Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2006. Том 47, № 5

УДК 517.54

САМОПОДОБНЫЕ ЖОРДАНОВЫ ДУГИ И ГРАФ–ОРИЕНТИРОВАННЫЕ СИСТЕМЫ ПОДОБИЙ

А. В. Тетенов

Аннотация: Изучаются аттракторы $\vec{\gamma}$ конечных граф-ориентированных систем $\mathscr{S}$ сжимающих подобий в $\mathbb{R}^d$, компоненты которых являются жордановым дугами. Доказывается, что всякая такая самоподобная жорданова дуга, отличная от отрезка прямой, допускает конечное разбиение на неперекрывающиеся поддуги δ_j, каждая из которых также допускает разбиение на неперекрывающиеся образы поддуг δ_j при сжимающих подобиях. Формальное описание этого свойства дается конструкцией мультициппера, которая вводится в работе.

Ключевые слова: аттрактор, граф-ориентированная IFS, жорданова дуга, мультициппер.

Несмотря на большое количество публикаций по геометрии самоподобных множеств [1–4], вопросы структурного описания этих множеств часто остаются вне поля зрения их авторов. Предмет настоящей статьи, являющейся продолжением работ [5, 6], — описание структуры самоподобных жордановых дуг. Дугу $\gamma \in \mathbb{R}^n$ будем называть *самоподобной*, если существует такое конечное покрытие γ замкнутыми поддугами (вообще говоря, перекрывающимися) $\gamma_1, \dots, \gamma_m$, что каждая из поддуг γ_i есть объединение образов этих же поддуг при сжимающих подобиях. Строгое описание этого свойства дается понятием граф-ориентированной системы подобий, введенным Молдином и Уильямсом в статье [7]. Основной результат — теорема 4.1 — состоит в том, что такое покрытие можно заменить конечным разбиением на неперекрывающиеся поддуги δ_j, каждая из которых вновь разбивается на неперекрывающиеся образы поддуг δ_j при сжимающих подобиях. Формальное описание последнего свойства дается конструкцией мультициппера, которая вводится в настоящей работе.

В § 1 излагаются вводные понятия, в § 2 описывается конструкция мультициппера, § 3 посвящен свойствам последовательностей подобий жордановых дуг, в § 4 формулируется и доказывается основная теорема. Автор выражает благодарность В. В. Асееву, А. С. Кравченко, А. Д. Медных и А. В. Сычеву за полезные замечания.

§ 1. Предварительные сведения

1.1. Ориентированные графы. Пусть $G = (V, E)$ — ориентированный мультиграф с множеством вершин V и множеством ребер E. Для каждой пары

Работа выполнена при финансовой поддержке научной программы «Университеты России» (код проекта УР.04.01.456).

$u, v \in V$ пусть $E_{uv} \subseteq E$ — множество ребер из u в v. Если $e \in E_{uv}$, то u называется *начальной*, а v — *конечной* вершинами e, что будет записываться как $u = i^*(e)$, $v = f^*(e)$.

Потребуем, чтобы каждая вершина u в графе G являлась начальной вершиной хотя бы одного ребра в G.

Путем σ в графе G будем называть такое слово $\sigma = e_1 e_2 \dots e_k$, где $e_i \in E$, что $f^*(e_i) = i^*(e_{i+1})$ для любого $i = 1, \dots, k-1$. При этом вершина $u = i^*(e_1)$ будет *началом*, а $v = f^*(e_k)$ — *концом* пути σ. Начало и конец пути σ будут обозначаться таким же образом: $u = i^*(\sigma)$, $v = f^*(\sigma)$. Будем обозначать через $E_{uv}^{(k)}$ множество путей σ из u в v длины k, т. е. всех таких $\sigma = e_1 e_2 \dots e_k$, что $u = i^*(\sigma)$, $v = f^*(\sigma)$. Тогда $E_{uv}^{(*)} = \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} E_{uv}^{(k)}$ — множество всех путей из u в v в G. Также положим $E_v^{(*)} = \bigcup\limits_{u \in V} \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} E_{uv}^{(k)}$, а $E^{(*)} = \bigcup\limits_{v \in V} E_v^{(*)}$. Если $\sigma = e_1 \dots e_k$ — путь длины k, а $l < k$, то символом $\sigma|_l = e_1 \dots e_l$ обозначим начальный отрезок длины l в слове σ. Упорядочим каждое из этих пространств отношением $\sqsubseteq$: будем считать, что $\sigma \sqsubseteq \sigma'$, если σ является начальным отрезком в σ'. Аналогично σ' является *предшественником* σ ($\sigma \rhd \sigma'$), если $\sigma = e_1 \dots e_k$ — путь длины k и $\sigma' = e_{l+1} \dots e_k$ для некоторого $l < k$.

Граф $G = (V, E)$ назовем *сильно связным*, если $E_{uv}^{(*)} \neq \varnothing$ при любых $u, v \in V$.

1.2. Граф-ориентированные системы подобий. Для каждого $u \in V$ возьмем метрическое пространство X_u. Мы будем полагать, что все X_u являются разными копиями пространства $\mathbb{R}^d$.

Пусть $\mathscr{C}_G = \prod\limits_{v \in V} C(X_v)$, где $C(X_v)$ — гиперпространство всех непустых компактов в X_v, наделенное метрикой Хаусдорфа. Элементы множества $\mathscr{C}_G$ будем обозначать как векторы $\vec{A} = (A_v)_{v \in V}$ с компонентами A_v и называть (*компактными*) *вектор-множествами. Открытым вектор-множеством* $\vec{\mathscr{O}}$ мы назовем набор $(\mathscr{O}_v)_{v \in V}$ непустых открытых множеств $\mathscr{O}_v \in X_v$.

Для каждого $e \in E_{uv}$ зададим невырожденное подобие $S_e : X_v \to X_u$ с коэффициентом растяжения q_e :

$$|S_e(x) - S_e(y)| = q_e |x - y|.$$

Для пути $\sigma = e_1 e_2 \dots e_k$ будем записывать $S_\sigma = S_{e_1} \cdot S_{e_1} \cdot \ldots \cdot S_{e_k}$ и $q_\sigma = q_{e_1} \dots q_{e_k}$.

Потребуем, чтобы для любого цикла σ в G, т. е. такого пути, что $i^*(\sigma) = f^*(\sigma)$, выполнялось неравенство $0 < q_\sigma < 1$.

Семейство $\mathscr{S} = (S_e)_{e \in E}$ называют *граф-ориентированной системой подобий* с образующим графом G. Система $\mathscr{S}$ задает оператор Хатчинсона $T : \mathscr{C}_G \to \mathscr{C}_G$ формулой

$$T(\vec{A})_u = \bigcup_{v \in V} \bigcup_{e \in E_{uv}} S_e(A_v).$$

Согласно [7, лемма 2] существует такое N, что N-я степень оператора T является сжимающим отображением в $\mathscr{C}_G$. Поэтому существует единственное вектор-множество $\vec{K} = \{K_u : u \in V\}$, для которого $T(\vec{K}) = \vec{K}$. Кроме того, $\lim\limits_{n \to \infty} T^n(\vec{A}) = \vec{K}$ для любого $\vec{A} \in \mathscr{C}_G$ [7, теорема 1]. Множество $\vec{K}$ называется *аттрактором* или *инвариантным множеством* системы $\mathscr{S}$, а K_u — *компонентами аттрактора*.

Систему $\mathscr{S}$ назовем *неприводимой*, если для любой ее собственной подсистемы $\mathscr{S}'$, аттрактор системы $\mathscr{S}'$ отличен от аттрактора системы $\mathscr{S}$. Если образующий граф G сильно связен, то система будет называться *регулярной*.

Говорят, что система $\mathscr{S}$ с аттрактором $\vec{K}$ удовлетворяет *условию открытого множества* [8, §3], если существует такое открытое вектор-множество $\vec{\mathscr{O}} = \{\mathscr{O}_u, u \in V\}$, что $S_e(\mathscr{O}_v) \subset \mathscr{O}_u$ для любых $u, v \in V$ и $e \in E_{uv}$ и $S_{e_1}(\mathscr{O}_{v_1}) \cap S_{e_2}(\mathscr{O}_{v_2}) = \varnothing$ для любых $e_1 \in E_{uv_1}$, $e_2 \in E_{uv_2}$. Система удовлетворяет *сильному условию открытого множества*, если $\mathscr{O}_u \cap K_u \neq \varnothing$ для любого $u \in V$.

1.3. Индексная параметризация аттрактора. Пусть $E_u^{(\omega)}$ — множество всех бесконечных путей $\sigma = e_1 e_2 \dots e_n \dots$ в графе G с началом в вершине u, а $E^{(\omega)} = \bigcup\limits_{u \in V} E_u^{(\omega)}$. Пусть $E^{\mathbb{N}}$ — произведение бесконечной последовательности копий конечного множества E, наделенное тихоновским произведением дискретных топологий. Рассматривая $E^{(\omega)}$ как подпространство в $E^{\mathbb{N}}$, мы превращаем $E^{(\omega)}$ в компактное топологическое пространство с базой топологии, образованной множествами $E_\alpha^{(\omega)} = \{\sigma \in E^{(\omega)} : \alpha \sqsubseteq \sigma\}$, где $\alpha \in E^{(*)}$.

Пусть $\alpha \in E_{uv}^{(k)}$ — конечный путь; будем обозначать через K_α множество $S_\alpha(K_v)$. Такое подмножество $K_\alpha \subset K_u$ назовем *(под)копией k-го ранга* в K_u. Очевидно, из $\alpha \sqsubset \beta$ следует, что $K_\beta \subset K_\alpha$. Поэтому для бесконечного пути $\sigma \in E_u^{(*)}$ компактные множества $K_{\sigma|_n}$ образуют последовательность вложенных копий в K_u с одноточечным пересечением $\{x_\sigma\} \subset K_u$. Отображение $\pi : E^{(*)} \to K$, переводящее σ в x_σ, непрерывно и сюръективно (см., например, [9, с. 433; 10, п. 1.2]); мы будем называть его *индексной параметризацией аттрактора* системы $\mathscr{S}$. Каждый путь $\sigma \in E^{(\omega)}$, для которого $\pi(\sigma) = x$, мы также будем называть *индексной параметризацией точки* x. Точку $x \in K_u$ назовем *периодической*, если у нее существует периодическая индексная параметризация $\sigma = e_1 e_2 \dots$. Аналогично если $\alpha \in E^{(*)}$, то точка $x \in K_\alpha$ будет называться *периодической в подкопии* K_α, если у нее существует периодическая индексная параметризация $\sigma = e_1 e_2 \dots$, для которой $\alpha \sqsubseteq \sigma$.

Вектор-множество $\vec{A} \in \mathscr{C}_G$ назовем *субинвариантным*, если для любого ребра $e \in E$ с началом $i^*(e) = u$ и концом $f^*(e) = v$ из включения $S_e(x) \in A_u$ вытекает, что $x \in A_v$. Из субинвариантности $\vec{A}$ следует, что $T(\vec{A})_u \supset \vec{A}_u$ для любого $u \in V$.

Предложение 1.1. *Пусть $\vec{A}$ субинвариантно, а все множества A_u, $u \in V$, конечны. Тогда каждое из множеств A_u состоит из периодических точек.*

Доказательство. Каждому пути $\sigma = e_1 e_2 \dots$ сопоставим последовательность $\sigma_k = e_{k+1} e_{k+2} \dots$ его предшественников. Пусть σ — индексная параметризация точки $x \in A_u$. Точку $x_k = \pi(\sigma_k)$ также будем называть k-м *предшественником точки* x. Поскольку $x = S_{\sigma|_k}(x_k)$, в силу субинвариантности $\vec{A}$ будет $x_k \in A_{f^*(\sigma|_k)}$. Так как множество $\bigcup\limits_{u \in V} A_u$ конечно, найдутся такие $l < m$, что $x_l = x_m$. Тогда $\sigma' = e_1 \dots e_l \overline{(e_{l+1} \dots e_m)}$ — периодическая индексная параметризация точки x. $\square$

1.4. Ориентированные дуги. Жорданову дугу γ с упорядоченной парой ее концов $\{a, b\}$ мы называем *ориентированной дугой*. Гомеоморфизм $\varphi : [0,1] \to \gamma$, $\varphi(0) = a$, $\varphi(1) = b$, индуцирует на γ линейное упорядочение $x \leq y$, при котором $a \leq x \leq b$ $\forall x \in \gamma$. Любая пара точек $a' < b'$ на дуге γ задает поддугу с концами a', b', которую будем обозначать через $[a', b']$. Биективное отображение $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ назовем *сохраняющим ориентацию на дуге* γ, если $\gamma \cap g(\gamma)$ — невырожденная поддуга и $g(x) < g(y)$ для любых $x < y$ в $g^{-1}(\gamma) \cap \gamma$.

1.5. Системы с жордановыми аттракторами. Если все компоненты аттрактора граф-ориентированной системы $\mathscr{S}$ — жордановы кривые, то $\mathscr{S}$ будет называться *системой с жордановым аттрактором.*

Предложение 1.2. *Пусть $\mathscr{S}$ — регулярная граф-ориентированная система подобий с жордановым аттрактором. Тогда все компоненты аттрактора — жордановы дуги. Если одна из компонент аттрактора системы — прямолинейный отрезок, то все компоненты аттрактора — прямолинейные отрезки.*

Доказательство. Пусть γ_u, γ_v — компоненты аттрактора системы $\mathscr{S}$. Существуют пути $\sigma \in E_{uv}^{(*)}$, $\sigma' \in E_{vu}^{(*)}$. Тогда $S_\sigma(\gamma_v) \subset \gamma_u$ и $S_{\sigma'}(\gamma_u) \subset \gamma_v$. Так как S_σ и $S_{\sigma'}$ — подобия, из того, что одна из компонент — прямолинейный отрезок, получим, что и вторая — тоже отрезок. Кроме того, поскольку всякое собственное связное подмножество жордановой кривой, содержащее более одной точки, — жорданова дуга, следует первое утверждение. □

В случае, когда все компоненты аттрактора системы $\mathscr{S}$ являются жордановыми дугами, наша конструкция незначительно изменится. Компоненты аттрактора будем обозначать через γ_v. Ориентируем каждую из дуг γ_v, фиксируя концы $a_{v0} < a_{v1}$. Если система $\mathscr{S}$ неприводима, то подкопии первого порядка в γ_v можно занумеровать от 1 до $n_v = \#\big(E_v^{(1)}\big)$ так, что для любых $1 < i < n_v$ поддуга γ_{vi} пересекает только поддуги $\gamma_{v(i-1)}$ и $\gamma_{v(i+1)}$, причем $a_{v0} \in \gamma_{v1}$, $a_{v1} \in \gamma_{vn_v}$. Тем самым каждой паре v, i, где $i = 1, \dots, n_v$, сопоставим ребро $\eta(v,i) \in E_u^{(1)}$, для которого $\gamma_{\eta(v,i)} = \gamma_{vi}$.

1.6. Осевые подпространства (подробнее см. [6]). Мы будем пользоваться представлением подобий в $\mathbb{R}^d$, записывая их либо в виде $g(x) = q \cdot \mathscr{O}(x - x_0) + x_0$, где $q = \mathrm{Lip}(g)$, $q \neq 1$, — коэффициент линейного растяжения g, $\mathscr{O}$ — ортогональное преобразование в $\mathbb{R}^d$, которое мы будем называть *ортогональной частью* g, и x_0 — неподвижная точка g, либо при $q = 1$ — в виде $g(x) = (\mathscr{O}(x - x_0) + x_0) + y_0$, где вектор переноса y_0 содержится в неподвижном подпространстве преобразования $\mathscr{O}$. Аффинное подпространство $V \in \mathbb{R}^d$ коразмерности 2 назовем *осевым* для g, если $g(V) = V$, а сужение $\mathscr{O}|_{V^\perp}$ — поворот плоскости $V^\perp$ на ненулевой угол. Будем обозначать символом $\Delta(z, g)$ расстояние от точки z до ближайшего осевого подпространства преобразования g. Величина $\Delta(z, g)$ корректно определена для всякого подобия g, не являющегося гомотетией или переносом.

1.7. Локсодромы, порожденные подобиями в $\mathbb{R}^m$. Пусть T — сохраняющее ориентацию подобие в $\mathbb{R}^d$. Пусть $T(x) = q\mathscr{O} \cdot (x - x_0) + x_0$ — представление T в виде композиции растяжения с коэффициентом q и ортогонального преобразования $\mathscr{O}$ с неподвижной точкой x_0. Для всякого действительного t положим $T^t(x) = q^t \mathscr{O}^t \cdot (x - x_0) + x_0$.

Кривую $L(T, x) = \{T^t(x),\ t \in \mathbb{R}\}$ будем называть *m-мерной локсодромой, ассоциированной с подобием T.*

Если $\eta = \{T^t(x),\ t \in [0, h]\}$ — дуга локсодромы $L(T, x)$, то *углом искривления ν* дуги локсодромы η назовем наибольший из углов, образованных касательными векторами $\tau(t_1)$ и $\tau(t_2)$, $t_1, t_2 \in J$, к кривой η.

В [6] доказаны следующие утверждения.

Лемма 1.3. *Пусть T — сохраняющее ориентацию подобие в $\mathbb{R}^d$ и a — точка в $\mathbb{R}^d$, не принадлежащая ни одному из осевых подпространств V_k подобия T. Если $d(a,T(a)) = \delta < \Delta(a,g)/3$, то для дуги локсодромы $\eta = \{T^t(a),\ t \in [0,1]\}$, будет $\operatorname{diam}(\eta) = d(a,T(a))$, а угол ν искривления дуги η не превосходит $\frac{\pi\delta}{3\Delta(a,g)}$.*

Следствие 1.4. *Если в условиях леммы 1.3 $\Delta(a,g) > \delta^2/3\varepsilon$, то дуга η лежит в ε-окрестности прямолинейного отрезка $[a,T(a)]$.*

§ 2. Самоподобные мультицупперы

Пусть $G = (V,E)$ — ориентированный мультиграф с множеством вершин V и множеством ребер E, а $(X_u)_{u\in V}$ — полные метрические пространства. В каждом из пространств X_u зададим конечную последовательность точек $\bigl\{x_0^{(u)}, x_1^{(u)}, \dots, x_{m_u}^{(u)}\bigr\}$, где $m_u = \#E_u^{(1)}$, $m_u \geq 2$. Каждому из индексов $k = 1,\dots,m_u$ поставим в соответствие вершину $v = v(u,k) \in V$ и ребро $e = e(u,k) \in E_{uv}$ мультиграфа G. С каждым из таких ребер свяжем подобие $S_e : X_v \to X_u$, переводящее точки $x_0^{(v)}, x_{m_v}^{(v)} \in X_v$ в точки $x_{k-1}^{(u)}, x_k^{(u)} \in X_u$. Потребуем, чтобы длины звеньев $\bigl\{x_{k-1}^{(u)}, x_k^{(u)}\bigr\}$ и подобия S_e были выбраны так, что для любого цикла $\sigma = e_1 \dots e_k$, $\sigma \in E_{uu}^{(k)}$, подобие S_{uu} было сжимающим.

Полученную граф-ориентированную систему подобий $\mathscr{Z} = \{S_e\}$ назовем *мультициппером с образующим графом G и узловыми точками $x_k^{(u)}$*.

Конструкция мультициппера обеспечивает связность компонент K_u его аттрактора (см. [5]).

Мультициппер будем называть *жордановым*, если для каждого $u \in V$ множество K_u — жорданова кривая. Мультициппер $\mathscr{Z}$ будет называться *регулярным*, если его образующий граф $G = (V,E)$ сильно связен.

Предложение 2.1. *Пусть $\mathscr{S}$ — граф-ориентированная система подобий с жордановым аттрактором $\vec{\gamma}$. $\mathscr{S}$ является жордановым мультициппером тогда и только тогда, когда для любых $e, e' \in E$ множество $\gamma_e \cap \gamma_{e'}$ либо пусто, либо одноточечно.* $\square$

Таким образом, для жорданова мультициппера с аттрактором $\vec{\gamma}$ поддуги $\gamma_e, e \in E_u$ образуют разбиение его компонент $\gamma_u, u \in V$.

Предложение 2.2. *Пусть $\mathscr{Z}$ — жорданов мультициппер. Тогда $\mathscr{Z}$ удовлетворяет сильному условию открытого множества.*

Доказательство. Обозначим аттрактор мультициппера $\mathscr{Z}$ через $\vec{\gamma} = \{\gamma_u, u \in V\}$, а каждую из поддуг $S_{e(u,k)}(\gamma_{v(u,k)})$ — через γ_{uk}.

В самом деле, для каждой точки $x \in \dot{\gamma}_{uk}$ существует такое $\delta_x > 0$, что шар $B(x,\delta_x)$ не пересекается ни с одной из поддуг γ_{uj}, $j \neq k$. Рассмотрим множества $W_{uk} = \bigcup\limits_{x\in\dot{\gamma}_{u,k}} B(x,\delta_x/2)$. Из построения этих множеств следует, что $W_{uk} \supset \dot{\gamma}_{uk}$ и что $W_{uk} \cap W_{uj} = \varnothing$ при $j \neq k$.

Для каждого $w \in V$ зададим множество $H_w = \{(u,k) : v(u,k) = w\}$. Положим $\mathscr{O}_w = \bigcap\limits_{(u,k)\in H_w} S_{e(u,k)}^{-1}(W_{uk})$.

Полученные множества $\mathscr{O}_w$ открыты, содержат дуги $\dot{\gamma}_w$ и для любых различных $i,j = 1,\dots,m_u$ множество $S_{e(u,i)}(\mathscr{O}_{v(u,i)}) \cap S_{e(u,j)}(\mathscr{O}_{v(u,j)})$ пусто. $\square$

Замечание. Из полученного условия открытого множества непосредственно вытекает выполнение слабого условия отделимости для $\mathscr{Z}$ (см. [8, 11]). Существуют такое $\delta > 0$ и такие $x_u \in \gamma_u$, что для каждого $u \in V$ шар $B(x_u,\delta)$

целиком содержится в множестве $\mathscr{O}_u$. Тогда $|g^{-1}h(x) - x| > \delta$ для любых двух отображений $g, h \in F_{uu}$.

§ 3. Леммы о накоплении поддуг

Определение 3.1. Пусть γ_1, γ_2 — жордановы дуги в $\mathbb{R}^d$. Будем говорить, что γ_1 и γ_2 имеют *правильное пересечение*, если множество $\gamma_1 \cap \gamma_2$ является невырожденной поддугой в γ_1 и γ_2, один из концов которой является концом дуги γ_1, а другой — концом γ_2.

Лемма 3.2. *Пусть жорданова дуга γ с концами a_0, a_1 инвариантна относительно полугруппы $\mathscr{G} = \{S_i\}$ инъективных сжимающих подобий пространства $\mathbb{R}^d$, а аффинная оболочка множества $\{\mathrm{fix}\{S_i\}, S_i \in \mathscr{G}\}$ совпадает с аффинной оболочкой γ. Пусть существует такая последовательность подобий $g_n \neq \mathrm{Id}$, что*

(a1) $g_n \to \mathrm{Id}$,

(a2) *для всех $n \in \mathbb{N}$ дуги $g_n(\gamma)$ и γ имеют правильное пересечение,*

(a3) $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(\gamma) \cap \gamma = \gamma$.

Тогда γ — отрезок прямой.

Доказательство. Не ограничивая общности, мы можем считать, что дуга γ находится в общем положении, т. е. что пространство $\mathbb{R}^d$ совпадает с аффинной оболочкой дуги γ. Зададим на γ ориентацию, при которой $a_0 < a_1$.

Шаг 1. Последовательность g_n можно выбрать так, чтобы помимо условий (a1)–(a3) выполнялись условия

(a4) все подобия g_n сохраняют ориентацию на γ,

(a5) $g_n(a_0) > a_0$ для любого n.

Выберем положительное $\delta < d(a_0, a_1)/4$ и найдем такое N, чтобы при $n > N$ и $x \in \gamma$ выполнялись неравенства $d(x, g_n(x)) < \delta$, $d\big(x, g_n^{-1}(x)\big) < \delta$ и $d(\gamma, g_n(\gamma) \cap \gamma) < \delta$. Рассмотрим поддугу $g_n(\gamma) \cap \gamma = [y_0, y_1]$. Так как оба расстояния $d(a_0, g_n(a_1))$, $d(a_1, g_n(a_0))$ больше $3d(a_0, a_1)/4$, а расстояния $d(a_0, y_0), d(a_1, y_1)$ меньше δ, возможны два случая:

(i) $y_0 = a_0$ и $y_1 = g_n(a_1)$,

(ii) $y_0 = g_n(a_0)$ и $y_1 = a_1$.

В каждом из случаев (i), (ii) легко проверяется, что g_n сохраняет ориентацию на дуге γ. В случае (i) включение $a_0 \in (g_n(a_0), g_n(a_1))$ влечет $g_n^{-1}(a_0) > a_0$.

Поэтому, отбрасывая первые N членов последовательности и заменяя g_n на g_n^{-1} в случае (i), получим подпоследовательность, удовлетворяющую условиям (a1)–(a5). Будем далее ее обозначать через g_n.

Шаг 2. Справедливо утверждение

(a6) *для любого $x \in \gamma$ такого, что $g_n(x) \in \gamma$, имеет место неравенство $g_n(x) > x$.*

В самом деле, если $g_n(x) \leq x$, то выполняются противоположные строгие включения $g_n([a_0, x]) \subset [a_0, x]$ и $g_n([x, a_1]) \supset [x, a_1]$. Из первого включения следует, что $\mathrm{Lip}(g_n) < 1$, а из второго — что $\mathrm{Lip}(g_n) > 1$; противоречие.

(a7) *Для любой поддуги $\gamma' \subset \gamma$ существует такое N, что при $n > N$ дуги γ' и $g_n(\gamma')$ имеют правильное пересечение и $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(\gamma') \cap \gamma' = \gamma'$.*

Заметим, что

$$\lim_{n\to\infty} (g_n([a_0, x]) \cap \gamma) = [a_0, x] \quad \text{для } x \in \dot{\gamma} \tag{α}$$

тогда и только тогда, когда

$$\text{существует такой номер } N, \text{ что } g_n(x) \in \gamma \text{ для всех } n > N. \qquad (\beta)$$

Ясно, что (β) следует из (α) автоматически. Допустим теперь, что $g_n(x) \in \dot\gamma$ при $n > N$. Тогда из $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x) = x$ и $g_n(x) \in \dot\gamma$ вытекает, что $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{diam}([x, g_n(x)]) = 0$, поэтому $\lim\limits_{n\to\infty}(g_n([a_0, x]) \cap \gamma) = [a_0, x]$.

Для поддуги $\gamma' = [x_0, x_1]$ пусть $B(\gamma')$ — множество всех тех $x \in \gamma'$, для которых $\lim\limits_{n\to\infty}(g_n([x_0, x]) \cap \gamma') = [x_0, x]$. Множества $B(\gamma')$ замкнуты. Множество $B(\gamma)$ содержит все $x \in \dot\gamma$, для которых $\operatorname{diam}([a_0, x]) < \operatorname{diam}(\gamma)$. В самом деле, если δ таково, что $(1 + \delta)\operatorname{diam}([a_0, x]) < \operatorname{diam}(\gamma)$, а $x \notin B(\gamma)$, то для любого N существует такое $n > N$, что $g_n(x) \notin \gamma$, а $\frac{\operatorname{diam}([g_n(a_0), a_1])}{\operatorname{diam}([a_0, x])} > 1 + \delta$; тогда поскольку $g_n([a_0, x]) \supset [g_n(a_0), a_1]$, то $\operatorname{Lip}(g_n) > 1 + \delta$, что противоречит условию (a1). В то же время если $x_0 \in B(\gamma)$, $x \neq a_1$, то для дуги $\gamma' = [x_0, a_1]$ также выполняются все условия (a1)–(a6), поэтому и множество $B(\gamma')$ содержит некоторый интервал с началом в x_0. Но если $x_0 \in B(\gamma)$, то $B(\gamma') \subset B(\gamma)$. Таким образом, $B(\gamma)$ открыто и замкнуто в γ. Значит, $B(\gamma) = \gamma$.

Если для любого $x \in \gamma$ имеем $\lim\limits_{n\to\infty}(g_n([a_0, x]) \cap \gamma) = [a_0, x]$, то для любых $x_0 < x_1 \in \gamma$ будет $\lim\limits_{n\to\infty}(g_n([x_0, x_1]) \cap \gamma) = [x_0, x_1]$, откуда непосредственно следует свойство (a7).

Заметим, что *если последовательность (g_n) содержит бесконечное множество членов, являющихся гомотетиями или переносами, то γ — отрезок прямой.* В самом деле, возьмем $\varepsilon > 0$ и найдем такое n, что g_n — гомотетия или перенос и $\operatorname{diam}([x, g_n(x)]) < \varepsilon$ для любого $x \in \gamma \cap g_n^{-1}(\gamma)$. Так как по условию (a6) дуга γ не содержит неподвижной точки подобия g_n, для некоторого $M_n \in \mathbb{N}$ точки $g_n^k(a_0)$, $k = 0, 1, \dots, M_n$, образуют ε-сеть в γ. Поскольку они лежат на прямой, дуга γ содержится в ε-окрестности некоторого прямолинейного отрезка. В силу произвольности выбора ε дуга γ сама является отрезком прямой.

Поэтому мы можем далее предполагать, что

(a8) члены последовательности g_n не являются гомотетиями или переносами и потому для подобий g_n корректно определена величина $\Delta(a_0, g_n)$ (см. п. 1.6).

Шаг 3. Последовательность g_n можно заменить новой последовательностью g'_n, удовлетворяющей условиям (a1)–(a8), и, кроме того,

(a9) *последовательность расстояний $\Delta_n = \Delta(a_0, g'_n)$ от a_0 до ближайшего осевого подпространства подобия g'_n стремится к бесконечности.*

Рассмотрим последовательность тех осевых подпространств V_n подобий g_n, для которых $d(a_0, V_n) = \Delta_n$. Переходя, если необходимо, к подпоследовательности, мы можем полагать, что либо $\Delta_n \to \infty$ (что и требуется доказать), либо последовательность V_n стремится к некоторому предельному аффинному подпространству V_0.

Допустим, что реализуется вторая возможность.

Поскольку аффинная оболочка дуги γ — все пространство $\mathbb{R}^d$, то γ не лежит целиком в V_0, потому существует такое подобие $S_i \in \mathscr{G}$, что S_i сохраняет ориентацию на γ, а $\operatorname{fix}(S_i) \notin V_0$. При этом мы можем полагать, что для некоторого $\delta > 0$ имеем $d(\operatorname{fix}(S_i), V_n) \geq \delta$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Обозначим точку $\operatorname{fix}(S_i)$ через c, $\operatorname{Lip}(S_i)$ — через q_i, а расстояния $d(c, V_n)$ — через Δ'_n. В силу сходимости $V_n \to V_0$ имеем $\Delta'_n \to \Delta'_0$.

Для каждого $k = 1, 2, \ldots$ рассмотрим последовательность $g_n^{(k)} = s_i^{-k} g_n s_i^k$. Поскольку $g_n^{(k)}(\gamma) \cap \gamma = s_i^{-k}\left(g_n(s_i^k(\gamma)) \cap s_i^k(\gamma)\right)$, в силу условия (a7) для любого k существует такое N_k, что при $n > N_k$ для элементов последовательности $g_n^{(k)}$ выполняются условия (a1)–(a8).

Так как инвариантными аффинными подпространствами преобразований $g_n^{(k)}$ являются множества $V_n^{(k)} = s_i^{-k}(V_n)$, то $d\big(c, V_n^{(k)}\big) \to q_i^{-k}\Delta_0'$ при $n \to \infty$.

Для каждого k выберем $n_k > N_k$ так, чтобы последовательность n_k возрастала, выполнялось неравенство $\left|d\big(c, V_n^{(k)}\big) - q_i^{-k}\Delta_0'\right| < 1$, а последовательность $h_k = g_{n_k}^{(k)}$ стремилась к Id. Тогда последовательность h_k удовлетворяет условиям (a1)–(a9).

Шаг 4. Учитывая условия (a1) и (a9), найдем такое h_n, что для любого $x \in \gamma$ будет $d(x, h_n(x)) < \varepsilon/3$, а

$$\Delta(a_0, h_n) > \frac{\operatorname{diam}(\gamma)^2}{\varepsilon}. \tag{1}$$

Рассмотрим последовательность точек $h_n^k(a_0)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. При $h_n^k(a_0) \in \gamma$ имеем $d\big(h_n^k(a_0), h_n^{k+1}(a_0)\big) < \varepsilon/3$, а если $h_n^{k+1}(a_0) \in \gamma$, то $h_n^k(a_0) < h_n^{k+1}(a_0)$.

Так как $\operatorname{fix}(h_n) \notin \gamma$, существует $M_n = \min\big\{k > 0,\ h_n^{k+1}(a_0) \notin \gamma\big\}$. При этом точки $h_n^k(a_0)$, $k = 0, 1, 2, \ldots M_n$, образуют конечную ε-сеть в γ и лежат на дуге локсодромы $\eta = \{T^t(a_0),\ t \in [0, 1]\}$, где $T = h_n^{M_n}$. В силу условия (1) согласно лемме 1.4 эти точки содержатся в ε-окрестности прямолинейного отрезка $\big[a_0, h_n^{M_n}(a_0)\big]$. Так как $d\big(a_1, h_n^{M_n}(a_0)\big) < \varepsilon/3$, точки $h_n^k(a_0)$, $k = 0, 1, \ldots M_n$, лежат в $2\varepsilon/3$-окрестности прямолинейного отрезка $[a_0, a_1]$. Поэтому точки дуги γ находятся от отрезка $[a_0, a_1]$ на расстоянии, меньшем ε. С учетом произвольности выбора ε дуга γ совпадает с $[a_0, a_1]$. $\square$

Лемма 3.3. *Пусть $\mathscr{S}$ — регулярная граф-ориентированная система подобий с жордановым аттрактором $\vec{\gamma}$. Пусть $A_\delta(\vec{\gamma})$ — множество всех поддуг α диаметра $\geq \delta$, являющихся связными компонентами пересечений $h(\gamma_u) \cap \gamma_v$, где $u, v \in V$, а $h : X_u \to X_v$ — подобие. Если $A_\delta(\vec{\gamma})$ бесконечно, то все γ_u — отрезки прямой.*

Доказательство. Пусть

$$q_{\min} = \min_{u \in V}\left(\min_{1 \leq i \leq n_u} \frac{\operatorname{diam}(\gamma_{ui})}{\operatorname{diam}(\gamma_u)}\right)$$

— наименьшее отношение диаметров подкопий первого ранга к диаметру содержащей ее компоненты. Пусть

$$\widehat{E}(\delta) = \{\sigma \in E^{(*)} : q_{\min}\delta/2 < \operatorname{diam}(\gamma_\sigma) \leq \delta/2\},$$

а $\widehat{E}_u(\delta) = \widehat{E}(\delta) \cap E_u^{(*)}$. Семейство поддуг $\{\gamma_\sigma : \sigma \in \widehat{E}_u(\delta)\}$ покрывает γ_u, а для всякой дуги $\gamma' \subset \gamma_u$, $\operatorname{diam}(\gamma') \geq \delta$, существует такое $\sigma \in \widehat{E}_u(\delta)$, что $\gamma_\sigma \subset \gamma'$.

Возьмем дугу $\alpha \in A_\delta(\vec{\gamma})$, $\alpha \subset h(\gamma_u) \cap \gamma_v$. Пусть $q_h = \operatorname{Lip}(h)$. Существует такой путь $\sigma \in \widehat{E}_u\big(q_h^{-1}\delta\big)$, что $\gamma_\sigma \subset h^{-1}(\alpha)$. Положим $\alpha' = h(\gamma_\sigma)$, $h' = h \cdot S_\sigma$, $u' = f^*(\sigma)$.

Проделав эту операцию для каждого $\alpha \in A_\delta(\vec{\gamma})$, получим новое множество $A'_\delta(\vec{\gamma})$ всех поддуг $\alpha' = h'(\gamma_{u'}) \subset \gamma_v$ диаметра $\geq \delta/q_{\min}$, равномощное $A_\delta(\vec{\gamma})$.

Если множество $A_\delta(\vec{\gamma})$ бесконечно, то найдутся такие вершины $u, v \in V$ и такая последовательность подобий $h_n : X_u \to X_v$, что поддуги $h_n(\gamma_u) = \alpha_n \in$

$A'_\delta(\vec{\gamma})$ попарно различны. Так как $q_{\min}\delta/2 < \operatorname{diam}(\alpha_n) \le \delta/2$, последовательность подобий h_n можно выбрать так, что $\lim\limits_{n\to\infty} h_n = h_0$. Поскольку множество неподвижных точек подобий S_σ, $\sigma \in E_{uu}^{(*)}$, плотно в γ_u, последовательность подобий $g_n = h_n^{-1} \cdot h_0$ и дуга γ_u удовлетворяют условиям леммы 3.2. Тогда γ_u — отрезок прямой. Так как система $\mathscr{S}$ регулярна, все γ_v являются отрезками прямой. $\square$

§ 4. Разбиение на элементарные поддуги

В этом параграфе мы покажем, как построить разбиение самоподобной дуги на конечное число поддуг, каждая из которых, в свою очередь, допускает разбиение на поддуги, подобные исходным.

Теорема 4.1. *Пусть $\mathscr{S}$ — регулярная граф-ориентированная система подобий в $\mathbb{R}^d$ с жордановым аттрактором $\vec{\gamma}$. Если одна из компонент γ_u аттрактора $\vec{\gamma}$ отлична от отрезка прямой, то существует мультициппер $\mathscr{Z}$, множество компонент аттрактора которого содержит каждую из дуг γ_u.*

Прежде всего определим множество $\mathscr{P} = \bigcup\limits_{v\in V} \mathscr{P}_v$, точки которого будут задавать искомое разбиение.

Пусть $\vec{\gamma} = (\gamma_v)_{v\in V}$ — жорданова вектор-дуга. Обозначим через $\mathscr{G}_{vu}$ множество всех таких подобий $g : X_u \to X_v$, что множество $\gamma_v \cap g(\gamma_u)$ содержит в качестве связной компоненты невырожденную поддугу $\gamma_g \subset \gamma_v$, концами которой являются точки $g(a_{ui}), a_{vj}$, где i, j равно 0 или 1; положим $\mathscr{G}_v = \bigcup\limits_{u\in V} \mathscr{G}_{vu}$. Обозначим также через $\mathscr{P}_v$ множество всех точек $g(a_{ui})$, где $g \in \mathscr{G}_v$, а $g(a_i) \in \gamma_g \cap \dot{\gamma}_v$. Кроме того, включим в множество $\mathscr{P}_v$ концы дуги γ_v. Положим $\mathscr{G} = \bigcup\limits_{v\in V} \mathscr{G}_v$ и $\mathscr{P} = \bigcup\limits_{v\in V} \mathscr{P}_v$.

Отметим два свойства множества $\mathscr{P}$, непосредственно вытекающие из его определения.

(b1) Пусть $g : X_u \to X_v$ — подобие в $\mathbb{R}^d$ такое, что $g(\gamma_u) \subset \gamma_v$. Тогда всякая точка множества $\mathscr{P}_v$, содержащаяся внутри поддуги $g(\gamma_u)$, принадлежит также множеству $g(\mathscr{P}_u)$.

(b2) Пусть g_1, g_2 — два таких подобия, что $g_1(\gamma_{u_1})$, $g_2(\gamma_{u_2})$ — поддуги в γ_v, имеющие правильное пересечение. Тогда конец поддуги $g_1(\gamma_{u_1})$, содержащийся в $g_2(\dot{\gamma}_{u_2})$, принадлежит множеству $g_2(\mathscr{P}_{u_1})$, и наоборот.

В случае, когда жорданова вектор-дуга $\vec{\gamma}$ является аттрактором неприводимой граф-ориентированной системы сжимающих подобий $\mathscr{S}$, из (b1) и (b2) вытекают следующие свойства.

(c1) Пусть $e \in \mathscr{E}_{uv}$. Тогда всякая точка множества $\mathscr{P}_v$, содержащаяся внутри поддуги $\gamma_e = S_e(\gamma_u)$, принадлежит также множеству $S_e(\mathscr{P}_u)$.

(c2) Пусть $i = 1, \dots, m-1$. Пусть $e = \eta(u, i)$, $e' = \eta(u, i+1)$, $v = f^*(e)$, $v' = f^*(e')$. Тогда конец поддуги $\gamma_e = S_e(\gamma_u)$, содержащийся в $\dot{\gamma}_{e'}$, принадлежит множеству $g_{e'}(\mathscr{P}_{u'})$, и наоборот.

Предложение 4.2. *Пусть жорданова вектор-дуга $\vec{\gamma}$ является аттрактором регулярной граф-ориентированной системы подобий $\mathscr{S}$, компоненты которого отличны от отрезка прямой. Пусть a_{v0}, a_{v1} — концы дуги γ_v. Тогда для каждого $v \in V$*

(d1) *множество* $\mathscr{P}_v$ *имеет в* γ_v *не более чем две предельные точки —* a_{v0} *и* a_{v1}*;*

(d2) *для каждого* $i = 0, 1$ *существует такая окрестность* U *точки* a_{vi}*, что из* $g(a_{uj}) \in U$, $g \in \mathscr{G}$*, следует* $g(\gamma_u) \ni a_{vi}$*;*

(d3) *если* $e \in E_{uv}$, $S_e(a_{vi}) = a_{uj}$*, то для некоторой окрестности* U *точки* a_{vi} *и окрестности* U' *точки* a_{uj} *отображение* S_e *— биекция* $U \cap \mathscr{P}_v$ *на* $U' \cap \mathscr{P}_u$*.*

Доказательство. Прежде всего покажем, что множество $\mathscr{P}_v$ не имеет предельных точек во внутренности дуги γ_v. В противном случае множество точек $\{g(a_k),\ g \in \mathscr{G}_v\}$ имеет предельную точку c, принадлежащую внутренности дуги γ_v. Тогда для одного из концов дуги γ_v, скажем для a_{v0}, существует последовательность отображений $g_n \in \mathscr{G}_v$, для которой $g_n(a_{v0}) \to c$. Для одного из концов a_{vi}, $i = 0, 1$, дуги γ_v последовательность поддуг γ_{g_n} содержит бесконечное множество поддуг γ'_k с концом a_{vi}. Эта подпоследовательность сходится к поддуге с концами c и a_{vi}. По лемме 3.3 дуга γ_v — отрезок прямой, что противоречит предположению леммы. Тем самым (d1) доказано.

Утверждение (d2) также непосредственно следует из леммы 3.3.

Если $g \in \mathscr{G}_v$, $g(\gamma_u) \ni a_{vi}$, а $S_e(\gamma_v) \subset \gamma_w$, $S_e(a_{vi}) = a_{wk}$, то отображение $g' = S_e \cdot g$ принадлежит множеству $\mathscr{G}_w$. Поэтому если U — удовлетворяющая утверждению (d2) окрестность точки a_{vi}, а $U' = S_e(U)$, то подобие S_e является биекцией $U \cap \mathscr{P}_v$ на $U' \cap \mathscr{P}_u$. $\square$

Фиксируя ориентацию дуг γ_v, упорядочим точки каждого множества $\mathscr{P}_v$ возрастанию. Таким образом, если множество $\mathscr{P}_v$ конечно, то будем считать, что $\mathscr{P}_v = \{p_0, \dots, p_{M_v}\}$, $p_0 = a_{v0}$, $p_{M_v} = a_{v1}$. Если же $\mathscr{P}_v$ бесконечно, то будем считать, что $\mathscr{P}_v = a_{v0} \cup \{\dots, p_{-1}, p_0, \dots, p_n, \dots\} \cup a_{v1}$.

Лемма 4.3. *Множество* $\mathscr{P}$ *содержит конечное подмножество* $\mathscr{P}'$*, для которого выполняются утверждения* (c1) *и* (c2).

Доказательство. Пусть $A = \{a_{vi},\ v \in V,\ i = 0, 1\}$ — множество концов дуг γ_v. Так как система $\mathscr{S}$ неприводима, для каждого из концов дуг a_{vi} существует такое единственное ребро $e \in E_{vu}$ графа G, что $S_e(\gamma_u) \ni a_{vi}$. При этом прообраз $S_e^{-1}(a_{vi})$ конца дуги также является концом a_{uj} дуги γ_u. Поэтому всякая точка в A обладает единственной индексной параметризацией, а A является конечным субинвариантным множеством, следовательно, по предложению 1.1 каждая его точка периодическая.

Для каждой из точек a_{vi} рассмотрим множество $Q = Q(v, i)$ всех тех пар (u, j), $u \in V$, $j = 0, 1$, для которых $a_{uj} \in A$, а периодические части в индексной параметризации точек a_{uj} и a_{vi} совпадают. Такие множества $Q(v, i)$ образуют разбиение множества A. Будем рассматривать Q как множество вершин ориентированного графа $Q = Q(v, i)$. Вершины (u, j), (u', j') графа Q соединены ребром, идущим из (u, j) в (u', j'), если $S_e(a_{u'j'}) = a_{uj}$ для некоторого $e \in E$. Каждый полученный таким образом граф Q содержит единственный цикл σ_Q, и для всякой вершины графа Q существует ровно одно исходящее из нее ребро. Такой граф Q можно получить, взяв ориентированное дерево, все ребра которого направлены к основанию, и отождествив одну из его вершин с основанием дерева.

Зафиксируем конец дуги $a_{v_0 i_0}$ и соответствующий ему граф Q и сопоставим каждой вершине (u, j) графа Q такую окрестность U_{uj} точки a_{uj} в γ_u, что

(f1) если $S_e(a_{uj}) = a_{wk}$, то $S_e(U_{uj}) \subset U_{wk}$;

(f2) если для $e \in E$, $S_e(a_{uj}) \in \dot{\gamma}_w$, то $S_e(U_{uj} \cap \dot{\gamma}_u) \cap \mathscr{P}_w = \varnothing$.

Это мы сделаем следующим образом. Для каждой пары $(u,j) \in Q_v$ рассмотрим множество $E_u \subset E$ всех входящих в u ребер e графа G. Для каждого $e \in E_{wu} \in E_u$, для которого $S_e(a_{uj}) \notin A_w$, существует такая окрестность W_e точки a_{uj}, что $S_e W_e \cap \mathscr{P}_w$ либо пусто, либо равно $\{S_e(a_{uj})\}$. Для каждого $e \in E_{wu}$, для которого $S_e(a_{uj}) \in A_w$, существует окрестность W_e точки a_{uj}, для которой $S_e|_{W_e \cap \mathscr{P}_u}$ — биекция $W_e \cap \mathscr{P}_u$ на $S_e(W_e) \cap \mathscr{P}_w$, а для любого отличного от e ребра $e' \in E_{wv}$ будет $S_e(W_e) \cap S_{e'}(\gamma_v) = \varnothing$. Пусть $W(u,j) = \bigcap\limits_{e \in E_u} W_e$.

Обозначим через $R(u,j)$ множество всех путей $p = e_1 \dots e_l$ длины $l \geq 0$ в Q, оканчивающихся в вершине (u,j) и не содержащих одинаковых ребер. Обозначим начальную вершину такого пути через (u_p, j_p). Положим $U_{uj} = \bigcap\limits_{p \in R(u,j)} S_p^{-1}(W(u_p, j_p))$.

Покажем, что множества U_{uj} удовлетворяют условиям (f1), (f2). Условие (f2) обеспечивается тем, что $U_{uj} \subset W_{uj}$. Покажем выполнение (f1).

Пусть e_0 — ребро графа Q, идущее из вершины (w,k) в вершину (u,j). Если (w,k) не лежит в цикле σ_Q, то для всякого пути $p = e_1 \dots e_n \in R(w,k)$ путь $e_0 p = e_0 e_1 \dots e_n$ содержится в множестве $R(u,j)$. Поэтому $S_{e_0}(U_{uj}) \subset W_{wk}$.

Если (w,k) является вершиной содержащегося в графе Q цикла, то это же верно для (u,j); множество $R(w,k)$ (соответственно $R(u,j)$) можно разбить на следующие три части:

1) множество R_1(соответственно R_1') путей, не содержащих ребер цикла σ_Q;
2) множество R_2 (соответственно R_1') путей, содержащих ребра σ_Q и не возвращающихся в (w,k) (соответственно (u,j));
3) циклический путь c (соответственно c') с началом и концом в (w,k) $((u,j))$.

При этом так как подобие S_c является сжимающим, то $S_c^{-1}(W(w,k)) \supset W(w,k)$. Поэтому

$$W_{wk} = \bigcap_{p \in R_1 \cup R_2} S_p^{-1}(W(u_p, j_p)) = \bigcap_{p \in R_1 \cup R_2 \cup cR_1} S_p^{-1}(W(u_p, j_p)).$$

Здесь символом cR_1 мы обозначаем множество всех путей $\{cp, p \in R_1\}$. Но так как $R_2 \cup cR_1 = e_0[R_1' \cup R_2]$, то

$$\bigcap_{p \in R_2 \cup cR_1} S_p^{-1}(W(u_p, j_p)) = S_{e_0}^{-1}\Big(\bigcap_{p \in R_1' \cup R_2'} S_p^{-1}(W(u_p, j_p))\Big).$$

Тем самым $S_{e_0}(U_{uj}) \subset U_{wk}$.

Положим

$$\mathscr{P}_u' = \mathscr{P}_u \setminus (U_{u0} \cup U_{u1}) \cup \{a_{u0}, a_{u1}\}.$$

Покажем, что полученное множество $\mathscr{P}'$ обладает требуемыми свойствами.

Пусть e — ребро графа G с началом в v и концом в u. Если $S_e(\gamma_u)$ не содержит концов γ_v, то $S_e(\gamma_u) \cap (U_{v0} \cup U_{v1}) = \varnothing$, а $S_e(U_{u0} \cup U_{u1}) \cap \mathscr{P}_v$ не содержит никаких точек, кроме, может быть, $S_e(a_{u0})$ и $S_e(a_{u1})$. Поэтому

$$S_e^{-1}(\mathscr{P}_v' \cap S_e(\gamma_u)) = S_e^{-1}(\mathscr{P}_v \cap S_e(\gamma_u)) \subset \mathscr{P}_u.$$

Допустим теперь, что $S_e(a_{uj}) = a_{vi}$. Не ограничивая общности, будем полагать $i = j = 0$. Тогда $S_e(U_{u0}) \subset U_{v0}$, а $S_e(U_{u1}) \cap \mathscr{P}_v$ не содержит никаких точек, кроме, может быть, $S_e(a_{u1})$. Поскольку $S_e(\mathscr{P}_u) \supset \mathscr{P}_v \cap S_e(\gamma_u)$, то

$$S_e(\mathscr{P}_u \setminus (U_{u0} \cup U_{u1}) \cup \{a_{u0}, a_{u1}\}) \supset (\mathscr{P}_v \setminus (U_{v0} \cup U_{v1}) \cup \{a_{v0}, a_{v1}\}) \cap S_e(\gamma_u),$$

или

$$S_e^{-1}(\mathscr{P}'_v \cap S_e(\gamma_u)) = S_e^{-1}(\mathscr{P}_v \cap S_e(\gamma_u)) \subset \mathscr{P}_u.$$

Тем самым мы получили множество $\mathscr{P}'$, удовлетворяющее условиям леммы. $\square$

В дальнейшем будем обозначать полученное конечное множество через $\mathscr{P} = (\mathscr{P}_v)_{v\in V}$, $\mathscr{P}_v = \{p_{v0}, \dots, p_{vM_v}\}$, а поддуги с концами $p_{v(i-1)}, p_{vi}$, на которые множество $\mathscr{P}_v$ разбивает γ_v, — через δ_{vi}.

Лемма 4.4. *Существуют такие функции $\mathscr{E} : (u, i) \to e(u, i) \in E_u^{(*)}$, $v(u, i) = f^*(e(u, i))$ и $k(u, i)$, определенные для $u \in V$, $i = 1, \dots, N_u$, что $1 \le k(u, i) \le M_{v(u,i)}$ и $\bigcup_{i=1}^{N_u} S_{e(u,i)}(\delta_{v(u,i),k(u,i)}) = \gamma_u$ и дуги $S_{e(u,i)}(\delta_{v(u,i),k(u,i)})$ образуют разбиение дуги γ_u; при этом для любого $i = 2, \dots, N_u$ дуги $S_{e(u(i-1)}(\delta_{v(u,(i-1)),k(u,(i-1))})$ и $S_{e(u,i)}(\delta_{v(u,i),k(u,i)})$ имеют общий конец, а при $|i-j| > 1$ дуги $S_{e(u,i)}(\delta_{v(u,i),k(u,i)})$ и $S_{e(u,j)}(\delta_{v(u,j),k(u,j)})$ не пересекаются.*

Кроме того, каждая из поддуг γ_{uj}, δ_{uk} также является объединением конечного числа следующих друг за другом поддуг $S_{e(u,i)}(\delta_{v(u,i),k(u,i)})$.

Доказательство. Так как система $\mathscr{S}$ неприводима, каждая поддуга γ_{ui}, $1 < i < n_u$, пересекается с двумя смежными поддугами $\gamma_{u,i-1}$, $\gamma_{u,i+1}$, причем $\gamma_{ui} \setminus (\gamma_{u,i-1} \cup \gamma_{u,i+1}) \ne \varnothing$. Для каждой из поддуг $\bar\gamma_{ui} = \gamma_{ui} \setminus (\dot\gamma_{u,i-1} \cup \dot\gamma_{u,i+1})$ ее концы в силу свойства (c2) лежат в $S_{\eta(u,i)}(\mathscr{P}_{f^*(\eta(u,i))})$; пусть это будут точки $S_\eta(p_{vk_i})$, $S_\eta(p_{vK_i})$, где $v = f^*(\eta(u, i))$. Дуга $\bar\gamma_{ui}$ однозначно представима как объединение $\bigcup_{j=k_i}^{K_i-1} S_\eta(\delta_{vj})$. Для каждой из поддуг $\gamma_{ui} \cap \gamma_{u(i+1)}$ существует ровно два разбиения — на поддуги $S_{\eta(u,i)}(\delta_{vj})$ и на поддуги $S_{\eta(u,i+1)}(\delta_{v'j})$, $v' = f^*(\eta(u, i+1))$; выберем одно из них. Объединив все вместе и перенумеровав, получим искомое разбиение. В силу свойства (c1) полученное разбиение является также и разбиением каждой из поддуг δ_{uk}. $\square$

Доказательство теоремы 4.1. Построим теперь жорданов мультициппер, для которого дуги δ_{uj} будут компонентами аттрактора. Каждая из дуг δ_{uj}, $j = 1, \dots, M_u$, является объединением конечного числа следующих друг за другом поддуг $S_{e(u,i)}(\delta_{v(u,i),k})$, образующих ее разбиение. Сопоставим каждой дуге δ_{uj} вершину $\tilde u \in \widetilde V$ вновь образуемого графа $\widetilde G$ и копию $X_{\tilde u}$ метрического пространства X_u. Будем записывать $\delta_{\widetilde w} = \delta_{uj}$. Каждой из поддуг $S_{e(u,i)}(\delta_{v(u,i),k})$ разбиения δ_{uj} сопоставим ребро $\tilde e \in \widetilde E_{\tilde u\tilde v}$ (где $\tilde v$ — соответствующая $\delta_{v(u,i),k}$ вершина графа $\widetilde G$) и подобие $S_{\tilde e} : X_{\tilde v} \to X_{\tilde u}$, совпадающее с $S_{e(u,i)}$. Отображение $\tilde\pi$, сопоставляющее каждой вершине $\tilde u \in \widetilde V$ вершину $u \in V$, для которой $\delta_{\tilde u} \subset \gamma_u$, и ребро $e \in E$ соответствующему ему ребру $\tilde e \in \widetilde E_{\tilde u\tilde v}$, является эпиморфизмом графа $\widetilde G$ на G, для которого из $e = \tilde\pi(\tilde e)$ следует, что $\mathrm{Lip}(S_{\tilde e}) = \mathrm{Lip}(S_e)$. Поэтому для всякого цикла $\tilde\sigma$ в $\widetilde G$ подобие $S_{\tilde\sigma}$ является сжимающим. Тем самым полученная система $\widetilde{\mathscr{S}}$ является граф-ориентированной системой подобий с образующим графом $\widetilde G$.

Из построения системы следует, что

$$\delta_{\tilde u} = \bigcup_{\tilde v\in\widetilde V} \bigcup_{\tilde e\in E_{\tilde u\tilde v}} S_{\tilde e}(\delta_{\tilde v}).$$

Таким образом, дуги δ_{uj} являются компонентами аттрактора системы $\widetilde{\mathscr{S}}$. Согласно предложению 2.1 система $\widetilde{\mathscr{S}}$ является жордановым мультициппером.

Чтобы построить мультициппер, аттрактор которого содержит компоненты, изометричные γ_u, изменим нашу конструкцию следующим образом. Рассмотрим граф G', множеством вершин V' которого является $V \cup \widetilde{V}$, а множеством ребер E' — объединение $\widetilde{E}$ и множества всех ребер $e_{u\tilde{v}}$, идущих из вершин $u \in V$ во все те вершины $\tilde{v} \in \widetilde{V}$, для которых $\delta_{\tilde{v}} \subset \gamma_u$; при этом $S_{e_{u\tilde{v}}}$ — естественное вложение поддуг разбиения $\delta_{\tilde{v}} \subset \gamma_u$. Компонентами аттрактора полученного мультициппера $\mathscr{S}'$, соответствующими вершинам $u \in V$, являются дуги γ_u. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Falconer K. J.* Fractal geometry: Mathematical foundations and applications. New York: John Wiley and Sons, 1990.
2. *Falconer K. J.* Techniques in fractal geometry. Chichester; New York: John Wiley & Sons, 1997.
3. *Bartholdi L., Grigorchuk R., Nekrashevych V.* From fractal groups to fractal sets. Available at www.arXiv.org:math.GR/0202001 v4 13 Sep 2002.
4. *Bandt Ch., Graf S.* Self-similar sets 7. A characterization of self-similar fractals with positive Hausdorff measure // Proc. Amer. Math. Soc. 1992. V. 114, N 4. P. 995–1001.
5. *Асеев В. В., Тетенов А. В., Кравченко А. С.* О самоподобных жордановых кривых на плоскости // Сиб. мат. журн. 2003. Т. 44, № 3. С. 481–492.
6. *Асеев В. В., Тетенов А. В.* О жордановых самоподобных дугах, допускающих структурную параметризацию // Сиб. мат. журн. 2005. Т. 46, № 4. С. 733–748.
7. *Mauldin R. D., Williams S. C.* Hausdorff dimension in graph directed constructions // Trans. Amer. Math. Soc. 1988. V. 309, N 2. P. 811–829.
8. *Edgar G. A., Das M.* Separation properties for graph-directed self-similar fractals // Topology Appl. 2005. V. 152, N 1–2. P. 138–156.
9. *Edgar G. A., Golds J.* A fractal dimension estimate for a graph-directed IFS of non-similarities // Indiana Univ. Math. J. 1999. V. 48, N 2. P. 429–448.
10. *Edgar G. A., Mauldin R. D.* Multifractal decompositions of digraph recursive fractals // Proc. London Math. Soc. III Ser. 1992. V. 65, N 3. P. 604–628.
11. *Zerner M. P. W.* Weak separation properties for self-similar sets // Proc. Amer. Math. Soc. 1996. V. 124, N 11. P. 3529–3539.

Статья поступила 2 ноября 2005 г.

Тетенов Андрей Викторович
Горно-Алтайский гос. университет, ул. Ленкина, 1, Горно-Алтайск 649000
atet@gasu.ru