного слоя (см. [9]), с оператором

$$L^{(1)} \equiv -D_x^2 \frac{\partial}{\partial t} + D_x^4 - \Delta_{(y,z)}. \tag{28}$$

С учетом теоремы 2 находим

$$E^{(1)}(t, \vec{r}) = (4\pi^{3/2}(r^2 t + 4t^3)^{1/2})^{-1}\exp[-x^2 t/(r^2 + 4t)]. \tag{29}$$

Пример 2. Пусть $P_2(D_x) = -D_x^3$, т. е.

$$L^{(0)} = \frac{\partial}{\partial t} - D_x^3, \quad E^{(0)}(t,x) = (3t)^{-1/3}\,\mathrm{Ai}(x(3t)^{-1/3}), \tag{30}$$

где $L^{(0)}$ — оператор из уравнения Кортевега — де Фриза, $\mathrm{Ai}(\cdot)$ — функция Эйри 1-го рода (см. [10]).

1. Пространственное уравнение Кадомцева — Петвиашвили (см. [2]) с оператором:

$$L^{(1)} \equiv D_x \frac{\partial}{\partial t} - D_x^4 - \Delta_{(y,z)}. \tag{31}$$

С помощью теоремы 2 (точнее, формул (6)–(8), (10), (11), (30), (31)) находим, что

$$E^{(1)}(t,\vec{r}) = (3^{1/3}4\pi t^{4/3})^{-1} Ai(-(x - r^2/4t)(3t)^{-1/3}). \tag{32}$$

2. Еще одно обобщение одномерного уравнения Кельвина — Фойгта на трехмерный случай (см. [2, 3]) с оператором:

$$L^{(1)} \equiv -\big(D_x - D_x^3\big)\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_{(y,z)}. \tag{33}$$

Применение теоремы 2 к формулам (30), (33) дает

$$E^{(1)}(t,\vec{r}) = (48^{1/3}\pi r^{2/3}t^{2/3})^{-1}\,\mathrm{Ai}(48^{-1/3}r^{4/3}t^{-2/3} - (4/3)^{1/3}xr^{-2/3}t^{1/3}). \tag{34}$$

3. Одно из обобщений уравнения Кортевега — де Фриза на пространственный случай (см. [3]) с оператором:

$$L^{(1)} \equiv D_x^3\frac{\partial}{\partial t} - D_x^6 - \Delta_{(y,z)}. \tag{35}$$

С помощью теоремы 2 имеем

$$E^{(1)}(t,\vec{r}) = (2^{4/3}3^{1/3}\pi(r^2t^2 + 4t^4))^{-1}\,\mathrm{Ai}(-x/3^{1/3}(t + r^2/4t)^{1/3}). \tag{36}$$

Замечание 5. Формулы (25), (32) фундаментальных решений $E^{(1)}$ для операторов $L^{(1)}$ из равенств (24), (31) соответственно были получены ранее (формула (25) — Ю. В. Засориным (см. [4]), формула (31) — Ю. В. Засориным и М. В. Придущенко (см. [5])) «честным», но значительно более сложным методом преобразования Фурье; формулы (27), (29), (34), (36) для операторов (26), (28), (31) и (33) являются, насколько известно автору, новыми и ранее не известными.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Демиденко Г. В., Успенский С. В.* Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной. Новосибирск: Научная книга, 1998.
2. *Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х.* Солитоны и нелинейные волновые уравнения. М.: Мир, 1988.
3. *Солитоны* / Буллаф Р., Вадати М. и др. Под ред. Р. Буллафа, Ф. Кодри. М.: Мир, 1983.
4. *Засорин Ю. В.* Точные решения некоторых задач, описываемых нестационарными вязкими трансзвуковыми уравнениями // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1994. Т. 34, № 10. С. 1446–1488.
5. *Засорин Ю. В., Придущенко М. В.* Точные решения пространственного уравнения Кадомцева — Петвиашвили // Вестн. ВГУ. Сер. физика, математика. 2002. № 2. С. 133–136.
6. *Хёрмандер Л.* Линейные дифференциальные операторы с частными производными. М.: Мир, 1965.

7. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. М.: Наука, 1974.
8. *Засорин Ю. В.* Гармонический анализ в шварцевских пространствах распределений и некоторые приложения к неклассическим задачам математической физики // Сиб. мат. журн. 1997. Т. 38, № 6. С. 1282–1299.
9. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. М.: Изд-во иностр. лит., 1956.
10. *Олвер Ф.* Асимптотика и специальные функции. М.: Наука, 1990.

Статья поступила 4 апреля 2005 г.

Засорин Юрий Валентинович
Воронежский гос. университет, НИИ математики
Университетская пл., 1, Воронеж 394006
zasorin@box.vsi.ru