Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2006. Том 47, № 5

УДК 517.54

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ КОЭФФИЦИЕНТОВ ОГРАНИЧЕННЫХ ОДНОЛИСТНЫХ ФУНКЦИЙ

Д. В. Прохоров, А. А. Никулин

Аннотация: В классе голоморфных нормированных в единичном круге функций, которые однолистны и ограничены, дается асимптотическая оценка коэффициентов, когда граница модуля функций стремится к бесконечности.

Ключевые слова: однолистные функции, ограниченные функции, оценки коэффициентов, уравнение Лёвнера, асимптотические оценки.

1. Введение

Обозначим через S класс всех голоморфных однолистных в единичном круге $U = \{z : |z| < 1\}$ функций $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$, а через $S(M)$, $M > 1$, — подкласс, состоящий из всех ограниченных функций $f \in S$, удовлетворяющих ограничению $|f(z)| < M$, $z \in U$.

Как известно, на протяжении многих лет главная интрига в оценках коэффициентов в классе S заключалась в гипотезе Бибербаха о справедливости неравенства $|a_n| \le n$, $n \ge 2$, для $f \in S$ со знаком равенства только для вращений функции Кёбе

$$K(z) = \frac{z}{(1-z)^2}. \tag{1}$$

Функция Кёбе (1) отображает единичный круг U на комплексную плоскость с разрезом по лучу на отрицательном направлении вещественной оси с вершиной в точке $w = -1/4$.

После того, как де Бранж [1, 2] доказал гипотезу Бибербаха, падающий интерес к неравенствам в теории однолистных функций поддерживался трудными экстремальными задачами в классах $S(M)$ (см., например, [3]).

История точных коэффициентных неравенств в классах $S(M)$ не слишком богата. Пик [4] доказал, что

$$\max_{f \in S(M)} |a_2| = 2 - \frac{2}{M}, \quad M > 1. \tag{2}$$

Максимум в (2) достигается только для вращений функций Пика

$$P_M(z) = MK^{-1}\left(\frac{K(z)}{M}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n(M) z^n. \tag{3}$$

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 04–01–00083) и Совета по грантам президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (код проекта НШ–1295.2003.1).

Функции Пика (3) отображают U на круг радиуса M с центром в начале координат, разрезанный вдоль отрезка на отрицательном направлении вещественной оси.

Точная оценка третьего коэффициента в классах $S(M)$ также известна для всех $M > 1$. В частности, [5]

$$\max_{f\in S(M)} |a_3| = 1 + 2\lambda^2 - \frac{4\lambda}{M} + \frac{1}{M^2}, \quad M \geq e, \tag{4}$$

где λ — наибольший корень уравнения $\lambda \log \lambda = -1/M$. Так как $\lambda = 1 - 1/M + O(1/M^2)$, $M \to \infty$, из (4) следует асимптотическая оценка

$$\max_{f\in S(M)} |a_3| = 3 - \frac{8}{M} + O\left(\frac{1}{M^2}\right), \quad M \to \infty. \tag{5}$$

Более общий результат принадлежит И. Е. Базилевичу [6], который охарактеризовал область значений системы двух начальных нетривиальных коэффициентов в различных классах ограниченных функций. В частном случае это приводит к описанию систем $\{a_2, a_3\}$ и $\{|a_2|, |a_3|\}$ в классе $S(M)$, $M > 1$.

К настоящему времени точные оценки четвертого коэффициента в классах $S(M)$ найдены не для всех $M > 1$, однако для достаточно больших M функции Пика остаются экстремальными в этой задаче. Именно, Шиффер и Тамми [7] доказали, что

$$\max_{f\in S(M)} |a_4| = p_4(M), \quad M \geq \frac{100}{3}. \tag{6}$$

Добавим, что Д. В. Прохоров и А. Ю. Васильев [8] показали, что функция Пика доставляет локальный максимум $|a_4|$ в классе $S(M)$ для $M > M_4 = 22.9\ldots$ и не доставляет локального максимума $|a_4|$ в $S(M)$ с $1 < M < M_4$.

В общем случае для четных номеров $n > 4$ Д. В. Прохоров [9] доказал, что существует $M_n > 1$ такое, что

$$\max_{f\in S(M)} |a_n| = p_n(M), \quad M > M_n,\ n = 2k,\ k = 3, 4, \ldots. \tag{7}$$

В отношении нечетных номеров $n > 3$ и больших значений M нет почти никаких результатов, за исключением того [9], что функция Пика (3) не является экстремальной.

Для M, близких к 1, задача оценки коэффициентов в классе $S(M)$ решена полностью. Именно, Северский [10, 11] и Шиффер и Тамми [12] доказали гипотезу Хажинского — Тамми о том, что для каждого $n \geq 2$ существует $M_n > 1$ такое, что для всех $M \in (1, M_n)$ и всех функций $f \in S(M)$ справедливы неравенства

$$|a_n| \leq \frac{2}{n-1}\left(1 - \frac{1}{M^{n-1}}\right).$$

Основной результат настоящей статьи содержится в теореме 1, в которой найден первый член в асимптотической оценке коэффициентов классов $S(M)$.

Теорема 1. *Для любого $n \geq 2$ в классах $S(M)$ справедлива следующая асимптотическая оценка при $M \to \infty$:*

$$\max_{f\in S(M)} |a_n| = n - \frac{n(n^2-1)}{3}\frac{1}{M} + o\left(\frac{1}{M}\right), \quad M \to \infty.$$

Для $n = 2, 3$ теорема 1 находит свое подтверждение в (2) и (5), для $n = 4$ она следует из (6), а для остальных четных номеров $n > 4$ — из (7). Таким образом, значение теоремы 1 проявляется в установлении асимптотических оценок коэффициентов с нечетными номерами $n > 3$ в классах $S(M)$.

2. Дифференциальные уравнения проблемы коэффициентов

Левнер [13] вывел дифференциальное уравнение, представляющее всюду плотные подклассы классов S или $S(M)$.

Теорема A [13]. *Пусть $w = w(z,t)$ является интегралом дифференциального уравнения Левнера*

$$\frac{dw}{dt} = -w\frac{e^{iu}+w}{e^{iu}-w}, \quad w|_{t=0} = z, \ 0 \le t < \infty, \tag{8}$$

с кусочно непрерывной функцией $u = u(t)$. Тогда функция

$$w(z,t) = e^{-t}(z + a_2(t)z^2 + \dots), \quad z \in U, \ t \ge 0, \tag{9}$$

голоморфна и однолистна по $z \in U$ для каждого $t \ge 0$. Кроме того, функции

$$f(z) := Mw(z, \log M) \in S(M) \tag{10}$$

образуют плотный подкласс класса $S(M)$, а функции

$$f(z) := \lim_{M\to\infty} Mw(z, \log M) \in S \tag{11}$$

— плотный подкласс класса S.

Функция Кёбе K и функции Пика P_M получаются по теореме A интегрированием дифференциального уравнения (8) с $u = \pi$.

Функция K доставляет граничную точку множеству

$$V_n = \{(a_2, \dots, a_n) : f \in S\}$$

значений коэффициентов в S. Аналогично каждая функция P_M доставляет граничную точку множеству

$$V_n(M) = \{(a_2, \dots, a_n) : f \in S(M)\}$$

значений коэффициентов в $S(M)$.

В дифференциальном уравнении Левнера (8) сделаем замену $t = -\log(1-\tau)$, $t \ge 0$, $0 \le \tau \le 1$, и пусть $a_1(\tau) = 1$ и $a_2(\tau), \dots, a_n(\tau)$ задаются уравнением (9). Обозначим $a(\tau) = (a_1(\tau), a_2(\tau), \dots, a_n(\tau))^T$.

Теорема Б [14]. *Дифференциальное уравнение Левнера (8) порождает следующее дифференциальное уравнение для вектора $a(\tau)$:*

$$\frac{da(\tau)}{d\tau} = -2\sum_{s=1}^{n-1} e^{-isu}(1-\tau)^{s-1}A^s(\tau)a(\tau) = (G_1(\tau,a,u), \dots, G_n(\tau,a,u))^T, \tag{12}$$

$a(0) = a^0$, где

$$A(\tau) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_1(\tau) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_2(\tau) & a_1(\tau) & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1}(\tau) & a_{n-2}(\tau) & \dots & a_1(\tau) & 0 \end{pmatrix}$$

и $a^0 = (1, 0, \dots, 0)^T$.

Множество $V_n(M)$ является множеством достижимости для управляемой системы (12) в момент $\tau = 1 - 1/M$. Иными словами, каждая точка a границы $\partial V_n(M)$ множества $V_n(M)$ совпадает со значением $a(1-1/M)$ интеграла $a(\tau)$ системы (12) при некотором выборе кусочно непрерывного управления $u(\tau)$. Чтобы достичь граничную точку, приходится решать экстремальную задачу нахождения оптимального управления $u(\tau)$ и соответствующей оптимальной траектории $a(\tau)$. Для этой цели рассмотрим функцию Гамильтона

$$H(\tau, a, \overline{\Psi}, u) = \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{n} G_k(\tau, a, u)\overline{\Psi}_k, \tag{13}$$

где ненулевой вектор $\Psi = \Psi(\tau) = (\Psi_1(\tau), \dots, \Psi_n(\tau))^T$ удовлетворяет сопряженной гамильтоновой системе

$$\frac{d\overline{\Psi}}{d\tau} = 2\sum_{s=1}^{n-1} e^{-isu}(1-\tau)^{s-1}(s+1)(A^T)^s\overline{\Psi}. \tag{14}$$

Значение $\Psi_1(\tau)$ несущественно, и можем положить $\Psi_1(\tau) = 0$. С другой стороны, значение Ψ_n постоянно. В экстремальной задаче о максимуме $\operatorname{Re} a_n$ в $S(M)$ условия трансверсальности требуют положить $\Psi_n = 1$.

Необходимые условия оптимальности [15] управления $u^*(\tau)$ и соответствующих оптимальной траектории $a^*(\tau)$ и сопряженной оптимальной траектории $\Psi^*(\tau)$ заключаются в том, что в точках непрерывности u^* выполняется условие

$$\max_u H(\tau, a^*(\tau), \overline{\Psi}^*(\tau), u) = H(\tau, a^*(\tau), \overline{\Psi}^*(\tau), u^*(\tau)), \quad 0 \le \tau \le 1. \tag{15}$$

Условие (15) называется принципом максимума Понтрягина. Очевидно, что $u^*(\tau)$ должно быть корнем уравнения

$$H_u(\tau, a^*(\tau), \overline{\Psi}^*(\tau), u) = 0.$$

Покажем, как граничные значения $\overline{\Psi}(0)$ и $\overline{\Psi}(1-1/M)$ связаны между собой и с $a(1-1/M)$.

Теорема В [16]. *Пусть* $a(\tau)$, $a\big(1-\frac{1}{M}\big) = a$, *и* $\overline{\Psi}(\tau)$, $\Psi\big(1-\frac{1}{M}\big) = (0, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, *удовлетворяют системам дифференциальных уравнений* (12) *и* (14). *Тогда справедливы следующие соотношения:*

$$\overline{\Psi}_k(0) = \sum_{j=0}^{n-k} \bar{\lambda}_{n-j}(n-k+1-j)a_{n-k+1-j}, \quad k = 2, \dots, n.$$

В частности, экстремальной задаче $\operatorname{Re} a_n \to \max$ в S соответствуют условия трансверсальности $(\Psi_1(1), \dots, \Psi_{n-1}(1), \Psi_n(1)) = (0, \dots, 0, 1)$, и по теореме В — начальные условия $\Psi_k(0) = (n-k+1)^2$, $k = 2, \dots, n$.

Лемма 2. *Пусть* $\xi = (\xi_2, \dots, \xi_n)^T$, $\xi_k = (n-k+1)^2$, $k = 2, \dots, n$. *Тогда для нечетных* $n \ge 3$ *функция Гамильтона* $H(0, a^0, \xi, u)$ *как функция переменного* u *достигает абсолютного максимума на* $[0, 2\pi]$ *только в точке* $u = \pi$ *и справедливы формулы*

$$H_u(0, a^0, \xi, \pi) = H_{uu}(0, a^0, \xi, \pi) = H_{uuu}(0, a^0, \xi, \pi) = 0, \quad H_{u^4}(0, a^0, \xi, \pi) < 0.$$

Доказательство. Так как $G_k(0, a^0, u) = -2e^{-i(k-1)u}$, $k \geq 2$, то

$$H(0, a^0, \xi, u) = -2\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)^2 \cos ku. \tag{16}$$

Отсюда дифференцированием по u находим

$$H_u(0, a^0, \xi, u) = 2\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)^2 k \sin ku, \quad H_{uu}(0, a^0, \xi, u) = 2\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)^2 k^2 \cos ku,$$

$$H_{uuu}(0, a^0, \xi, u) = -2\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)^2 k^3 \sin ku,$$

$$H_{u^4}(0, a^0, \xi, u) = -2\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)^2 k^4 \cos ku.$$

Очевидно, что

$$H_u(0, a^0, \xi, \pi) = H_{uuu}(0, a^0, \xi, \pi) = 0.$$

Кроме того, непосредственным наблюдением устанавливаем, что

$$H_{uu}(0, a^0, \xi, \pi) = 2\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k(n-k)^2 k^2$$

при нечетных n обращается в нуль. Осталось оценить величину

$$H_{u^4}(0, a^0, \xi, \pi) = -2\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k(n-k)^2 k^4,$$

которая является коэффициентом при z^n в тейлоровском разложении произведения $2h_1(z)h_2(z)$, где

$$h_1(z) = \frac{z(1+z)}{(1-z)^3} = \sum_{m=1}^{\infty} m^2 z^m,$$

$$h_2(z) = \frac{z(1 - 11z + 11z^2 - z^3)}{(1+z)^5} = \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1} m^4 z^m.$$

Произведение $h_1(z)h_2(z)$ равно произведению

$$\frac{z^2(1+11z^2)}{(1-z^2)^2}\frac{1}{(1+z)^2},$$

где первый сомножитель является четной функций, тейлоровское разложение которой имеет нулевые коэффициенты при нечетных степенях и положительные коэффициенты при четных степенях z, а тейлоровское разложение второго сомножителя имеет положительные коэффициенты при четных степенях и отрицательные — при нечетных степенях z. Поэтому коэффициент при z в нечетной степени n в тейлоровском разложении произведения отрицателен, что доказывает вторую часть утверждений леммы 2.

Для доказательства первой части леммы 2 найдем представление

$$H(0, a^0, \xi, \pi) - H(0, a^0, \xi, u) = \frac{\sin u(n \sin u - \sin nu)}{(1 - \cos u)^2}. \tag{17}$$

Формула (17) может быть выведена элементарными, хотя и громоздкими вычислениями, основанными на представлении суммы в (16) как вещественной части функции:

$$\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)^2 z^k = \frac{1+z-n^2z^{n-1}+(2n^2-2n-1)z^n-(n-1)^2z^{n+1}}{z^{n-1}(1-z)^3}, \quad z=e^{iu}.$$

Проверка того, что разность (17) неотрицательна на $[0,2\pi]$ и обращается в нуль только в точке $u=\pi$, также осуществляется элементарно. Ее критические точки последовательно отыскиваются как корни уравнения $\cos u-\cos nu=0$, и устанавливается, что значения функции (17) в критических точках на $[0,\pi)$ положительны. Опускаем подробное исследование, считая его массово доступным, и тем завершаем доказательство леммы 2.

Лемма 2 имеет важные следствия.

(i) Описание экстремальных управлений и траекторий. В экстремальной задаче о максимуме $\operatorname{Re} a_n$ в классе $S(M)$ при бесконечно малых $1/M$ следует искать подходящие вариации функции Кёбе K, которые оказываются функциями класса $S(M)$, доставляющими граничные точки множества $V_n(M)$. Все такие вариации создаются варьированием начальных данных в сопряженной системе (14) и интегрированием систем (12) и (14) на отрезке $[0,1-1/M]$ с управлениями u, удовлетворяющими принципу максимума.

(ii) Построение вариаций оптимального управления. Функция Гамильтона $H(\tau,a(\tau),\overline{\Psi}(\tau),\pi)$ с $\Psi(0)=\xi$ является аналитической функцией переменного $\tau\in[0,1]$, равно как и частные производные H по u. Коль скоро

$$H_{uu}(1,a(1),\overline{\Psi}(1),\pi)=-2\sum_{k=1}^{n-1}k^3(n-k)<0,$$

то функция $H_{uu}(\tau,a(\tau),\overline{\Psi}(\tau),\pi)$ не вырождается в постоянную величину, поэтому множество E ее нулей состоит из конечного числа точек. По лемме 2 точка $\tau=0$ принадлежит E.

Для всякого $\tau\in[0,1]$ уравнение

$$H_u(\tau,a,\overline{\Psi},u)=0 \tag{18}$$

с $(a,\overline{\Psi})$ из окрестности $(a(\tau),\overline{\Psi}(\tau))$ определяет неявную функцию $u=u(\tau,a,\overline{\Psi})$, аналитическую для $\tau\in[0,1]\setminus E$ или с возможной степенной особенностью в разложении по степеням $a-a(\tau)$ и $\overline{\Psi}-\overline{\Psi}(\tau)$ для $\tau\in E$. Неявная функция определяется неоднозначно, однако можно выделить кусочно непрерывную по τ ветвь, которая в каждой точке непрерывности удовлетворяет принципу максимума вдоль траектории $(a(\tau),\overline{\Psi(\tau)})$, получающейся интегрированием систем (12) и (14) с $u=u(\tau,a,\overline{\Psi})$ в их правых частях. Действительно, каждому $\overline{\Psi}(0)$ из окрестности точки ξ соответствует функция $f\in S$, доставляющая граничную точку множества V_n. В свою очередь, в параметрическом представлении Левнера по теореме А f генерирует кусочно непрерывное оптимальное управление $u=u(\tau)=u(\tau,a(\tau),\overline{\Psi}(\tau))$, удовлетворяющее принципу максимума.

(iii) Качественная характеристика экстремальных функций. Общие вариационные принципы в геометрической теории функций утверждают (см., например, [17, с. 86]), что всякая функция $f \in S$, доставляющая граничную точку множества V_n, отображает единичный круг U на комплексную плоскость с кусочно аналитическими разрезами, имеющими не более чем $n-1$ конечных вершин. Это утверждение без труда переносится на случай функций $f \in S(M)$ с заменой плоскости на круг радиуса M, поскольку все оптимальные управления и траектории на $[0, 1-1/M]$ являются сужением некоторых оптимальных управлений и траекторий на $[0,1]$. Лемма 2 позволяет в рассматриваемой экстремальной задаче уменьшить максимальное количество вершин кусочно аналитических разрезов до двух. Этот факт представляет независимый интерес, поэтому сформулируем его как теорему.

Теорема 3. *Если для нечетного $n \geq 3$ функция f доставляет максимум $\operatorname{Re} a_n$ в классе $S(M)$, то при всех достаточно больших M функция f отображает единичный круг U на круг радиуса M с центром в начале координат, разрезанный по кусочно аналитическим разрезам с не более чем двумя вершинами внутри круга.*

Доказательство. Следует доказать лишь утверждение о количестве вершин разрезов внутри круга в образе U при отображении f. Предположим, что количество вершин разрезов внутри круга равно m. Экстремальная функция f имеет по теореме A неоднозначное представление, соответствующее управлению $u = u(\tau)$. Функция Гамильтона (13) для отображения f при $\tau = 0$ имеет вид

$$H(0, a^0, \overline{\Psi}(0), u) = -2 \sum_{k=1}^{n-1} \overline{\Psi}_{k+1}(0) \cos ku.$$

Согласно теории Левнера функция f представима по формуле (10), где $w(z,t)$, $t = -\log(1-\tau)$, является интегралом дифференциального уравнения Левнера (8). Среди возможных представлений $w(z, -\log(1-\tau))$ выберем такое, которое при каждом $\tau \in [0, 1-1/M]$ отображает U на круг с m кусочно аналитическими разрезами. Поскольку выбранная динамика приводит по (10) к функции f, экстремальной в задаче о максимуме $\operatorname{Re} a_n$ в $S(M)$, то управление $u = u(\tau)$, генерирующее $w(z, -\log(1-\tau))$ в уравнении Левнера (8), удовлетворяет принципу максимума (15). Значит, тригонометрический многочлен

$$(-2) \sum_{k=1}^{n-1} \overline{\Psi}_{k+1}(0) \cos ku$$

относительно u достигает своего абсолютного максимума в m различных точках на $[0, 2\pi]$.

При $M = \infty$ управление $u = \pi$ является оптимальным в задаче о максимуме $\operatorname{Re} a_n$ в $S(M)$ с начальными условиями $\Psi_k(0) = \xi_k = (n-k+1)^2$, $k = 2, \dots, n$. По теореме B при достаточно больших M значения $\overline{\Psi}_k(0)$ близки к ξ_k, $k = 2, \dots, n$. Из леммы 2 следует, что производная тригонометрического многочлена

$$(-2) \sum_{k=1}^{n-1} (n-k+1)^2 \cos ku$$

имеет в точке $u = \pi$ нуль кратности 3. Следовательно, для $(\overline{\Psi}_2(0), \dots, \overline{\Psi}_n(0))$ из малой окрестности точки ξ производная тригонометрического многочлена $H(0, a^0, \overline{\Psi}(0), u)$ относительно u имеет в малой окрестности точки $u = \pi$ не более трех нулей с учетом кратности. Кроме того, из леммы 2 следует, что при таких $\overline{\Psi}(0)$ тригонометрический многочлен $H(0, a^0, \overline{\Psi}(0), u)$ достигает своего абсолютного максимума на $[0, 2\pi]$ только в малой окрестности точки $u = \pi$. Отсюда заключаем, что для достаточно больших M тригонометрический многочлен $H(0, a^0, \overline{\Psi}(0), u)$ имеет не более двух точек абсолютного максимума на $[0, 2\pi]$. Следовательно, $m \leq 2$, что доказывает теорему 3.

3. Обобщенные дифференциальные уравнения проблемы коэффициентов

Функции $f \in S(M)$, отображающие единичный круг U на круг радиуса M с разрезами, имеют множество представлений (10) интегралами дифференциального уравнения Левнера (8) с различными кусочно непрерывными управлениями $u = u(\tau)$. Желая устранить многозначность представления и ограничиться непрерывными управлениями, можно перейти к обобщенному дифференциальному уравнению Левнера (см., например, [17]). В случае двух вершин разрезов внутри круга обобщенное уравнение Левнера имеет вид

$$\frac{dw}{dt} = -w\left[\lambda\frac{e^{iu_1} + w}{e^{iu_1} - w} + (1-\lambda)\frac{e^{iu_2} + w}{e^{iu_2} - w}\right], \quad w|_{t=0} = z, \ 0 \leq t < \infty, \tag{19}$$

где $0 \leq \lambda \leq 1$. Как и прежде, функции f из всюду плотного подмножества класса $S(M)$ или S определяются интегралами $w(z, t)$ дифференциального уравнения (19) по формулам (9) и (10) или (11). В [14] показано, что представление функции f в этом случае однозначно, если ограничиться постоянным коэффициентом λ и непрерывными управлениями $u_1(t)$ и $u_2(t)$.

Дифференциальное уравнение Левнера (8) индуцировало системы (12) и (14) и функцию Гамильтона (13). Аналогично обобщенное дифференциальное уравнение Левнера (19) индуцирует систему относительно вектора коэффициентов $a(\tau)$

$$\begin{aligned}\frac{da}{d\tau} = &-2\lambda\sum_{s=1}^{n-1} e^{-isu_1}(1-\tau)^{s-1}A^s(\tau)a(\tau)\\ &- 2(1-\lambda)\sum_{s=1}^{n-1} e^{-isu_2}(1-\tau)^{s-1}A^s(\tau)a(\tau), \quad 0 \leq \tau \leq 1, \ a(0) = a^0,\end{aligned} \tag{20}$$

сопряженную гамильтонову систему относительно сопряженного вектора $\overline{\Psi}(\tau)$

$$\begin{aligned}\frac{d\overline{\Psi}}{d\tau} = &\ 2\lambda\sum_{s=1}^{n-1} e^{-isu_1}(1-\tau)^{s-1}(s+1)(A^T)^s\overline{\Psi}\\ &+ 2(1-\lambda)\sum_{s=1}^{n-1} e^{-isu_2}(1-\tau)^{s-1}(s+1)(A^T)^s\overline{\Psi}, \quad 0 \leq \tau \leq 1,\end{aligned} \tag{21}$$

и функцию Гамильтона

$$H(\tau, a, \overline{\Psi}, u) = \operatorname{Re}\left[\lambda\sum_{k=1}^{n} G_k(\tau, a, u_1)\overline{\Psi}_k + (1-\lambda)\sum_{k=1}^{n} G_k(\tau, a, u_2)\overline{\Psi}_k\right].$$

4. Формализация асимптотической экстремальной задачи

Построим вариацию начальных данных $\overline{\Psi}(0) = \xi$ в системе дифференциальных уравнений (14). Для этого зафиксируем вектор $e = (e_2, \dots, e_{n-1}, 0)$ с комплексными координатами и положим

$$(\overline{\Psi}_2(0), \dots, \overline{\Psi}_n(0)) = \xi + \varepsilon e, \quad \varepsilon > 0. \tag{22}$$

Будем интегрировать системы (12) и (14) с $u = u(\tau, a, \overline{\Psi})$ в их правых частях на отрезке $[0, 1-\varepsilon_1]$, $\varepsilon_1 > 0$. Значение решения $(a(1-\varepsilon_1), \overline{\Psi}(1-\varepsilon_1))$ в точке $1-\varepsilon_1$ зависит от ε, ε_1 и e. Целевой интеграл экстремальной задачи зададим в виде

$$I(\varepsilon, \varepsilon_1) = \operatorname{Re} a_n(1-\varepsilon_1) = \operatorname{Re} \int\limits_0^{1-\varepsilon_1} \frac{da_n}{d\tau} d\tau = \operatorname{Re} \int\limits_0^{1-\varepsilon_1} G_n(\tau, a, u(\tau, a, \overline{\Psi}))\, d\tau \to \max. \tag{23}$$

Задача нахождения асимптотической оценки $\operatorname{Re} a_n$ сводится к поиску максимума по всем e интеграла

$$\int\limits_0^{\tau} \left[\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial a_n}{\partial \varepsilon}\right)\right]_{\varepsilon=0} d\tau. \tag{24}$$

Сведение асимптотической экстремальной задачи к максимизации интеграла (24) произошло при условии, что выделена единственная непрерывная по τ ветвь $u(\tau, a, \overline{\Psi})$, удовлетворяющая принципу максимума. В случае наличия двух непрерывных ветвей $u_1(\tau, a, \overline{\Psi})$ и $u_2(\tau, a, \overline{\Psi})$, удовлетворяющих принципу максимума, перейдем к обобщенным системам (20) и (21). Целевой функционал будет задаваться линейной комбинацией интегралов

$$I(\varepsilon, \varepsilon_1) = \operatorname{Re} a_n(1-\varepsilon_1) = \operatorname{Re} \int\limits_0^{1-\varepsilon_1} \frac{da_n}{d\tau}\, d\tau$$

$$= \operatorname{Re}\left[\lambda \int\limits_0^{1-\varepsilon_1} G_n(\tau, a, u_1(\tau, a, \overline{\Psi})) d\tau + (1-\lambda) \int\limits_0^{1-\varepsilon_1} G_n(\tau, a, u_2(\tau, a, \overline{\Psi}))\, d\tau\right] \to \max, \tag{25}$$

которая зависит не только от ε, ε_1 и e, но и от λ. При этом выбор вектора e ограничен тем условием, что должны выделяться две ветви, максимизирующие функцию Гамильтона. Асимптотическая экстремальная задача сводится к поиску максимума по $\lambda \in [0, 1]$ и множеству допустимых векторов e интеграла (24).

5. Доказательство теоремы 1

Рассмотрим задачу о максимуме функционала (23). Из (12) находим, что

$$\operatorname{Re} a_2(\tau) = \operatorname{Re} \int\limits_0^{\tau} G_2(\tau, u)\, d\tau = -2 \int\limits_0^{\tau} \cos u(\tau)\, d\tau.$$

Так как $u|_{\varepsilon=0} = \pi$, отсюда делаем заключение о нулевом значении производной

$$\left[\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \operatorname{Re} a_2(\tau)\right]_{\varepsilon=0} = 0.$$

Следовательно,

$$\operatorname{Re} a_2(1) = 2 + O(\varepsilon^2). \tag{26}$$

Аналогично

$$\operatorname{Im} a_2(\tau) = \operatorname{Im} \int_0^\tau G_2(\tau, u)\, d\tau = 2 \int_0^\tau \sin u(\tau)\, d\tau,$$

откуда находим, что

$$\operatorname{Im} a_2(1) = O(\varepsilon). \tag{27}$$

В [18] доказано, что для $k = 3, \ldots, n$ существуют c_k и d_k такие, что

$$\operatorname{Re}(k - a_k) \le c_k \operatorname{Re}(2 - a_2) \tag{28}$$

и

$$k - |a_k| \le d_k \operatorname{Re}(2 - a_2). \tag{29}$$

Из (26) и (28) получаем, что

$$\operatorname{Re} a_k(1) = k + O(\varepsilon^2), \quad k = 2, \ldots, n. \tag{30}$$

В свою очередь, из (26)–(29) вытекает, что

$$\operatorname{Im} a_k(1) = O(\varepsilon), \quad k = 2, \ldots, n. \tag{31}$$

Решая задачу о максимуме $\operatorname{Re} a_n$ в классе $S(1 - \varepsilon_1)$, следует удовлетворить необходимые условия экстремума в виде условий трансверсальности

$$\lambda_2(1 - \varepsilon_1) = \cdots = \lambda_{n-1}(1 - \varepsilon_1) = 0. \tag{32}$$

Из теоремы B находим, что условия трансверсальности равносильны системе равенств

$$\overline{\Psi}_k(0) - \xi_k = (n - k + 1)(a_{n-k+1} - (n - k + 1)), \quad k = 2, \ldots, n - 1. \tag{33}$$

Так как функции $G_k(\tau, a, u)$, $k = 2, \ldots, n$, ограничены, то

$$a_k(1) - a_k(1 - \varepsilon_1) = \int_{1-\varepsilon_1}^{1} G_k(\tau, a, u) d\tau = O(\varepsilon_1), \quad k = 2, \ldots, n,$$

и условия (33) можно обеспечить, если положить $\varepsilon_1 = \varepsilon$ и $\|e\| \le C$ в (22) с некоторым $C > 0$.

В случае наличия двух непрерывных ветвей u_1, u_2, максимизирующих функцию Гамильтона, все рассуждения сохраняют силу, лишь вместо (23) приходится использовать представление (25), в котором оба слагаемые при $\varepsilon_1 = \varepsilon$ имеют нулевые частные производные по ε при $\varepsilon \to 0$. Полученный результат не зависит от допустимых векторов e и $\lambda \in [0, 1]$.

Осталось рассмотреть целевые функционалы (23) или (25), в каждом из которых

$$I(\varepsilon, \varepsilon) = I(\varepsilon) = I(0) + I'(0)\varepsilon + o(\varepsilon). \tag{34}$$

Так как $a_n = n$ для функции Кёбе, то

$$I(0) = n. \tag{35}$$

Дифференцирование (23) или (25) по ε при $\varepsilon_1 = \varepsilon$ приводит к формуле

$$I'(0) = -\operatorname{Re} G_n(1, a, \pi). \tag{36}$$

Пользуясь тем, что $a_k = k$, $k \ge 2$, для функции Кёбе, из (12) находим

$$\operatorname{Re} G_n(1, a, \pi) = 2A(1)a(1) = 2 \sum_{s=1}^{n-1} (n - s)s = \frac{n(n^2 - 1)}{3}.$$

Соединяя последнюю формулу с (23), (25), (34), (35) и (36), где $\varepsilon = 1/M$, приходим к заключению теоремы 1.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Branges L.* A proof of the Bieberbach conjecture / LOMI, 1984. 21 p. (Preprints E-5-84).
2. *Branges L.* A proof of the Bieberbach conjecture // Acta Math. 1985. V. 154, N 1–2. P. 137–152.
3. *Prokhorov D.* Bounded univalent functions // Handbook of complex analysis. Amsterdam: Elsevier Sci., 2002. V. 1. Geometric function theory. P. 207–228.
4. *Pick G.* Über die konforme Abbildung eines Kreises auf ein schlichtes und zugleich beschränktes Gebiet // S.-B. Kaiserl. Akad. Wiss. Wien. Math.-Naturwiss. Kl. Abt. II a. 1917. Bd 126. S. 247–263.
5. *Schaeffer A. C., Spencer D. C.* The coefficients of schlicht functions // Duke Math. J. 1945. V. 12, N 1. P. 107–125.
6. *Базилевич И. Е.* Области начальных коэффициентов ограниченных однолистных функций с p-кратной симметрией // Мат. сб. 1957. Т. 43, № 4. С. 409–428.
7. *Schiffer M., Tammi O.* On the fourth coefficient of bounded univalent functions // Trans. Amer. Math. Soc. 1965. V. 119, N 1. P. 67–78.
8. *Prokhorov D., Vasil'ev A.* Optimal control in Bombieri's and Tammi's conjectures // Georgian Math. J. 2005. V. 12 , N 4. P. 743–761.
9. *Prokhorov D.* Even coefficient estimates for bounded univalent functions // Ann. Polon. Math. 1993. V. 58, N 3. P. 267–273.
10. *Siewierski L.* Sharp estimation of the coefficients of bounded univalent functions near the identity // Bull. Acad. Polon. Sci. 1968. V. 16, N 7. P. 575–576.
11. *Siewierski L.* Sharp estimation of the coefficients of bounded univalent functions close to identity // Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.) 1971. V. 86. P. 1–153.
12. *Schiffer M., Tammi O.* On bounded univalent functions which are close to identity // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. AI Math. 1968. V. 435. P. 3–26.
13. *Löwner K.* Untersuchungen über schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises // Math. Ann. 1923. Bd 89. S. 103–121.
14. *Прохоров Д. В.* Множества значений систем функционалов в классах однолистных функций // Мат. сб. 1990. Т. 181, № 12. С. 1659–1677.
15. *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимального управления. М.: Наука, 1969.
16. *Прохоров Д. В.* Геометрические методы в проблеме коэффициентов аналитических функций // Изв. Саратовск. ун-та. Новая серия. 2001. Т. 1, № 2. С. 43–55.
17. *Александров И. А.* Параметрические продолжения в теории однолистных функций. М.: Наука, 1976.
18. *Bshouty D.* A coefficient problem of Bombieri concerning univalent functions // Proc. Amer. Math. Soc. 1984. V. 91, N 3. P. 383–388.

Статья поступила 5 мая 2005 г.

Прохоров Дмитрий Валентинович, *Никулин Антон Александрович*
Саратовский гос. университет, ул. Астраханская, 83, Саратов 410012
ProkhorovDV@info.sgu.ru