

МАКСИМАЛЬНЫЕ ТРУБКИ ПРИ ДЕФОРМАЦИЯХ  
ТРЕХМЕРНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ  
КОНИЧЕСКИХ МНОГООБРАЗИЙ

С. Чой, Дж. Ли

**Аннотация:** Используя деформации гиперболических конических многообразий, Ходжсон и Керкгоф показали, что мощность множества трехмерных многообразий, полученных хирургиями Дена на гиперболических узлах и не допускающих гиперболическую структуру, конечна. Они поставили следующий вопрос: «Убывает ли квадрат длины меридиана, нормированный площадью, максимальной трубчатой окрестности сингулярного множества конического многообразия при изменении конических углов и возрастает ли, если к нему добавить квадрат конического угла?» В работе дан положительный ответ на этот вопрос в окрестности нулевых конических углов для бесконечного семейства гиперболических конических многообразий, полученных хирургиями Дена вдоль дополнений к зацеплению Уайтхеда. Основной используемый метод опирается на явные вычисления групп голономий с помощью  $A$ -полиномов и максимальных трубок. Один из ключевых инструментов — разложение в ряд Тейлора геометрической компоненты множества нулей  $A$ -полинома в терминах конических углов. Также показано, что последовательность данных разложений в ряд Тейлора для многообразий, полученных хирургиями Дена, сходится к разложению для предельного гиперболического многообразия.

**Ключевые слова:** гиперболическое многообразие, коническое многообразие, деформации.

§ 1. Введение

Недавно Ходжсон и Керкгоф [1] получили универсальную оценку числа негиперболических хирургий Дена на гиперболическом многообразии с одним каспом. Их доказательство основано на анализе вариации максимальных трубок вокруг сингулярностей в конических многообразиях фиксированного топологического типа при возрастании конических углов начиная с нуля.

Пусть  $M$  — ориентируемое 3-многообразие конечного объема с одним каспом, которое допускает полную гиперболическую структуру. Для каждого наклона  $\gamma$  на каспе многообразия  $M$  обозначим через  $M(\gamma)$  многообразие, полученное хирургией Дена вдоль  $\gamma$ . По теореме Громова и Тёрстона [2]  $M(\gamma)$  допускает метрику отрицательной кривизны, если длина кратчайшей кривой, лежащей на границе орисферической окрестности каспа и изотопной  $\gamma$ , больше  $2\pi$ . Однако в этом случае остается открытым вопрос: допускает ли  $M(\gamma)$  гиперболическую структуру?

Гиперболическое коническое многообразие размерности 3 — это многообразие, локально смоделированное на открытом подмножестве гиперболического

---

The first author gratefully acknowledges support from Korea Research Foundation (Grant KRF-2002-070-C00010).

пространства или на открытой области в открытом множестве, ограниченном двумя вполне геодезическими плоскостями, пересекающимися по геодезической и отождествленными эллиптической изометрией. По теореме Тёрстона о гиперболической хирургии Дена если  $\theta > 0$  мало, то  $M(\gamma)$  для любого  $\gamma$  допускает гиперболическую коническую структуру, чьим сингулярным множеством является добавленная замкнутая кривая с некоторым малым коническим углом  $\theta$ . Обозначим получившееся коническое многообразие через  $M_\theta(\gamma)$ . Очевидно, что гомотопический класс сингулярного множества соответствует замкнутой кривой, пересекающейся с  $\gamma$  один раз. (Исходное многообразие  $M$  мы часто будем рассматривать как  $M_0(\gamma)$  с коническим углом  $\theta = 0$ .)

У любого конического многообразия существует максимальная трубка вокруг его сингулярного множества. Если мы сможем ограничить снизу радиусы максимальных трубок, пока конический угол не достигнет  $2\pi$ , то получим гиперболическую структуру на  $M(\gamma)$  без сингулярностей. Пусть  $T$  — плоская торическая граница орисферической окрестности каспа в  $M$ . В [1] показано, что если нормированная длина (метрика на  $T$  выбрана так, что площадь  $T$  равна 1) геодезической на  $T$ , изотопной  $\gamma$ , больше 7.515, то мы можем ограничить снизу радиусы максимальных трубок в  $M_\theta(\gamma)$ , пока конический угол  $\theta$  не достигнет  $2\pi$ , и тем самым получить, что  $M(\gamma)$  гиперболическое. С учетом этого там же доказано, что существует не больше 60 негиперболических хирургий Дена на гиперболическом многообразии с одним каспом.

В одной из лекций Ходжсон и Керкгоф сформулировали следующий

**Вопрос.** Пусть  $\{M_\theta(\gamma) : 0 < \theta < \theta_0\}$  — непрерывное семейство гиперболических конических структур на  $M(\gamma)$  с вышеописанной сингулярностью. Пусть  $\mu = \mu(\theta)$  — длина хирургической кривой на границе  $T_\theta$  максимальной трубки вокруг сингулярного множества  $M_\theta(\gamma)$ , и пусть  $\hat{\mu} = \mu/\sqrt{\text{Area}(T_\theta)}$  — нормированная длина. Верно ли, что  $\hat{\mu}^2$  и  $\hat{\mu}^2 + \theta^2$  — убывающая и возрастающая функции переменной  $\theta$  на  $[0, \theta_0)$  соответственно?

Ходжсон и Керкгоф показали, что если ответ на этот вопрос положительный, то можно эффективно контролировать радиусы максимальных трубок (см. [3] для более детального описания).

Основной результат данной работы базируется на взаимосвязи между А-полиномами и коническими углами. Пусть  $M$  — гиперболическое многообразие конечного объема с двумя каспами, и пусть  $\{\mathcal{M}_1, \mathcal{L}_1\}$  — базис периферической подгруппы  $P$  фундаментальной группы  $\pi_1(M)$ , соответствующей первому каспу многообразия  $M$ . Выберем базис  $\{\mathcal{M}_2, \mathcal{L}_2\}$  для второй периферической подгруппы и зафиксируем эти два базиса. Пусть  $(p_1, q_1)$  и  $(p_2, q_2)$  обозначают пары взаимно простых целых чисел, а  $M(p_1, q_1)$  — 3-многообразие, полученное из  $M$  с помощью  $(p_1, q_1)$ -хирургии Дена на первом каспе. Пусть  $M(\infty, \infty)_\theta(p_2, q_2)$  обозначает гиперболическое коническое многообразие, у которого один касп соответствует первому каспу многообразия  $M$ , а на втором каспе выполнена  $(p_2, q_2)$ -хирургия Дена, где соответствующий заполненный тор имеет сингулярность конического типа с коническим углом  $\theta$ . Пусть  $M(p_1, q_1)_\theta(p_2, q_2)$  обозначает гиперболическое коническое многообразие, у которого на первом каспе выполнена  $(p_1, q_1)$ -хирургия Дена, а на втором —  $(p_2, q_2)$ -хирургия Дена с сингулярностью конического типа с коническим углом  $\theta > 0$ .

Характеристическое многообразие  $\text{SL}_2(\mathbb{C})$ -представлений фундаментальной группы многообразия  $M$  — это пространство следов  $\pi_1(M) \rightarrow \mathbb{C}$ , определенных взятием следов голономий фундаментальной группы  $\pi_1(M)$  (подробности

см. в [4]).

Характеристическое многообразие  $SL_2(\mathbb{C})$ -представлений фундаментальной группы многообразия  $M$ , которые оставляют голономии  $\mathcal{M}_1, \mathcal{L}_1$  параболическими, задает взаимосвязь между собственными значениями  $l_1$  и  $m_1$  голономий  $\mathcal{L}_1$  и  $\mathcal{M}_1$  — так в данной статье определяются  $A$ -полиномы. Так называемая геометрическая компонента множества нулей  $A$ -полинома — это компонента, полученная деформацией гиперболического многообразия, соответствующая коническим структурам второго каспа. Используя геометрическую компоненту  $A$ -полинома вместе с соотношением хирургии Дена

$$p \log \frac{m}{m_0} + q \log \frac{l}{l_0} = \frac{\sqrt{-1}\theta}{2},$$

мы можем получить разложения функций  $m$  и  $l$  в ряд Тейлора по переменной  $\theta$ , которые нам потребуются только с точностью до третьего порядка.

Аналогично определим  $A$ -полином многообразия  $M(p_1, q_1)$  относительно базиса  $\{\mathcal{M}_2, \mathcal{L}_2\}$ . Используя соотношение хирургии Дена, получим ряды Тейлора  $m_2$  и  $l_2$ , соответствующие геометрической компоненте  $A$ -полинома как функции переменной  $\theta$ .

В заключение докажем теорему 3.2, устанавливающую сходимость разложений  $l$  и  $m$  в ряд Тейлора по переменной  $\theta$  с точностью до третьего порядка, соответствующих  $A$ -полиному многообразия  $M(p, q)$ , к ряду Тейлора, соответствующему многообразию  $M(\infty, \infty)$ . В связи с громоздкостью доказательства эта теорема будет доказана в последнем § 6.

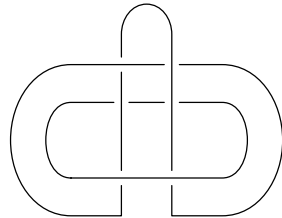


Рис. 1. Зацепление Уайтхеда.

Основной результат данной работы заключается в следующем утверждении: для бесконечного числа гиперболических многообразий  $\{W(p_1, q_1)\}$ , полученных из дополнения  $W$  к зацеплению Уайтхеда хирургией Дена на первом торическом крае, имеем частичный ответ на вопрос Ходжсона — Керкгофа. Пусть  $W$  — дополнение к зацеплению Уайтхеда (рис. 1), и пусть  $\mathcal{M}_1, \mathcal{L}_1, \mathcal{M}_2, \mathcal{L}_2$  — подобранные подходящим образом меридианы и параллели для двух концов  $W$ .

**Теорема 1.1.** Пусть  $\mu = \mu_{p_1, q_1, p_2, q_2}(\theta)$  — длина хирургической кривой на границе максимальной трубки  $W(p_1, q_1)_\theta(p_2, q_2)$  вокруг сингулярности. Пусть  $\hat{\mu} = \hat{\mu}_{p_1, q_1, p_2, q_2}(\theta)$  — нормированная длина хирургической кривой. Если  $|p_1| + |q_1|$  достаточно большое, то для любой пары  $p_2, q_2$  взаимно простых целых чисел, за исключением, быть может, одной,  $\hat{\mu}^2$  — убывающая, а  $\hat{\mu}^2 + \theta^2$  — возрастающая функции в точке  $\theta = 0$ .

Очевидно, это означает, что функция  $\hat{\mu}$  убывающая. Приведем набросок доказательства теоремы. Для гиперболического многообразия  $M$  конечного объема с отмеченным каспом определим орисферическую окрестность каспа, вычисляя элементы  $\pi_1(M)$ , голономии которых имеют достаточно большие изометрические сферы.

Используем эти элементы — так называемые связующие классы — для нахождения максимальной трубчатой окрестности сингулярности в  $M_\theta(p, q)$ , когда  $|p| + |q|$  большое, а  $\theta$  малое. Справедливость этого утверждения вытекает из того, что связующие классы стабильны в окрестности  $\theta = 0$ . (См. § 4 для более подробного описания.)

Теперь выразим длину  $\mu_{p,q}(\theta)$  и нормированную длину  $\hat{\mu}_{p,q}(\theta)$  хирургической кривой на максимальной трубке вокруг сингулярности в  $M_\theta(p,q)$  в терминах следов голономий коммутатора связующего класса и дополнительного элемента (см. предложение 4.2).

Сосредоточим наше внимание на  $W$ . Мы можем в точности вычислить представление группы голономий  $\pi_1(W)$ , соответствующее полной структуре, и определить связующий класс. Заметим, что  $W$  с полной гиперболической структурой распадается на четыре идеальных тетраэдра. Каждому тетраэдру поставим в соответствие с точностью до изометрии комплексный инвариант. Данные инварианты  $z_1, z_2, z_3, z_4$  удовлетворяют двум соотношениям, соответствующим двум идеальным ребрам  $W$ . Соотношения определяют некоторую комплексную поверхность, параметризующую все гиперболические структуры на  $W$  в окрестности полной гиперболической структуры.

Пусть  $m_1, l_1, m_2, l_2$  обозначают собственные значения голономий  $\mathcal{M}_1, \mathcal{L}_1, \mathcal{M}_2, \mathcal{L}_2$  соответственно. Мы можем записать их как функции от инвариантов тетраэдров  $z_1, z_2, z_3, z_4$ .

Далее вычислим представления группы голономий как функции некоторых легко определяемых переменных  $x, y$ . Нетрудно заметить, что  $x = m_1$ , и мы можем записать  $l_1$  как функцию переменных  $x$  и  $y$ . Таким образом, представления группы голономий являются функциями переменных  $m_1, l_1$ . Отсюда можно также найти два соотношения между  $m_1, l_1$  и  $m_2, l_2$ .

Выразим  $\hat{\mu}_{p_1, q_1, p_2, q_2}^2(\theta)$  как  $k_0(p_1, q_1, p_2, q_2) + k_1(p_1, q_1, p_2, q_2)\theta^2 + O(|\theta|^3)$ , где функции  $k_0$  и  $k_1$  определены для целых чисел  $(p_1, q_1, p_2, q_2)$  при достаточно больших  $|p_1| + |q_1|$  и  $|p_2| + |q_2|$ . По теореме 3.2  $k_1(p_1, q_1, p_2, q_2) \rightarrow k_1^\infty(p_2, q_2)$  при  $|p_1| + |q_1| \rightarrow \infty$  для некоторой функции  $k_1^\infty$ , принимающей значения в отрезке  $[K_1, K_2] \subset (-1, 0)$ .

Отметим, что  $k_1^\infty(p_2, q_2)$  — соответствующая функция для  $W(\infty, \infty, p_2, q_2)$ . Применяя предыдущие рассуждения, мы можем вычислить данную функцию и тем самым доказать основную теорему.

В своей кандидатской диссертации Доути [5] под руководством Ходжсона получил аналогичный результат в случае дополнений к узлу «восьмерка». Результат настоящей работы обобщает его результат и дает возможность лучше понять действие хирургии Дена. В перспективе мы надеемся ответить на вопрос Ходжсона и Керкгофа в случае более общих многообразий и без ограничений на конический угол, хотя на данный момент, видимо, нет возможности построить общую теорию. Наш метод интересен тем, что его можно будет применить в дальнейшем для построения новых примеров и методов решений, которые мы сможем использовать для дальнейшего изучения и развития общей теории.

Мы благодарим Д. Купера, К. Ходжсона и С. Керкгофа за многочисленные обсуждения и помощь. Мы также благодарим факультет математики Стенфордского университета за гостеприимство во время написания настоящей статьи.

## § 2. Гиперболические конические многообразия и хирургия Дена

В этом параграфе мы напомним некоторые факты из теории гиперболических конических многообразий и гиперболической хирургии Дена. В конце параграфа мы приведем необходимый нам в дальнейшем результат Ноймана и Цагира [6].

Гиперболическое многообразие — это многообразие, наделенное римановой метрикой постоянной секционной кривизны  $-1$ . В настоящей статье мы рассматриваем только трехмерные ориентируемые многообразия. Обозначим односвязное полное гиперболическое многообразие через  $\mathbb{H}^3$ . Группа изометрий  $\mathbb{H}^3$ , сохраняющих ориентацию, образует группу Ли  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ . Если  $M$  — гиперболическое многообразие, то открытая окрестность каждой точки  $M$  изометрична открытому множеству в  $\mathbb{H}^3$ . Существуют изометрия  $\mathrm{dev}$  с универсального накрытия  $\widetilde{M}$  на  $\mathbb{H}^3$  и групповой гомоморфизм  $\rho : \pi_1(M) \rightarrow \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$  такой, что  $\mathrm{dev} \circ \gamma = \rho(\gamma) \circ \mathrm{dev}$  для каждого  $\gamma$  из группы преобразований наложения  $\pi_1(M)$ . Таким образом, гиперболическое многообразие изометрично фактор-пространству  $\mathbb{H}^3$  по действию дискретной группы сохраняющих ориентацию изометрий  $\mathbb{H}^3$ .

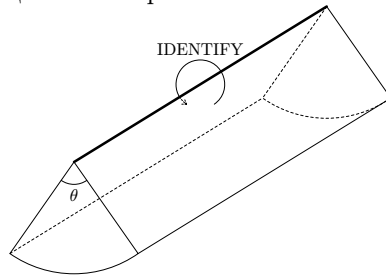


Рис. 2. Окрестность сингулярной точки в гиперболическом коническом многообразии.

Гиперболические конические многообразия возникают в контексте гиперболической хирургии Дена — Тёрстона и вызывают несомненный интерес [3, 7, 8]. Трехмерное многообразие  $N$ , наделенное метрикой, является гиперболическим коническим многообразием, если открытая окрестность каждой точки  $N$  изометрична открытому множеству в  $\mathbb{H}^3$  или метрическому фактор-пространству, полученному из открытого трехмерного шара в  $\mathbb{H}^3$  удалением области с границей, состоящей

из двух вполне геодезических плоскостей, пересекающихся по геодезической и отождествленных изометрией, оставляющей неподвижной данную геодезическую (рис. 2).

Множество всех точек гиперболического конического многообразия  $N$ , у которых не существует открытой окрестности, изометричной открытому множеству в  $\mathbb{H}^3$ , называется *сингулярным множеством* или *сингулярностью*  $N$  и обозначается через  $\Sigma_N$  (или  $\Sigma$ , если  $N$  очевидно из контекста). Сингулярное множество — это одномерное подмногообразие, которое является зацеплением, если  $M$  — замкнутое многообразие. Каждой компоненте сингулярного множества ставится в соответствие конический угол вокруг компоненты.

Пусть  $M$  — гиперболическое многообразие конечного объема с  $h$  каспами. Как показал Тёрстон,  $M$  можно продеформировать так, что оно будет иметь неполные гиперболические структуры, а метрические пополнения некоторых продеформированных структур индуцируют полные гиперболические конические структуры на многообразиях, полученных хирургиями Дена на концах многообразия  $M$ . Теорема о гиперболической хирургии Дена утверждает, что в большинстве случаев многообразие, полученное хирургией Дена на концах  $M$ , допускает полную гиперболическую структуру, т. е. структуру без сингулярностей конического типа.

Пусть  $M$  — гиперболическое многообразие конечного объема с  $h$  каспами, которое может быть получено хирургией Дена на некоторых концах идеально триангулированного гиперболического многообразия. Пусть  $\nu$  — число идеальных тетраэдров, а  $\mathcal{M}_1, \mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{M}_h, \mathcal{L}_h$  — фиксированные меридианы и параллели для концов  $M$ . Пусть полная гиперболическая структура  $M$  соответствует точке  $\mathbf{z}^0 = (z_1^0, \dots, z_\nu^0) \in \mathbb{C}^\nu$ . Тёрстон показал, что множество  $\mathcal{V}$ ,

состоящее из точек  $\mathbb{C}^\nu$  в окрестности  $\mathbf{z}^0$ , удовлетворяющих некоторому условию склейки, является гладким аналитическим подмножеством комплексной размерности  $h$  в  $\mathbb{C}^\nu$ . Показано [6], что отображения  $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_h) : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{C}^h$  и  $\mathbf{l} = (l_1, \dots, l_h) : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{C}^h$ , которые приписывают собственные значения образов голономий  $\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_h, \mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_h$ , соответственно, являются биголоморфными отображениями в точке  $\mathbf{z}^0$ .

Пусть  $(m_1^0, \dots, m_h^0) = \mathbf{m}(\mathbf{z}^0)$  и  $(l_1^0, \dots, l_h^0) = \mathbf{l}(\mathbf{z}^0)$ .

**Теорема 2.1** [6]. Для каждого  $i \in \{1, \dots, h\}$  существует голоморфная функция  $\tau_i$ , определенная в окрестности начала координат  $\mathbb{C}^h$ , такая, что

$$\log(l_i/l_i^0) = \log(m_i/m_i^0)\tau_i(\log(m_1/m_1^0), \dots, \log(m_h/m_h^0)).$$

Более того, функция  $\tau_i$  четна по каждой переменной для любого  $i$ , а  $\tau_i(0, \dots, 0)$  — модуль плоской структуры на торической границе окрестности каспа для  $i$ -го конца относительно  $\mathcal{M}_i, \mathcal{L}_i$ . В частности, каждое  $\tau_i(0, \dots, 0)$  является комплексным числом.

### § 3. $A$ -полиномы и обобщенные хирургии Дена

В данном параграфе определим так называемые  $A$ -полиномы для гиперболических многообразий с несколькими каспами относительно некоторого отмеченного каспа, которые мы будем также называть относительными  $A$ -полиномами. Мы определим геометрические компоненты алгебраического множества собственных значений голономий, т. е. множество нулей  $A$ -полинома. Разложим полиномиальные соотношения геометрических компонент в ряд Тейлора и приведем примеры. Затем мы покажем, как представить геометрическую компоненту в виде функции от конических углов. В заключение покажем, что ряд Тейлора геометрической компоненты многообразия, на одном каспе которого выполнена  $(p, q)$ -хирургия Дена, сходится к ряду Тейлора геометрической компоненты многообразия без хирургии при  $(p, q) \rightarrow (\infty, \infty)$ .

**3.1. Геометрические компоненты пространств представлений собственных значений.** Куллер и Шален [4] определили характеристическое многообразие трехмерного многообразия как алгебраическое множество следов голономий элементов фундаментальной группы, упорядоченных определенным образом.

Обобщим определение  $A$ -полинома из [9]. Пусть  $M$  — гиперболическое 3-многообразие по крайней мере с одним каспом. Зафиксируем касп и обозначим через  $P$  его фундаментальную группу. Обозначим через  $R(\pi_1(M))$  пространство представлений фундаментальной группы  $\pi_1(M)$  многообразия  $M$  в группу  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ , а через  $R(\pi_1(M))_P$  — подмножество тех представлений, сужение которых на замкнутые петли имеют параболические или тождественные образы во всех каспах, кроме  $P$ . Обозначим характеристическое многообразие  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ -представлений группы  $\pi_1(M)$  через  $X(M)$ , а каноническую сюръективную проекцию — через  $t : R(\pi_1(M)) \rightarrow X(M)$  (см. [4]). Будем писать  $R(M)$  вместо  $R(\pi_1(M))$ . Обозначим через  $X(M)_P$  образ  $R(M)_P$ . С учетом рассуждений из [4]  $X(M)_P$  является плотным подмножеством конечного объединения характеристик, которое обозначим через  $X''(M)_P$  (мы не утверждаем, что они равны).

Пусть  $B = \{\mathcal{L}, \mathcal{M}\}$  — фиксированный базис  $P$ . Определим отображение сужения  $r : X''(M)_P \rightarrow X(P)$ . Обозначим символом  $\Delta$  подпространство диагональных представлений в  $R(P)$ . Существует изоморфизм  $p_B : \Delta \rightarrow \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ ,

определенный равенством  $p_B(\rho) = (l, m)$ , где  $\rho$  задано следующим образом:

$$\rho(\mathcal{L}) = \begin{bmatrix} l & * \\ 0 & l^{-1} \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \rho(\mathcal{M}) = \begin{bmatrix} m & ** \\ 0 & m^{-1} \end{bmatrix}.$$

Проекция  $t$  индуцирует  $(2 - 1)$ -отображение  $t_\Delta : \Delta \rightarrow X(P)$ .

Обозначим через  $X'(M)_P$  объединение неприводимых компонент  $X''(M)_P$ , образы которых при отображении  $r$  имеют комплексную размерность 1. Для каждой компоненты  $Z'$  из  $X'(M)_P$  обозначим через  $Z$  кривую  $t_\Delta^{-1}(r(Z')) \subset \Delta$ . Определим  $D_{M,P}$  как объединение кривых  $Z$ , когда  $Z'$  пробегает компоненты  $X''(M)_P$ .

Будем говорить, что  $D_{M,P}$  является  $A$ -множеством многообразия  $M$  относительно  $P$ . Отметим, что  $A$ -множество инвариантно относительно инволюции  $(l, m) \mapsto (l^{-1}, m^{-1})$ .

Определим  $A$ -полином  $A_{M,P}$  многообразия  $M$  относительно  $P$  как определяющий полином замыкания  $D_{M,P}$  в  $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ . В случае многообразия  $M$  с одним каспом наше определение совпадает с определением из [9]. В очевидных ситуациях будем опускать символ  $P$  в  $A_{M,P}$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1.** Пусть  $M$  — гиперболическое многообразие с каспом, а  $B = \{\mathcal{L}, \mathcal{M}\}$  — базис фундаментальной группы окрестности каспа многообразия  $M$ . Предположим, что  $(l^0, m^0) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$  совпадает с одной из пар  $(\pm 1, \pm 1)$  и принадлежит множеству нулей  $A_M(l, m)$ . Пусть  $l(m)$  — голоморфная функция, определенная в окрестности (например,  $U$ )  $m^0$  и принимающая значения в окрестности  $l^0$ . Будем говорить, что голоморфная функция  $l = l(m)$ , определенная в окрестности  $(l^0, m^0) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ , является *геометрической кривой*  $A$ -множества в точке  $(l^0, m^0)$ , если существует голоморфное семейство  $\{\rho_m : m \in U\}$  представлений группы  $\pi_1(M)$  в группу  $SL_2(\mathbb{C})$  такое, что каждое  $\rho_m$  является поднятием представления группы голономий гиперболической структуры на  $M$  и

$$\rho_m(\mathcal{L}) = \begin{bmatrix} l(m) & * \\ 0 & 1/l(m) \end{bmatrix}, \quad \rho_m(\mathcal{M}) = \begin{bmatrix} m & ** \\ 0 & 1/m \end{bmatrix}.$$

Очевидно, что если  $l = l(m)$  является геометрической кривой  $A$ -полинома  $A_M(l, m)$  в точке  $(m^0, l^0)$ , то  $A(l(m), m) = 0$  для всех  $m$  в окрестности  $m^0$ .

**Предложение 3.1.** *Компонента  $A$ -множества содержит образ геометрической кривой как плотное множество.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО** проводится непосредственной проверкой.

*Геометрической компонентой* называется компонента  $A$ -множества, содержащая геометрическую кривую как плотное множество, а *геометрическим множителем* — порождающий идеала, определяющего вышеуказанную компоненту.

**ПРИМЕР.** Пусть  $M$  — дополнение к узлу «восьмерка». Представление Виртингера группы  $\pi_1(M)$  имеет вид

$$\langle \alpha, \beta : \alpha^{-1}\beta\alpha\beta^{-1}\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}\alpha\beta^{-1} \rangle,$$

где  $\{\alpha, \beta^{-1}\alpha\beta\alpha^{-2}\beta\alpha\beta^{-1}\}$  — базис периферической подгруппы фундаментальной группы  $\pi_1(M)$ .  $A$ -полином многообразия  $M$  относительно данного базиса имеет вид

$$A_M(l, m) = lm^8 - lm^6 - (l^2 + 2l + 1)m^4 - lm^2 + l.$$

Решая уравнение второго порядка по  $l$ , получим два решения  $l(m)$ , содержащих квадратные корни, и два множителя  $A_M(l, m)$ . Поскольку  $A_M(-1, -1) = 0$ , соответствующие множители можно разложить в ряд по  $m + 1$ :

$$l + 1 - 2\sqrt{-3}(m + 1) - (6 + \sqrt{-3})(m + 1)^2 - (6 - 2\sqrt{-3}/3)(m + 1)^3 + O(|m + 1|^4),$$

$$l + 1 + 2\sqrt{-3}(m + 1) - (6 - \sqrt{-3})(m + 1)^2 - (6 + 2\sqrt{-3}/3)(m + 1)^3 + O(|m + 1|^4).$$

Заметим, что длина сингулярной геодезической возрастает при возрастании конического угла начиная с нуля, т. е. при деформации полного гиперболического многообразия. Таким образом, первый множитель является геометрическим: если взять  $m = -\exp(i\theta)$ , то  $-l$  становится возрастающей функцией вещественной переменной  $\theta$  начиная с нуля.

**3.2. Ряд Тейлора геометрических кривых.** Пусть  $M$  — трехмерное многообразие, допускающее полную гиперболическую структуру конечного объема с одним каспом. Пусть  $\mathcal{M}, \mathcal{L}$  — фиксированная пара, состоящая из меридиана и параллели на конце многообразия  $M$ , а  $A_M(l, m)$  —  $A$ -полином многообразия  $M$  относительно данной пары.

Предположим, что деформации гиперболических структур на  $M$  в окрестности полной структуры задают следующее соотношение между собственными значениями  $m$  и  $l$  меридиана  $\mathcal{M}$  и параллели  $\mathcal{L}$  соответственно для поднятия представлений группы голономий в окрестности гиперболических структур:

$$l = l^0 + a_1(m - m^0) + \frac{a_2}{2}(m - m^0)^2 + \frac{a_3}{6}(m - m^0)^3 + O(|m - m^0|^4). \quad (1)$$

Здесь  $m^0$  и  $l^0$  — собственные значения поднятия представления группы голономий полной структуры. Таким образом,  $m^0$  и  $l^0$  принимают значения  $\pm 1$ .

Данное соотношение соответствует геометрическому множителю  $A$ -полинома  $A_M(l, m)$ .

Теперь опишем, как данное соотношение (в окрестности полной структуры) вместе с соотношением хирургии Дена

$$p \log \left( \frac{m}{m^0} \right) + q \log \left( \frac{l}{l^0} \right) = \frac{\sqrt{-1}\theta}{2} \quad (2)$$

позволит нам вычислить коэффициенты ряда Тейлора функций  $m$  и  $l$ . Для простоты предполагаем, что  $m^0 = l^0 = -1$ . В других случаях доказательство аналогично.

Напомним, что  $a_1$  не является вещественным числом, поскольку в общем случае будет модулем плоской структуры каспа относительно  $\{\mathcal{M}, \mathcal{L}\}$ , когда гиперболическая структура полна.

Так как  $a_1 \neq -p/q$  ввиду невещественности  $a_1$ , множества, определенные уравнениями (1) и (2), некасательны в точке  $m^0 = l^0 = -1$ . Мы будем рассматривать  $m$  и  $l$  как локально голоморфные функции переменной  $\theta$  в окрестности  $\theta = 0$ .

Наша цель — получить коэффициенты ряда Тейлора функций  $m$  и  $l$  в терминах  $\theta$  с точностью до третьего порядка. Последовательно дифференцируя уравнения (1) и (2) и вычисляя в точке  $\theta = 0$ , определим искомые коэффициенты.

Дифференцируя (2), получим

$$\frac{p}{m} \frac{dm}{d\theta} + \frac{q}{l} \frac{dl}{d\theta} = \frac{\sqrt{-1}}{2}, \quad (3)$$



и при  $\theta = 0$

$$p \frac{dm}{d\theta} \Big|_{\theta=0} + q \frac{dl}{d\theta} \Big|_{\theta=0} = -\frac{\sqrt{-1}}{2}. \tag{4}$$

С другой стороны, дифференцируя (1) и вычисляя в точке  $\theta = 0$ , имеем

$$\frac{dl}{d\theta} \Big|_{\theta=0} = a_1 \frac{dm}{d\theta} \Big|_{\theta=0}. \tag{5}$$

Из (3) и (4) вытекает, что

$$\frac{dm}{d\theta} \Big|_{\theta=0} = -\frac{\sqrt{-1}}{2(p+a_1q)}, \quad \frac{dl}{d\theta} \Big|_{\theta=0} = -\frac{a_1\sqrt{-1}}{2(p+a_1q)}.$$

Действуя таким же образом, получим

$$\frac{d^2m}{d\theta^2} \Big|_{\theta=0} = \frac{p+(a_1^2+a_2)q}{4(p+a_1q)^3}, \quad \frac{d^2l}{d\theta^2} \Big|_{\theta=0} = \frac{(a_1-a_2)p+a_1^3q}{4(p+a_1q)^3},$$

$$\begin{aligned} \frac{d^3m}{d\theta^3} \Big|_{\theta=0} &= \frac{i\{p^2+(6a_1^2-2a_1^3+6a_2-2a_1-3a_1a_2-a_3)pq\}}{8(p+a_1q)^5} \\ &\quad + \frac{i\{(a_1^4+3a_1^2a_2+3a_2^2-a_1a_3)q^2\}}{8(p+a_1q)^5}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^3l}{d\theta^3} \Big|_{\theta=0} &= \frac{i\{(a_1-3a_2+a_3)p^2\}}{8(p+a_1q)^5} \\ &\quad + \frac{i\{(6a_1^3-2a_1^4-2a_1^2-6a_1^2a_2-3a_2^2+3a_1a_2+a_1a_3)pq+a_1^5q^2\}}{8(p+a_1q)^5}, \end{aligned}$$

где  $i = \sqrt{-1}$ .

Напомним, что  $a_2 = a_1 - a_1^2$ , если кривая, заданная уравнением (1), инвариантна относительно инволюции  $(l, m) \mapsto (1/l, 1/m)$  в окрестности  $(l^0, m^0) = (-1, -1)$ . Таким образом, нами получены следующие формулы для  $m$ ,  $l$  и  $r \log(\frac{m}{m^0}) + s \log(\frac{l}{l^0})$  в терминах  $\theta$  при  $a_2 = a_1 - a_1^2$ :

$$m = -1 - \frac{\sqrt{-1}}{2(p+a_1q)}\theta + \frac{1}{8(p+a_1q)^2}\theta^2 + \sqrt{-1} \frac{(3a_1-3a_1^2+a_1^3-a_3)q}{48(p+a_1q)^4}\theta^3 + O(|\theta|^4), \tag{6}$$

$$l = -1 - \frac{a_1\sqrt{-1}}{2(p+a_1q)}\theta + \frac{a_1^2}{8(p+a_1q)^2}\theta^2 + \sqrt{-1} \frac{(-2a_1+3a_1^2+a_3)p+a_1^4q}{48(p+a_1q)^4}\theta^3 + O(|\theta|^4), \tag{7}$$

$$\begin{aligned} r \log(-m) + s \log(-l) \\ = \frac{\sqrt{-1}(r+a_1s)}{2(p+a_1q)}\theta + \frac{\sqrt{-1}(2a_1-3a_1^2+a_1^3-a_3)(ps-qr)}{48(p+a_1q)^4}\theta^3 + O(|\theta|^4). \end{aligned} \tag{8}$$

**3.3. Сходимость коэффициентов ряда Тейлора геометрических множителей А-полиномов.** Пусть  $M$  — 3-многообразие, допускающее полную гиперболическую структуру с двумя каспами, а  $\mathcal{M}_1, \mathcal{L}_1, \mathcal{M}_2$  и  $\mathcal{L}_2$  — фиксированные меридианы и параллели для концов  $M$ . Мы предполагаем, что  $M$

может быть получено хирургией Дена на некоторых концах идеально триангулированного гиперболического многообразия. Пусть  $\nu$  — число тетраэдров.

Мы имеем голоморфное вложение открытого множества  $V \subset \mathbb{C}^2$  в  $\mathbb{C}^\nu$ , образ которого является подмножеством  $\mathcal{V} \subset \mathbb{C}^\nu$ , состоящим из точек  $(z_1, \dots, z_\nu)$ , удовлетворяющих условиям склейки (см., например, [6]).

Тёрстон показал, что представления группы голономий в окрестности представления группы голономий полной гиперболической структуры на  $M$  имеют поднятия  $\rho_0$  на  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ . Пусть  $m_1^0, l_1^0, m_2^0, l_2^0$  — собственные значения  $\rho_0(\mathcal{M}_1)$ ,  $\rho_0(\mathcal{L}_1)$ ,  $\rho_0(\mathcal{M}_2)$ ,  $\rho_0(\mathcal{L}_2)$ . Каждое из  $m_1^0, l_1^0, m_2^0, l_2^0$  принимает значения 1 либо  $-1$ . Имеем голоморфное отображение из  $\mathcal{V}$  в  $\mathbb{C}^4$ , которое ставит в соответствие каждой точке  $\mathbf{z}$  множества  $\mathcal{V}$  собственные значения  $m_1, l_1, m_2, l_2$  образов  $\rho(\mathcal{M}_1)$ ,  $\rho(\mathcal{L}_1)$ ,  $\rho(\mathcal{M}_2)$ ,  $\rho(\mathcal{L}_2)$ , соответственно, где  $\rho$  — поднятие представления группы голономий, соответствующего точке  $\mathbf{z}$ . Более того, мы выбираем голоморфное отображение так, что значение  $(m_1, l_1, m_2, l_2)$  совпадает с  $(m_1^0, l_1^0, m_2^0, l_2^0)$  в точке множества  $\mathcal{V}$ , соответствующей полной структуре.

Если первый конец остается каспом, то собственные значения  $m_2$  и  $l_2$  удовлетворяют следующему соотношению:

$$l_2 = l_2^0 + a_1(m_2 - m_2^0) + \frac{a_2}{2}(m_2 - m_2^0)^2 + \frac{a_3}{6}(m_2 - m_2^0)^3 + O(|m_2 - m_2^0|^4).$$

Аналогично если  $p_1, q_1$  — взаимно простые целые числа и  $|p_1| + |q_1|$  большое, то  $m_2$  и  $l_2$  удовлетворяют соотношению

$$l_2 = l_2^0 + a_1^{p_1, q_1}(m_2 - m_2^0) + \frac{a_2^{p_1, q_1}}{2}(m_2 - m_2^0)^2 + \frac{a_3^{p_1, q_1}}{6}(m_2 - m_2^0)^3 + O(|m_2 - m_2^0|^4),$$

когда на первом конце выполнена хирургия Дена вдоль наклона  $(p_1, q_1)$ .

**Теорема 3.2.** Пусть  $M$  — гиперболическое многообразие с двумя каспами. Пусть  $M(p_1, q_1)$  — 3-многообразие, полученное  $(p_1, q_1)$ -хирургией Дена на первом каспе многообразия  $M$ . Пусть  $a_i$  —  $i$ -й коэффициент ряда Тейлора функции  $l_2$  переменной  $m_2$  в геометрическом множителе  $A$ -полинома второго каспа многообразия  $M$ , а  $a_i^{p_1, q_1}$  —  $i$ -й коэффициент в случае многообразия  $M(p_1, q_1)$ . Тогда  $a_i^{p_1, q_1} \rightarrow a_i$  при  $|p_1| + |q_1| \rightarrow \infty$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

Данный результат показывает сходимости последовательности коэффициентов ряда Тейлора геометрических компонент (определенных в п. 3.1)  $A$ -полиномов многообразий  $M(p_1, q_1)$ , полученных хирургией Дена на первом конце гиперболического многообразия  $M$  с двумя каспами. Хотя мы показали сходимость коэффициентов разложений с точностью только до третьего порядка, мы можем легко расширить наше доказательство и установить, что сходимость имеет место и для более высоких порядков.

Мы докажем теорему 3.2 в § 6.

#### § 4. Максимальные трубки в гиперболических конических многообразиях

В этом параграфе рассмотрим в общем случае максимальные трубки в гиперболических конических многообразиях. Сперва определим связующие классы, кратчайшие негомтопные пути, соединяющие сингулярности. Мы обсудим стабильность связующих классов при геометрической сходимости и получим формулу для радиуса максимальной трубки, используя следы некоторых элементов, включая коммутатор связующих классов. В заключение получим длину

и нормированную длину меридиана в терминах радиуса максимальной трубки, конических углов и длины сдвига.

У гиперболического многообразия конечного объема с отмеченным каспом существует окрестность каспа в виде оришара. Наибольшая из таких окрестностей называется *орисферической* или *максимальной окрестностью* каспа.

Аналогично гиперболическое коническое многообразие, сингулярным множеством которого является узел, имеет стандартные трубчатые окрестности сингулярного множества, а наибольшая из таких окрестностей называется *максимальной трубчатой окрестностью* или *максимальной трубкой вокруг сингулярного множества*.

Пусть  $M$  — гиперболическое многообразие конечного объема с каспом и  $P$  — периферическая подгруппа фундаментальной группы  $\pi_1(M)$ . Граница орисферической окрестности каспа — это тор, например  $T$ , который касается сам себя в конечном числе точек. В каждой точке касания  $x$  существует единственная геодезическая, ортогональная  $T$  в точке  $x$  и стремящаяся к концу каспа в обоих направлениях. Такая геодезическая соответствует единственным образом классу эквивалентности пространства двойных смежных классов  $P \backslash \pi_1(M) / P$ , т. е. классу эквивалентности относительно отношения  $\sim$ , определенного на  $\pi_1(M)$  по правилу  $\alpha \sim \beta$  тогда и только тогда, когда  $\alpha = \gamma_1 \beta \gamma_2$  или  $\alpha = \gamma_1 \beta^{-1} \gamma_2$  для некоторых  $\gamma_1, \gamma_2 \in P$ . В этом случае данный класс эквивалентности называют *связующим классом* подгруппы  $P$  или каспа, соответствующего подгруппе  $P$ .

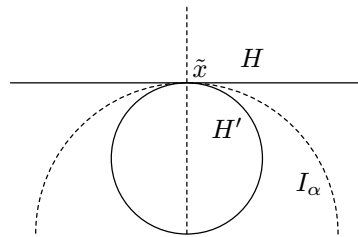


Рис. 3. Представитель связующего класса для орисферической окрестности каспа.

мым элемент  $\alpha$  группы  $\pi_1(M)$  такой, что  $\alpha(H') = H$  представляет связующий класс (рис. 3).

Связующий класс можно описать также следующим образом: представитель класса имеет наибольшие изометрические сферы относительно представлений  $\rho_0$ , где  $\rho_0(P)$  фиксирует  $\infty$ .

Определим связующий класс гиперболического конического многообразия. Пусть  $N$  — гиперболическое коническое многообразие, сингулярным множеством  $\Sigma$  которого является простая замкнутая кривая, а конический угол меньше  $2\pi$ . Пусть  $P$  — периферическая подгруппа фундаментальной группы  $\pi_1(N - \Sigma)$ . Границей максимальной трубки вокруг сингулярного множества является тор  $T_\Sigma$  с несколькими точками самокасания. Для каждой точки самокасания  $x$  имеем единственную геодезическую дугу, которая является объединением двух кратчайших путей из  $x$  в  $\Sigma$ . Такая геодезическая дуга соответствует классу эквивалентности в двойном смежном классе  $P \backslash \pi_1(N - \Sigma) / P$ .

Опишем связующий класс в универсальном накрывающем пространстве. Пусть  $x$  — точка самокасания на  $T_\Sigma$ , и пусть  $\tau$  — один из кратчайших путей из  $x$  в  $\Sigma$ . Пусть  $U_\Sigma$  — внутренность максимальной трубчатой окрестности вокруг

Пусть  $\rho_0 : \pi_1(M) \rightarrow \text{PSL}_2(\mathbb{C})$  — представление группы голономий для гиперболической структуры на  $M$  такое, что  $\rho_0(P)$  фиксирует  $\infty$  в гиперболическом пространстве  $\mathbb{H}^3$ , реализованном в верхнем полупространстве. Пусть  $H$  — горизонтальная плоскость в  $\mathbb{H}^3$ , которая является поднятием тора  $T$ , и пусть  $\tilde{x} \in H$  — поднятие точки  $x$ . Тогда мы имеем еще одну орисферу  $H'$ , которая является поднятием  $T$  и содержит  $\tilde{x}$ . Тем са-

$\Sigma$  в  $N - \Sigma$ , и пусть  $\tilde{U}_0$  — компонента поднятия  $U_\Sigma$  в  $\widetilde{N - \Sigma}$ , левоинвариантная относительно действия  $P$  на  $\widetilde{N - \Sigma}$ . Пусть  $\tilde{x}_0$  — поднятие  $x$  в  $\widetilde{N - \Sigma}$ , лежащее на границе  $\tilde{U}_0$ , и пусть  $\tilde{\tau}_0$  — поднятие  $\tau - \Sigma$  в  $\tilde{U}_0$  с одним концом в  $\tilde{x}_0$ . Продолжая геодезическую дугу  $\tilde{\tau}_0$ , содержащую  $\tilde{x}_0$ , получим открытую геодезическую дугу, стремящуюся к концам  $\widetilde{N - \Sigma}$  в обоих направлениях. Один конец выходит из  $\tilde{U}_0$ , а другой — из образа  $\tilde{U}'_0$  компоненты  $\tilde{U}_0$  при действии  $\pi_1(N - \Sigma)$  на  $\widetilde{N - \Sigma}$ . Тогда связующий класс максимальной трубки в точке  $x$  представляется элементом  $\alpha$  группы  $\pi_1(N - \Sigma)$  таким, что  $\alpha(\tilde{U}'_0) = \tilde{U}_0$ .

Пусть  $\{M_\theta : 0 < \theta < \theta_0\}$  — семейство гиперболических конических многообразий одного топологического типа такое, что  $M_\theta$  сходится (в смысле Громова — Хаусдорфа) к полному гиперболическому многообразию  $M_0$  конечного объема по крайней мере с одним каспом, и для любого  $\theta$  многообразие  $M_\theta$  имеет сингулярное множество  $\Sigma_\theta$  с коническим углом  $\theta$ , а  $M_\theta - \Sigma_\theta$  гомеоморфно фиксированному 3-многообразию  $M_0$  относительно отображения  $\phi_\theta : M_0 \rightarrow M_\theta - \Sigma_\theta$ . Тогда мы имеем представления группы голономий  $\rho_0 : \pi_1(M_0) \rightarrow \text{PSL}_2(\mathbb{C})$  и  $\rho_\theta : \pi_1(M_\theta - \Sigma_\theta) \rightarrow \text{PSL}_2(\mathbb{C})$ , где  $0 < \theta < \theta_0$ , такие, что  $\rho_\theta \circ (\phi_\theta)_* \rightarrow \rho_0$  — изоморфизм, где  $(\phi_\theta)_*$  является индуцированным гомоморфизмом. Пусть  $P$  — периферическая подгруппа фундаментальной группы  $\pi_1(M_0)$ .

**Предложение 4.1.** *Если  $M_0$  имеет связующий класс  $[\alpha]$ , где  $\alpha \in \pi_1(M_0)$ , каспа, соответствующего  $P$ , то коническое многообразие  $M_\theta$  также имеет связующий класс относительно  $(\phi_\theta)_*(P)$ , который представляется в виде  $(\phi_\theta)_*(\alpha)$  при малых  $\theta$ .*

Доказательство очевидно в силу свойств топологии Громова — Хаусдорфа, поскольку последовательность максимальных трубок сходится к орисферической окрестности.  $\square$

**Предложение 4.2.** *Пусть  $N$  — гиперболическое коническое многообразие, сингулярным множеством которого является простая замкнутая кривая, а конический угол меньше  $2\pi$ . Пусть  $P$  — периферическая подгруппа фундаментальной группы  $\pi_1(N - \Sigma)$ , а  $\rho : \pi_1(N - \Sigma) \rightarrow \text{PSL}_2(\mathbb{C})$  — представление группы голономий гиперболической структуры на  $N - \Sigma$ . Пусть  $\alpha \in \pi_1(N - \Sigma)$  представляет связующий класс максимальной трубки. Тогда радиус  $R$  максимальной трубки вокруг сингулярного множества удовлетворяет соотношению*

$$\cosh(2R) = \frac{|\text{tr } \rho(\alpha\gamma\alpha^{-1}\gamma^{-1}) - 2| + |\text{tr}^2 \rho(\gamma) - \text{tr } \rho(\alpha\gamma\alpha^{-1}\gamma^{-1}) - 2|}{|\text{tr}^2 \rho(\gamma) - 4|},$$

где  $\gamma$  — любой элемент  $P$  такой, что  $\rho(\gamma) \neq I$ .

Доказательство. Пусть  $\text{dev}$  обозначает отображение развертки  $\widetilde{N - \Sigma} \rightarrow \mathbb{H}^3$  для гиперболической структуры на  $N - \Sigma$  такое, что  $\text{dev} \circ \gamma = \rho(\gamma) \circ \text{dev}$  для любых  $\gamma \in \pi_1(N - \Sigma)$ . Пусть  $x, \tilde{x}_0, \tau, \tilde{\tau}_0, U_\Sigma$  и  $\tilde{U}_0$ , как выше. Тогда  $\rho(P)$  оставляет неподвижной геодезическую  $\tilde{\Sigma}$  в  $\mathbb{H}^3$ , а  $\text{dev}(\tilde{U}_0)$  является множеством точек в  $\mathbb{H}^3$ , лежащих в пределах радиуса максимальной трубки от  $\tilde{\Sigma}$ . Пусть  $\tilde{x}$  и  $\tilde{\tau}$  — образы  $\tilde{x}_0$  и  $\tilde{\tau}_0$  при отображении  $\text{dev}|_{\tilde{U}_0}$ , соответственно. Тогда  $\text{dev}(\tilde{U}_0)$  и  $\text{dev}(\alpha^{-1}(\tilde{U}_0))$  являются гиперсферическими областями вокруг  $\tilde{\Sigma}$  и  $\rho(\alpha^{-1})(\tilde{\Sigma})$ , соответственно, касательными в точке  $\tilde{x}$  (рис. 4).

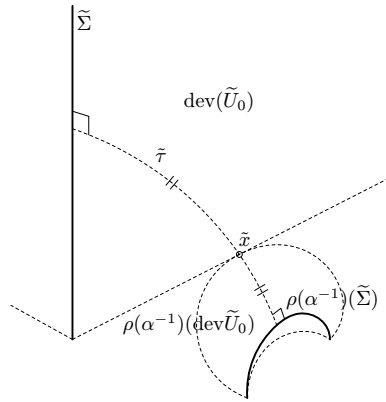


Рис. 4. Представитель связующего класса для максимальной трубки.

Напомним, что  $R$  — это половина расстояния между  $\tilde{\Sigma}$  и  $\alpha^{-1}(\tilde{\Sigma})$ , а  $\tilde{\Sigma}$  — ось  $\rho(\gamma)$  для любого  $\gamma \in P$  такого, что  $\rho(\gamma) \neq I$ . В модели гиперболического пространства, реализованного в верхнем полупространстве, геодезические представляются в виде пар различных чисел, принадлежащих расширенной комплексной плоскости. Мы можем предположить, что  $\tilde{\Sigma}$  является вертикальной геодезической, заданной  $(0, \infty)$ , а  $\rho(\gamma)$  имеет вид  $\begin{bmatrix} u & 0 \\ 0 & 1/u \end{bmatrix}$ . Пусть  $\rho(\alpha) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ , где  $ad - bc = 1$ . Тогда геодезическая  $\rho(\alpha^{-1})(\tilde{\Sigma})$  задается посредством  $(-b/a, -d/c)$ . Таким образом, по

следующей лемме гиперболический косинус  $\cosh$  расстояния между  $\tilde{\Sigma}$  и  $\rho(\alpha^{-1})(\tilde{\Sigma})$  равен  $|ad| + |bc| = |bc| + |bc + 1|$ . Поскольку  $\text{tr } \rho(\alpha\gamma\alpha^{-1}\gamma^{-1}) - 2 = -bc(u - 1/u)^2 = -bc(\text{tr}^2 \rho(\gamma) - 4)$ , непосредственным вычислением нетрудно проверить равенство в предложении.  $\square$

**Лемма 4.3.** Расстояние  $d$  между геодезическими  $(w_1, w_2)$  и  $(w_3, w_4)$  удовлетворяет соотношению

$$\cosh d = \frac{1 + |[w_1, w_2; w_3, w_4]|}{|1 - [w_1, w_2; w_3, w_4]|},$$

где  $[w_1, w_2; w_3, w_4] = \frac{(w_1 - w_3)(w_2 - w_4)}{(w_1 - w_4)(w_2 - w_3)}$  — ангармоническое отношение.

**Доказательство.** Поскольку ангармонические отношения и гиперболические расстояния инвариантны относительно гиперболических изометрий, достаточно доказать лемму в случае  $w_1 = -1, w_2 = 1, w_3 = -w, w_4 = w$  для некоторого  $w \in \mathbb{C}$ . Но в этом случае равенство очевидно.  $\square$

Пусть  $\theta$  — конический угол сингулярного множества, а  $\gamma_0$  — элемент  $P$  такой, что  $\rho(\gamma_0)$  не является эллиптическим элементом и сдвигается на минимальное расстояние вдоль своей оси. Пусть  $t$  — длина оси  $\rho(\gamma_0)$ , равная абсолютному значению действительной части  $2 \log(u)$ , когда  $\text{tr } \rho(\gamma_0)$  равен  $u + 1/u$ , т. е. длине сингулярного множества. Пусть  $\mu$  и  $\hat{\mu}$  — длина и нормированная длина меридиана на границе максимальной трубки соответственно. Тогда

$$\mu = \theta \sinh(R) = \theta \sqrt{\frac{\cosh(2R) - 1}{2}}, \quad \hat{\mu}^2 = \frac{\theta \tanh(R)}{t} = \frac{\theta}{t} \sqrt{\frac{\cosh(2R) - 1}{\cosh(2R) + 1}} \quad (9)$$

и мы можем выразить  $\mu$  и  $\hat{\mu}$  в терминах конического угла и следов образов голономий некоторых элементов группы  $\pi_1(N - \Sigma)$ , соответствующих связующим классам.

### § 5. Максимальные трубки в конических многообразиях с сингулярностью «зацепление Уайтхеда»

Цель данного параграфа — доказать теорему 1.1. Выберем пару, состоящую из меридиана и параллели для каждого конца. Для каждой пары  $p_1,$

$q_1$  взаимно простых целых чисел пусть  $W(p_1, q_1)$  — многообразие, полученное из дополнения  $W$  к зацеплению Уайтхеда хирургией Дена на первом конце вдоль наклона  $(p_1, q_1)$ . Если  $|p_1| + |q_1|$  достаточно большое, то  $W(p_1, q_1)$  гиперболическое. При малых  $\theta > 0$  пусть  $W(p_1, q_1)_\theta(p_2, q_2)$  — гиперболическое коническое многообразие, полученное обобщенной хирургией Дена на втором конце многообразия  $W(p_1, q_1)$  вдоль наклона  $(p_2, q_2)$  с коническим углом  $\theta$ , и пусть  $\mu = \mu_{p_1, q_1, p_2, q_2}(\theta)$  — длина хирургической кривой на максимальной трубке конического многообразия  $W(p_1, q_1)_\theta(p_2, q_2)$  вокруг сингулярности. Пусть  $\hat{\mu} = \hat{\mu}_{p_1, q_1, p_2, q_2}(\theta)$  — нормированная длина хирургической кривой, т. е. равная длине  $\mu$ , разделенной на квадратный корень из площади границы максимальной трубки.

**Теорема 5.1.** *Если  $|p_1| + |q_1|$  достаточно большое, то для любой пары  $p_2, q_2$  взаимно простых целых чисел, за исключением, быть может, одной,  $\hat{\mu}^2$  — убывающая, а  $\hat{\mu}^2 + \theta^2$  — возрастающая функции в окрестности точки  $\theta = 0$  для  $W(p_1, q_1)_\theta(p_2, q_2)$ .*

Приведем набросок доказательства теоремы 5.1. Сначала дадим основные сведения о деформациях гиперболических структур на дополнении  $W$  к зацеплению Уайтхеда в окрестности полной структуры.

В п. 5.1 укажем параметризацию гиперболических структур в окрестности полной структуры, используя разложение  $W$  на идеальные тетраэдры, а в п. 5.2 получим все поднятия представлений группы голономий гиперболических структур на  $W$  в окрестности полной структуры с точностью до сопряжения. В п. 5.3, применяя результаты п. 5.2, получим формулы для  $\hat{\mu}_{p_1, q_1, p_2, q_2}^2$  в терминах собственных значений  $m_2$  и  $l_2$  образов голономий  $\mathcal{M}_2$  и  $\mathcal{L}_2$  (для гиперболической структуры на  $W$ , индуцирующей гиперболическую коническую структуру на  $W(p_1, q_1)_\theta(p_2, q_2)$ ).

Следует отметить, что существование легко вычислимого связующего класса для максимального каспа второго конца в  $W$  влечет существование единственного связующего класса для максимального каспа в  $W(p_1, q_1)$ .

В нашем случае если  $M$  имеет единственный связующий класс своего максимального каспа, то мы можем найти представителя данного класса и вычислить геометрическую компоненту множества нулей  $A$ -полинома, а затем получить нормированную длину меридиана в  $M_\theta(p, q)$  в терминах  $\theta$ .

Из сказанного ясно, что полное гиперболическое многообразие  $W(p_1, q_1)$  с одним каспом (при больших  $|p_1| + |q_1|$ ) имеет единственный связующий класс своего максимального каспа и мы можем легко найти представителя данного класса.

Применяя полученные ранее результаты, в п. 5.4 вычислим коэффициенты ряда Тейлора в разложении функции  $\hat{\mu}_{p_1, q_1, p_2, q_2}^2(\theta)$  с точностью до второго порядка. Используя конкретные значения  $a_1, a_2, a_3$ , покажем справедливость теоремы 5.1, когда первый касп остается каспом, т. е. при  $p_1 = q_1 = \infty$ . Затем мы завершим доказательство за счет сходимости  $a_i^{p_1, q_1} \rightarrow a_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), полученной в § 6.

**5.1. Параметризация гиперболических структур на дополнении к зацеплению Уайтхеда.** Рассмотрим представление группы голономий и область Форда полной гиперболической структуры на дополнении к зацеплению Уайтхеда. Воспользуемся представлением

$$\langle \alpha, \beta, \gamma : \alpha\gamma = \gamma\beta, \gamma\alpha\beta\alpha^{-1} = \alpha\beta^{-1}\alpha\beta\alpha^{-1}\gamma \rangle$$

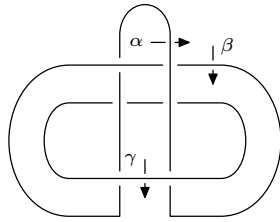


Рис. 5. Дополнение к зацеплению Уайтхеда с порождающими Виртингера.

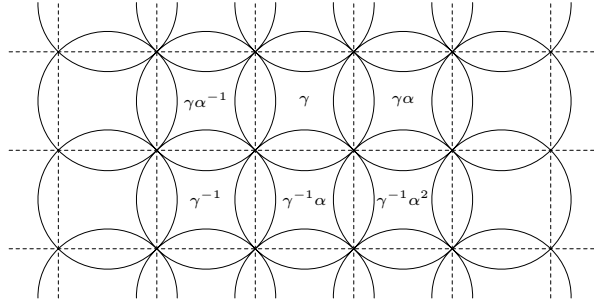


Рис. 6. Область Форда для второго каспа дополнения к зацеплению Уайтхеда.

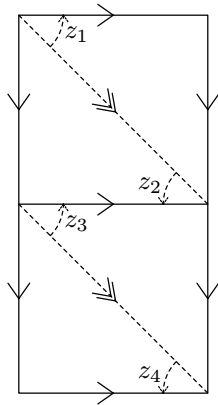


Рис. 7. Разложение  $W$  на идеальные тетраэдры.

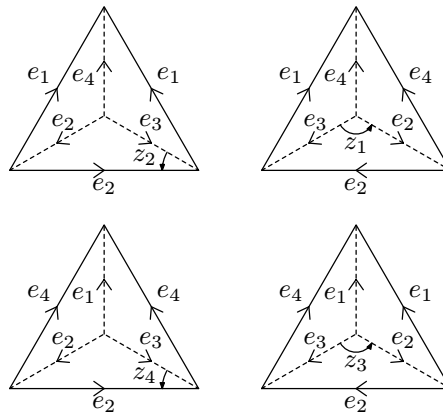


Рис. 8. Схема склейки тетраэдров.

фундаментальной группы  $W$  (рис. 5).

Зафиксируем следующую систему меридианов и параллелей для концов  $W$ :  $\mathcal{M}_1 = \gamma, \mathcal{L}_1 = \alpha\beta^{-1}\alpha^{-1}\beta, \mathcal{M}_2 = \alpha, \mathcal{L}_2 = \gamma\alpha^{-1}\gamma^{-1}\alpha\beta^{-1}\alpha$ .

Групповой гомоморфизм  $\rho_0 : \pi_1(W) \rightarrow \text{SL}_2(\mathbb{C})$ , отображающий  $\alpha, \beta, \gamma$  на

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2\sqrt{-1} & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & -(1 + \sqrt{-1})/2 \\ 1 - \sqrt{-1} & 0 \end{bmatrix}$$

соответственно, является поднятием представления группы голономий полной гиперболической структуры на  $W$ .

Область Форда относительно второго каспа, соответствующая  $\rho_0$ , вместе с изометрическими сферами изображена на рис. 6.

Из описания области Форда второго конца получим разложение  $W$  на четыре идеальных тетраэдра (рис. 7).

Пусть  $z_1, z_2, z_3, z_4$  — параметры, соответствующие четырем тетраэдрам, как изображено на рис. 8. Заметим, что параметры  $z_1 = z_2 = z_3 = z_4 = (1 + \sqrt{-1})/2$  соответствуют полной гиперболической структуре.

Для того чтобы индуцированная метрика была несингулярной вдоль ребер  $e_1, e_2, e_3, e_4$ , параметры  $z_i, i = 1, \dots, 4$ , должны удовлетворять следующим условиям склейки (рис. 9):

$$(1 - z_1)(1 - z_4) = (1 - z_2)(1 - z_3), \quad (1 - z_1)(1 - z_2)(1 - z_3)(1 - z_4) = z_1 z_2 z_3 z_4. \quad (10)$$

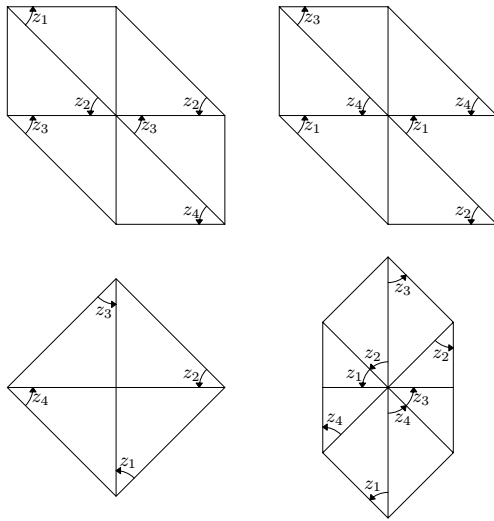


Рис. 9. Схема склейки ребер триангуляции.

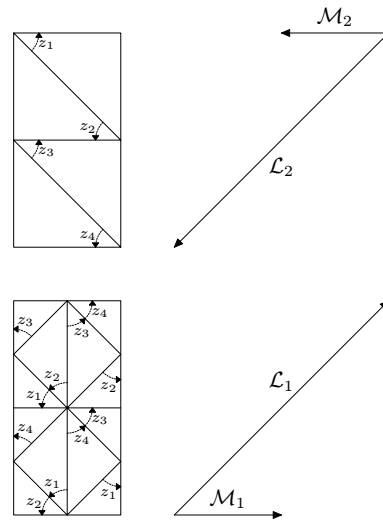


Рис. 10. Образы голономий меридианов и параллелей.

Для параметров  $z_i, i = 1, \dots, 4$  (в окрестности  $z^0$ ), удовлетворяющих данным условиям, имеем следующее соотношение между  $z_i, i = 1, \dots, 4$ , и собственными значениями соответствующих  $SL_2(\mathbb{C})$ -образов голономий меридиана и параллели для второго конца (рис. 10):

$$\begin{aligned}
 m_1 &= -\sqrt{\frac{1-z_4}{1-z_2}} \quad \left( = -\sqrt{\frac{1-z_3}{1-z_1}} \right), \\
 l_1 &= -\frac{1-z_4}{1-z_2} \sqrt{\frac{z_3 z_4}{z_1 z_2}} \quad \left( = -\frac{1-z_3}{1-z_1} \sqrt{\frac{z_3 z_4}{z_1 z_2}} \right), \\
 m_2 &= -\sqrt{\frac{1-z_2}{1-z_1}} \quad \left( = -\sqrt{\frac{1-z_4}{1-z_3}} \right), \\
 l_2 &= -\frac{1-z_2}{1-z_1} \sqrt{\frac{z_2 z_4}{z_1 z_3}} \quad \left( = -\frac{1-z_4}{1-z_3} \sqrt{\frac{z_2 z_4}{z_1 z_3}} \right),
 \end{aligned} \tag{11}$$

где выбрана такая ветвь квадратного корня, которая принимает значение 1 в точке 1.

**5.2. Представления группы голономий фундаментальной группы зацепления Уайтхеда.**

**Утверждение 5.2.** Для любых  $x, y \in \mathbb{C}$  существует гомоморфизм  $\rho : \pi_1(W) \rightarrow SL_2(\mathbb{C})$  такой, что

$$\begin{aligned}
 \rho(\alpha) &= \begin{bmatrix} x & 1 \\ 0 & 1/x \end{bmatrix}, & \rho(\beta) &= \begin{bmatrix} x & 0 \\ y & 1/x \end{bmatrix}, \\
 \rho(\gamma) &= \begin{bmatrix} -\frac{x\{x^2 y^2 + x^2(x^2-3)y - (x^2-1)^2\}}{zw} & z \\ zy & \frac{z(1-x^2)}{x} \end{bmatrix},
 \end{aligned}$$

где

$$w = (x^2 y - x^2 + 1)\{x^2 y + (x^2 - 1)^2\}, \quad z = \sqrt{x^2(1 - x^2 - y)/w},$$



а поднятие представления группы голономий  $\pi_1(W)$  в окрестности  $\rho_0$  сопряжено одному из вышеперечисленных представлений, где  $(x, y, z)$  принадлежит окрестности точки  $(-1, 2\sqrt{-1}, -(1 + \sqrt{-1})/2)$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть  $\rho : \pi_1(W) \rightarrow \text{SL}_2(\mathbb{C})$  — поднятие представления группы голономий такое, что  $\rho(\alpha)$  и  $\rho(\beta)$  не коммутируют. Тогда, сопрягая в  $\text{SL}_2(\mathbb{C})$ , мы можем предположить, что  $\rho(\alpha)$  и  $\rho(\beta)$  имеют следующий вид:

$$\begin{bmatrix} x & 1 \\ 0 & 1/x \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x & 0 \\ y & 1/x \end{bmatrix} \tag{12}$$

соответственно, поскольку  $\rho(\alpha)$  и  $\rho(\beta)$  сопряжены в  $\text{SL}_2(\mathbb{C})$ . В силу равенства  $\alpha\gamma = \gamma\beta$  значение  $\rho(\gamma)$  с необходимостью имеет вид

$$\begin{bmatrix} \frac{x(1+yz^2)}{z(1-x^2)} & z \\ zy & \frac{z(1-x^2)}{x} \end{bmatrix}. \tag{13}$$

Наконец, из равенства  $\gamma\alpha\beta\alpha^{-1} = \alpha\beta^{-1}\alpha\beta\alpha^{-1}\gamma$  получим  $z$  в терминах  $x, y$ , как и в утверждении.  $\square$

Для заданного представления группы голономий  $\rho$ , описанного выше, возьмем  $x$  в качестве собственного значения  $m_2$  образа голономии меридиана  $\alpha = \mathcal{M}_2$  для второго конца. Поскольку

$$\rho(\mathcal{L}_2) = \begin{bmatrix} \frac{-1+x^2-x^2y}{-1+x^2+y} & * \\ 0 & \frac{-1+x^2+y}{-1+x^2-x^2y} \end{bmatrix},$$

мы должны взять собственное значение  $l_2$  образа голономии параллели  $\mathcal{L}_2$  в виде

$$l_2 = \frac{-1 + x^2 - x^2y}{-1 + x^2 + y}. \tag{14}$$

Затем получим следующее соотношение между собственными значениями  $m_1, l_1, m_2, l_2$  образов голономий  $\rho(\mathcal{M}_1), \rho(\mathcal{L}_1), \rho(\mathcal{M}_2), \rho(\mathcal{L}_2)$ , вычисляя  $\text{tr}^2 \rho(\mathcal{M}_1)$  и  $\text{tr} \rho(\mathcal{L}_1)$  в терминах  $x, y, z$  в предыдущем утверждении:

$$\left(m_1 + \frac{1}{m_1}\right)^2 = \frac{(1 + l_2)^2(m_2^4 - l_2)}{l_2(l_2 + m_2^2)(m_2^2 - 1)},$$

$$l_1 + \frac{1}{l_1} = \frac{l_2^2(1 + m_2^4) + l_2(-1 + 2m_2^2 + 2m_2^4 + 2m_2^6 - m_2^8) + m_2^4 + m_2^8}{m_2^2(l_2 + m_2^2)^2}.$$

**5.3. Максимальные трубки в конических многообразиях с сингулярностью «зацепление Уайтхеда».** Пусть  $\Sigma$  — сингулярное множество рассматриваемого конического многообразия. Элементы группы  $\pi_1(W)$ , которые представляют единственный связующий класс максимального каспа  $W$  относительно периферической подгруппы  $P_2$  для второго конца, содержащие  $\alpha \in \pi_1(W)$ , проецируются на элемент группы  $\pi_1(W(p_1, q_1)_\theta(p_2, q_2) - \Sigma)$ , представляющий связующий класс при больших  $|p_1| + |q_1|$  и малых  $\theta$ .

Из описания области Форда  $W$  относительно второго конца в п. 5.1 видим, что  $\gamma \in \pi_1(W)$  представляет единственный связующий класс второго каспа относительно  $P_2$ . Учитывая изометрические сферы образов подходящего представления группы голономий, заметим, что  $\gamma$  по-прежнему представляет

единственный связующий класс  $\pi_1(W(p_1, q_1, \infty, \infty))$  полного гиперболического многообразия с одним каспом при больших  $|p_1| + |q_1|$  и гиперболическом  $W(p_1, q_1, \infty, \infty)$ .

Применяя результаты § 4 (предложение 4.2 и равенства (9)), видим, что для гиперболического конического многообразия  $W(p_1, q_1)_\theta(p_2, q_2)$  нормированная длина  $\hat{\mu}$  хирургической кривой на границе сингулярного множества удовлетворяет соотношению

$$\hat{\mu}^2 = \frac{\theta}{2|\operatorname{Re}(r_2 \log(-m_2) + s_2 \log(-l_2))|} \times \sqrt{\frac{|\operatorname{tr} \rho(\alpha\gamma\alpha^{-1}\gamma^{-1}) - 2| + |\operatorname{tr}^2(\rho(\alpha)) - \operatorname{tr} \rho(\alpha\gamma\alpha^{-1}\gamma^{-1}) - 2| - |\operatorname{tr}^2(\rho(\alpha)) - 4|}{|\operatorname{tr} \rho(\alpha\gamma\alpha^{-1}\gamma^{-1}) - 2| + |\operatorname{tr}^2(\rho(\alpha)) - \operatorname{tr} \rho(\alpha\gamma\alpha^{-1}\gamma^{-1}) - 2| + |\operatorname{tr}^2(\rho(\alpha)) - 4|}}, \tag{15}$$

где  $\rho : \pi_1(W(p_1, q_1)_\theta(p_2, q_2) - \Sigma) \rightarrow \operatorname{SL}_2(\mathbb{C})$  — поднятие представления группы голономий  $W(p_1, q_1)_\theta(p_2, q_2)$ , а  $r_2, s_2$  — целые числа, удовлетворяющие равенству  $p_2s_2 - q_2r_2 = 1$  при больших  $|p_1| + |q_1|$  и малых  $\theta$ .

Соотношение  $\operatorname{tr} \rho(\alpha\gamma\alpha^{-1}\gamma^{-1}) = \operatorname{tr} \rho(\alpha\beta^{-1}) = 2 - y$  вытекает из уравнений (12) и (13). Используя (14), получим

$$\operatorname{tr} \rho(\alpha\gamma\alpha^{-1}\gamma^{-1}) - 2 = -\frac{(-1 + m_2^2)(1 - l_2)}{l_2 + m_2^2}. \tag{16}$$

**5.4. Завершение доказательства основного результата.** Пусть  $W$  — дополнение к зацеплению Уайтхеда, и пусть  $\mathcal{M}_1, \mathcal{L}_1, \mathcal{M}_2, \mathcal{L}_2$ , как и ранее, меридианы и параллели для концов  $W$ . Из (15), (16) имеем

$$\hat{\mu}^2 = \frac{\theta}{2|\operatorname{Re}(r_2 \log(-m_2) + s_2 \log(-l_2))|} \times \sqrt{\frac{\left| \frac{(m_2^2-1)(1-l_2)}{m_2^2+l_2} \right| + \left| \left(m_2 - \frac{1}{m_2}\right)^2 + \frac{(m_2^2-1)(1-l_2)}{m_2^2+l_2} \right| - \left| \left(m_2 - \frac{1}{m_2}\right)^2 \right|}{\left| \frac{(m_2^2-1)(1-l_2)}{m_2^2+l_2} \right| + \left| \left(m_2 - \frac{1}{m_2}\right)^2 + \frac{(m_2^2-1)(1-l_2)}{m_2^2+l_2} \right| + \left| \left(m_2 - \frac{1}{m_2}\right)^2 \right|}}, \tag{17}$$

где  $r_2, s_2$  — целые числа, удовлетворяющие соотношению  $p_2s_2 - q_2r_2 = 1$  при больших  $|p_1| + |q_1|$  и малых  $\theta$ .

Используя  $A$ -полином  $-l_2 + l_2^2 + 4l_2m_2 + m_2^4 - l_2m_2^4$  многообразия  $W(\infty, \infty)$  относительно  $\{\mathcal{M}_2, \mathcal{L}_2\}$ , имеем следующее разложение в ряд Тейлора при  $p_1 = q_1 = \infty$ :

$$l_2 = -1 + a_1(m_2 + 1) + \frac{a_2}{2}(m_2 + 1)^2 + \frac{a_3}{6}(m_2 + 1)^3 + O(|m_2 + 1|^4),$$

где  $a_1 = 2 + 2i, a_2 = 2 - 6i$  и  $a_3 = -12$ . Таким образом, в случае многообразия  $W(p_1, q_1)$  при больших  $|p_1| + |q_1|$  получим

$$l_2 = -1 + a_1^{p_1, q_1}(m_2 + 1) + \frac{a_2^{p_1, q_1}}{2}(m_2 + 1)^2 + \frac{a_3^{p_1, q_1}}{6}(m_2 + 1)^3 + O(|m_2 + 1|^4),$$

где  $a_i^{p_1, q_1} \rightarrow a_i$  при  $|p_1| + |q_1| \rightarrow \infty, i = 1, 2, 3$ , как и в п. 3.3. По лемме 6.6 имеем  $a_2^{p_1, q_1} = a_1^{p_1, q_1} - (a_1^{p_1, q_1})^2$  при больших  $|p_1| + |q_1|$ .

Запишем  $\hat{\mu}^2$  в терминах  $\theta$ . Сначала предположим, что  $p_1 = q_1 = \infty$ . Используя (6)–(8), приходим к соотношениям

$$\left(m_2 - \frac{1}{m_2}\right)^2 = -\frac{\theta^2}{(p_2 + a_1q_2)^2} + O(|\theta|^3),$$

$$\frac{(m_2^2 - 1)(1 - l_2)}{m_2^2 + l_2} = \frac{4}{2 - a_1} + \frac{-6a_1 + 3(a_1)^2 - 2a_3}{12(2 - a_1)^2(p_2 + a_1q_2)^2}\theta^2 + O(|\theta|^3),$$

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re}(r_2 \log(-m_2) + s_2 \log(-l_2)) \\ &= -\frac{\operatorname{Im} a_1}{2|p_2 + a_1q_2|^2}\theta - \frac{\operatorname{Im}\{(2a_1 - 3(a_1)^2 + (a_1)^3 - a_3)(p_2 + \bar{a}_1q_2)^4\}}{48|p_2 + a_1q_2|^8}\theta^3 + O(|\theta|^4). \end{aligned}$$

Воспользуемся следующими фактами. Если  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  аналитична в точке 0 и  $f(\theta) = c_1\theta^i + O(|\theta|^{i+1})$  в точке 0 для некоторого положительного целого числа  $i$ , то

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 + f(\theta)} &= 1 - c_1\theta^i + O(|\theta|^{i+1}), \quad \sqrt{1 + f(\theta)} = 1 + \frac{c_1}{2}\theta^i + O(|\theta|^{i+1}), \\ |1 + f(\theta)| &= 1 + \operatorname{Re}(c_1)\theta^i + O(|\theta|^{i+1}). \end{aligned}$$

Положим

$$X = \frac{(m_2^2 - 1)(1 - l)}{m_2^2 + l}, \quad Y = \left(m_2 - \frac{1}{m_2}\right)^2,$$

$$R = |\operatorname{Re}\{r \log(-m_2) + s \log(-l_2)\}| \quad \text{и} \quad U = p_2 + a_1q_2.$$

Разложим  $\frac{\theta}{2R} \sqrt{\frac{|X| + |X+Y| - |Y|}{|X| + |X+Y| + |Y|}}$  в ряд по коническому углу  $\theta$  с точностью до второго порядка. Имеем следующую последовательность равенств:

$$|X| + |X + Y| + |Y| = \frac{8}{|2 - a_1|} + O(|\theta|^2),$$

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{|X| + |X + Y| - |Y|}{|X| + |X + Y| + |Y|}} &= \sqrt{1 - \frac{2|Y|}{|X| + |X + Y| + |Y|}} \\ &= 1 - \frac{|Y|}{|X| + |X + Y| + |Y|} + O(|\theta|^3) = 1 - \frac{|2 - a_1|}{8|U|^2}\theta^2 + O(|\theta|^3), \end{aligned}$$

поскольку  $Y = O(|\theta|^2)$ . Также имеем

$$\frac{\theta}{2R} = \frac{|U|^2}{\operatorname{Im} a_1} \left(1 - \frac{\operatorname{Im}(A\bar{U}^4)}{24 \operatorname{Im} a_1 |U|^6}\theta^2\right) + O(|\theta|^3) = \frac{|U|^2}{\operatorname{Im} a_1} - \frac{\operatorname{Im}(A\bar{U}^4)}{24(\operatorname{Im} a_1)^2|U|^4}\theta^2 + O(|\theta|^3),$$

где  $A = 2a_1 - 3a_1^2 + a_1^3 - a_3$ , и предполагаем, что мнимая часть  $a_1$  положительна.

Вычислим

$$\begin{aligned} & \frac{\theta}{2R} \sqrt{\frac{|X| + |X + Y| - |Y|}{|X| + |X + Y| + |Y|}} \\ &= \frac{|U|^2}{\operatorname{Im} a_1} - \frac{3|2 - a_1| \operatorname{Im} a_1 |U|^4 + \operatorname{Im}(A\bar{U}^4)}{24(\operatorname{Im} a_1)^2|U|^4}\theta^2 + O(|\theta|^3) = \frac{|p_2 + a_1q_2|^2}{\operatorname{Im} a_1} \\ & - \frac{3|2 - a_1| \operatorname{Im} a_1 |p_2 + a_1q_2|^4 + \operatorname{Im}((2a_1 - 3a_1^2 + a_1^3 - a_3)(p_2 + \bar{a}_1q_2)^4)}{24(\operatorname{Im} a_1)^2|p_2 + a_1q_2|^4}\theta^2 + O(|\theta|^3). \end{aligned}$$

Значит,

$$\begin{aligned} \hat{\mu}^2(\theta) &= \hat{\mu}_{p_1=\infty, q_1=\infty, p_2, q_2}^2(\theta) \\ &= \frac{|p_2 + a_1q_2|^2}{|\operatorname{Im} a_1|} + \frac{B_0p_2^4 + B_1p_2^3q_2 + B_2p_2^2q_2^2 + B_3p_2q_2^3 + B_4q_2^4}{|p_2 + a_1q_2|^4}\theta^2 + O(|\theta|^3), \quad (18) \end{aligned}$$

где  $B_j, j = 0, \dots, 4$ , — непрерывные функции переменных  $a_i, i = 1, 2, 3$ , которые принимают следующие значения:

$$B_0 = -1/12, \quad B_1 = -2/3, \quad B_2 = -4, \quad B_3 = -32/3, \quad B_4 = -32/3. \quad (19)$$

Теперь предположим, что  $|p_1| + |q_1|$  достаточно большое, и запишем  $\hat{\mu}^2$  в терминах  $\theta$ . Используя (6)–(8), запишем

$$\begin{aligned} \left(m_2 - \frac{1}{m_2}\right)^2 &= -\frac{\theta^2}{(p_2 + a_1^{p_1, q_1} q_2)^2} + O(|\theta|^3), \\ \frac{(m_2^2 - 1)(1 - l_2)}{m_2^2 + l_2} &= \frac{4}{2 - a_1^{p_1, q_1}} + \frac{-6a_1^{p_1, q_1} + 3(a_1^{p_1, q_1})^2 - 2a_3^{p_1, q_1}}{12(2 - a_1^{p_1, q_1})^2 (p_2 + a_1^{p_1, q_1} q_2)^2} \theta^2 + O(|\theta|^3), \\ \operatorname{Re}(r_2 \log(-m_2) + s_2 \log(-l_2)) &= -\frac{\operatorname{Im} a_1^{p_1, q_1}}{2|p_2 + a_1^{p_1, q_1} q_2|^2} \theta \\ &\quad - \frac{\operatorname{Im}\{(2a_1^{p_1, q_1} - 3(a_1^{p_1, q_1})^2 + (a_1^{p_1, q_1})^3 - a_3^{p_1, q_1})(p_2 + \overline{a_1^{p_1, q_1}} q_2)^4\}}{48|p_2 + a_1^{p_1, q_1} q_2|^8} \theta^3 + O(|\theta|^4). \end{aligned} \quad (20)$$

Как и выше, получим разложение

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_{p_1, q_1, p_2, q_2}^2(\theta) &= \frac{|p_2 + a_1^{p_1, q_1} q_2|^2}{|\operatorname{Im} a_1^{p_1, q_1}|} \\ &\quad + \frac{B_0^{p_1, q_1} p_2^4 + B_1^{p_1, q_1} p_2^3 q_2 + B_2^{p_1, q_1} p_2^2 q_2^2 + B_3^{p_1, q_1} p_2 q_2^3 + B_4^{p_1, q_1} q_2^4}{|p_2 + a_1^{p_1, q_1} q_2|^4} \theta^2 \end{aligned}$$

с точностью до второго порядка при больших  $|p_1| + |q_1|$ , где каждое  $B_j^{p_1, q_1}, j = 0, \dots, 4$ , является константой, непрерывно зависящей от  $a_1^{p_1, q_1}, a_2^{p_1, q_1}, a_3^{p_1, q_1}$ , т. е.

$$B_j^{p_1, q_1} = B_j(a_1^{p_1, q_1}, a_2^{p_1, q_1}, a_3^{p_1, q_1}), \quad j = 0, \dots, 4,$$

для непрерывной функции  $B_j, j = 0, \dots, 4$ , определенной в окрестности точки  $(a_1, a_2, a_3)$  из  $\mathbb{C}^3$ .

Заметим, что  $B_j^{p_1, q_1}, j = 0, \dots, 4$ , как функция своих переменных совпадает с функцией  $B_j, j = 0, \dots, 4$ .

Все значения функции  $\frac{-x^4 - 8x^3 - 48x^2 - 128x - 128}{12(x^2 + 4x + 8)^2}$  ( $-\infty < x < \infty$ ) лежат в отрезке  $[-1/6, -1/12] \subset (-1, 0)$ . Таким образом, значения коэффициента при члене второго порядка в (18)

$$\frac{-p_2^4 - 8p_2^3 q_2 - 48p_2^2 q_2^2 - 128p_2 q_2^3 - 128q_2^4}{12(p_2^2 + 4p_2 q_2 + 8q_2^2)^2} \quad (21)$$

лежат в отрезке  $[-1/6, -1/12] \subset (-1, 0)$  для любой пары  $p_2, q_2$  взаимно простых целых чисел. Данное утверждение и вычисление  $\hat{\mu}^2 + \theta^2$  завершают наше доказательство в случае бесконечных  $p_1$  и  $q_1$ .

Поскольку  $a_1^{p_1, q_1} \rightarrow a_1$  и  $B_j^{p_1, q_1} \rightarrow B_j, j = 0, \dots, 4$ , при  $|p_1| + |q_1| \rightarrow \infty$ , доказательство в случае  $\hat{\mu}_{p_1, q_1, p_2, q_2}^2$  полностью завершено.

**§ 6. Сходимость коэффициентов ряда Тейлора геометрических множителей  $A$ -полиномов**

В данном параграфе приведем доказательство теоремы 3.2. Мы используем обозначения, введенные в п. 3.3.

Пусть  $M$  — полное гиперболическое многообразие с двумя каспами, которое разлагается в  $\nu$  идеальных тетраэдров. Пусть точка  $\mathbf{z}^0 = (z_1^0, \dots, z_\nu^0) \in \mathbb{C}^\nu$  соответствует полной структуре. Пусть  $\mathcal{V}$  — пересечение некоторой окрестности  $\mathbf{z}^0$  в  $\mathbb{C}^\nu$  и множества точек, удовлетворяющих описанному выше условию склейки.

Согласно результату из [6] существует голоморфное вложение  $\iota$  некоторого открытого подмножества  $V$  из  $\mathbb{C}^2$  на  $\mathcal{V}$  (при необходимости стягивая  $\mathcal{V}$ ).

Пусть  $\rho_0 : \pi_1(M) \rightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$  — поднятие представления группы голономий полной структуры, и пусть  $m_1^0, l_1^0, m_2^0, l_2^0$  — собственные значения  $\rho(\mathcal{M}_1)$ ,  $\rho(\mathcal{L}_1)$ ,  $\rho(\mathcal{M}_2)$ ,  $\rho(\mathcal{L}_2)$ .

По изложенному выше подходящим выбором собственных значений  $m_1, l_1, m_2, l_2$ , соответствующих  $\rho(\mathcal{M}_1)$ ,  $\rho(\mathcal{L}_1)$ ,  $\rho(\mathcal{M}_2)$ ,  $\rho(\mathcal{L}_2)$ , для поднятий  $\rho$  представлений группы голономий в окрестности гиперболических структур получим голоморфное отображение  $G : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{C}^4$ , которое можно рассматривать как пару отображений  $G_1, G_2 : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{C}^2$ , где  $G_1 = (m_1, l_1)$  и  $G_2 = (m_2, l_2)$ .

Более того, мы можем выбрать  $G$  так, что  $G_1(\mathbf{z}^0) = (m_1^0, l_1^0)$  и  $G_2(\mathbf{z}^0) = (m_2^0, l_2^0)$ . Пусть  $\mathcal{E}_1 \subset \mathcal{V}$  обозначает множество  $G_1^{-1}\{(m_1^0, l_1^0)\} \cap \mathcal{V}$ , а  $C_1 \subset V$  — множество  $\iota^{-1}(\mathcal{E}_1) \cap V$ . Пусть  $(u_0, v_0) \in V$  — точка, соответствующая полной структуре, т. е. являющаяся прообразом  $\iota^{-1}G^{-1}\{(m_1^0, l_1^0, m_2^0, l_2^0)\}$ .

Приведем этапы доказательства. Сначала покажем гладкость геометрической компоненты  $C_1$  в пространстве параметров тетраэдра, где первый касп остается каспом. Здесь воспользуемся свойствами градиентов  $m_1$  и теоремой 2.1. Мы реализуем  $C_1$  как график функции от одного параметра к другому. Во-вторых, покажем гладкость геометрической компоненты  $C_1^{p_1, q_1}$  в пространстве параметров тетраэдра, где на первом каспе выполнена  $(p_1, q_1)$ -хирургия Дена. Для доказательства данного утверждения используем метод непрерывности для градиентов. Как и в предыдущем случае, описываем  $C_1^{p_1, q_1}$  как график функции. Затем покажем, что последовательность коэффициентов ряда Тейлора функций, соответствующих  $C_1^{p_1, q_1}$ , сходится к коэффициентам ряда Тейлора функции, соответствующей  $C_1$ . Для завершения доказательства заменим переменные на  $(m_1, l_1)$ .

На первом шаге покажем гладкость  $C_1$ .

Для  $(u, v) \in V$  обозначим  $G_1\iota(u, v)$  и  $G_2\iota(u, v)$  через  $(m_1, l_1)$  и  $(m_2, l_2)$  соответственно, считая их функциями  $(u, v)$ . Используя результат из [6], заметим, что градиенты  $\nabla m_1$  и  $\nabla m_2$  линейно независимы в точке  $(u_0, v_0)$  (градиент  $\nabla$  берется относительно  $(u, v)$ ). Аналогично  $\nabla l_1$  и  $\nabla l_2$  линейно независимы в точке  $(u_0, v_0)$ .

Более того, по теореме 2.1 градиенты  $\nabla m_1(u_0, v_0)$  и  $\nabla l_1(u_0, v_0)$  линейно независимы над  $\mathbb{R}$  (хотя они зависимы над  $\mathbb{C}$ ). Таким образом, изменяя параметры  $(u, v) \mapsto (v, u)$ , где это необходимо, мы можем предположить, что

$$\left. \frac{\partial m_1}{\partial v} \right|_{(u_0, v_0)} \quad \text{и} \quad \left. \frac{\partial l_1}{\partial v} \right|_{(u_0, v_0)} \quad \text{линейно независимы над } \mathbb{R}.$$

Поскольку  $\nabla m_1|_{(u_0, v_0)} \neq 0$ , то  $\mathcal{E}_1$  и  $C_1$  являются гладкими кривыми в окрестности  $\mathbf{z}^0$  и  $(u_0, v_0)$  соответственно. Так как  $\left. \frac{\partial m_1}{\partial v} \right|_{(u_0, v_0)} \neq 0$ , то  $C_1$  является

графиком голоморфного отображения

$$v - v_0 = c_1(u - u_0) + \frac{c_2}{2}(u - u_0)^2 + \frac{c_3}{6}(u - u_0)^3 + O(|u - u_0|^4)$$

в точке  $(u_0, v_0)$ . Здесь  $c_1 \neq 0$  в силу того, что  $\frac{\partial m_1}{\partial u} \neq 0$ .

На втором шаге проведем аналогичные рассуждения для  $C_1^{p_1, q_1}$ .

Для каждой пары  $p_1, q_1$  взаимно простых целых чисел, где  $|p_1| + |q_1|$  достаточно большое, возьмем  $(u_0^{p_1, q_1}, v_0^{p_1, q_1}) \in \mathcal{V}$  такое, что

$$p_1 \log\left(\frac{m_1}{m_1^0}\right) + q_1 \log\left(\frac{l_1}{l_1^0}\right) = \pi\sqrt{-1},$$

с тем, чтобы  $m_2(u_0^{p_1, q_1}, v_0^{p_1, q_1}) = m_2^0$  и  $l_2(u_0^{p_1, q_1}, v_0^{p_1, q_1}) = l_2^0$ . Точка  $(u_0^{p_1, q_1}, v_0^{p_1, q_1})$  может быть взята так, что гиперболическое многообразие получено  $(p_1, q_1)$ -хирургией Дена на первом каспе, а второй касп остается каспом. Поскольку последовательность таких многообразий сходится к  $W$  при  $|p_1| + |q_1| \rightarrow \infty$ , видим, что  $u_0^{p_1, q_1} \rightarrow u_0$  и  $v_0^{p_1, q_1} \rightarrow v_0$  при  $|p_1| + |q_1| \rightarrow \infty$ .

Пусть  $C_1^{p_1, q_1}$  — множество точек  $(u, v)$  из  $V$ , удовлетворяющих равенству  $p_1 \log\left(\frac{m_1}{m_1^0}\right) + q_1 \log\left(\frac{l_1}{l_1^0}\right) = \pi\sqrt{-1}$ .

**Предложение 6.1.** *Геометрическая компонента  $C_1^{p_1, q_1}$  является гладкой кривой в окрестности точки  $(u_0^{p_1, q_1}, v_0^{p_1, q_1})$  при достаточно больших  $|p_1| + |q_1|$ .*

Доказательство. Имеем

$$\frac{\partial}{\partial v} \left\{ p_1 \log\left(\frac{m_1}{m_1^0}\right) + q_1 \log\left(\frac{l_1}{l_1^0}\right) \right\} = \frac{p_1}{m_1} \frac{\partial m_1}{\partial v} + \frac{q_1}{l_1} \frac{\partial l_1}{\partial v}.$$

Поскольку значения функций  $\frac{\partial m_1}{m_1 \partial v}$  и  $\frac{\partial l_1}{l_1 \partial v}$  линейно независимы над  $\mathbb{R}$  в любой точке  $(u, v) \in V$  окрестности  $(u_0, v_0)$ , то  $\frac{\partial}{\partial v} \left\{ p_1 \log\left(\frac{m_1}{m_1^0}\right) + q_1 \log\left(\frac{l_1}{l_1^0}\right) \right\}$  не принимает значение 0 в окрестности  $(u_0, v_0)$ . Таким образом,  $\nabla \left\{ p_1 \log\left(\frac{m_1}{m_1^0}\right) + q_1 \log\left(\frac{l_1}{l_1^0}\right) \right\}$  не обращается в нуль в окрестности  $(u_0, v_0)$ .  $\square$

Для  $(u, v) \in V$  заметим, что  $m_1 = m_1^0 (= \pm 1)$  тогда и только тогда, когда  $l_1 = l_1^0$ , поскольку параболические элементы группы  $SL_2(\mathbb{C})$  не коммутируют с эллиптическими или локсодромическими элементами. Таким образом,  $\nabla m_1$  и  $\nabla l_1$  параллельны в точке  $(u_0, v_0)$ , т. е.

$$\frac{\partial m_1}{\partial u} \frac{\partial l_1}{\partial v} - \frac{\partial m_1}{\partial v} \frac{\partial l_1}{\partial u} = 0 \quad \text{в точке } (u_0, v_0).$$

**Предложение 6.2.** *Направление  $\nabla \left\{ p_1 \log\left(\frac{m_1}{m_1^0}\right) + q_1 \log\left(\frac{l_2}{l_2^0}\right) \right\} (u_0^{p_1, q_1}, v_0^{p_1, q_1})$  сходится к направлению  $\nabla m_1(u_0, v_0)$  при  $|p_1| + |q_1| \rightarrow \infty$ .*

Доказательство. По определению  $\nabla m_1 = \left( \frac{\partial m_1}{\partial u}, \frac{\partial m_1}{\partial v} \right)$  и

$$\nabla \left\{ p_1 \log\left(\frac{m_1}{m_1^0}\right) + q_1 \log\left(\frac{l_2}{l_2^0}\right) \right\} = \left( \frac{p_1}{m_1} \frac{\partial m_1}{\partial u} + \frac{q_1}{l_1} \frac{\partial l_1}{\partial u}, \frac{p_1}{m_1} \frac{\partial m_1}{\partial v} + \frac{q_1}{l_1} \frac{\partial l_1}{\partial v} \right).$$

Но по следующей лемме

$$\frac{\frac{p_1}{m_1} \frac{\partial m_1}{\partial u} + \frac{q_1}{l_1} \frac{\partial l_1}{\partial u}}{\frac{p_1}{m_1} \frac{\partial m_1}{\partial v} + \frac{q_1}{l_1} \frac{\partial l_1}{\partial v}} \Bigg|_{(x_0^{p_1, q_1}, y_0^{p_1, q_1})} \rightarrow \frac{\frac{\partial m_1}{\partial u}}{\frac{\partial m_1}{\partial v}} \Bigg|_{(x_0, y_0)}$$

при  $|p_1| + |q_1| \rightarrow \infty$ .  $\square$

**Лемма 6.3.** Пусть  $a, b, c, d$  — комплексные числа такие, что  $c$  и  $d$  линейно независимы над  $\mathbb{R}$ , а  $ad - bc = 0$ . Пусть  $A, B, C, D$  — функции на  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  такие, что

$$A(p, q) \rightarrow a, \quad B(p, q) \rightarrow b, \quad C(p, q) \rightarrow c, \quad D(p, q) \rightarrow d \quad \text{при } |p| + |q| \rightarrow \infty.$$

Тогда

$$\frac{Ap + Bq}{Cp + Dq} \rightarrow \frac{ap + bq}{cp + dq} \quad (= a/c = b/d) \quad \text{при } |p| + |q| \rightarrow \infty.$$

На третьем шаге покажем сходимость коэффициентов.

Из предложений 6.1 и 6.2 видим, что при достаточно больших  $|p_1| + |q_1|$ ,  $C_1^{p_1, q_1}$  является графиком голоморфного отображения

$$\begin{aligned} v^{p_1, q_1} - v_0^{p_1, q_1} &= c_1^{p_1, q_1} (u^{p_1, q_1} - u_0^{p_1, q_1}) + \frac{c_2^{p_1, q_1}}{2} (u^{p_1, q_1} - u_0^{p_1, q_1})^2 \\ &\quad + \frac{c_3^{p_1, q_1}}{6} (u^{p_1, q_1} - u_0^{p_1, q_1})^3 + O(|u^{p_1, q_1} - u_0^{p_1, q_1}|^4) \end{aligned}$$

в точке  $(u_0^{p_1, q_1}, v_0^{p_1, q_1})$ , где  $c_1^{p_1, q_1} \neq 0$ .

Пусть  $x$  — переменная, равная  $u$ , если  $(u, v) \in C_1$ . Пусть  $y$  — функция от  $x$ , равная  $v$  в точке  $x$ .

**Предложение 6.4.** Имеет место сходимость  $c_i^{p_1, q_1} \rightarrow c_i$  при  $|p_1| + |q_1| \rightarrow \infty$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Любая точка  $(u, v) \in C_1$  удовлетворяет соотношению

$$\begin{aligned} p_1 \left\{ \frac{1}{m_1^0} (m_1 - m_1^0) - \frac{1}{2} (m_1 - m_1^0)^2 + \frac{1}{3m_1^0} (m_1 - m_1^0)^3 \right\} \\ + q_1 \left\{ \frac{1}{l_1^0} (l_1 - l_1^0) - \frac{1}{2} (l_1 - l_1^0)^2 + \frac{1}{3l_1^0} (l_1 - l_1^0)^3 \right\} = 0 \quad (22) \end{aligned}$$

для любой пары  $p_1, q_1$  целых чисел. Левая часть равенства является разложением в ряд Тейлора функции  $p_1 \log\left(\frac{m_1}{m_1^0}\right) + q_1 \log\left(\frac{l_1}{l_1^0}\right)$  в точке  $(m_1^0, l_1^0)$  с точностью до третьего порядка.

Дифференцируя предыдущее равенство относительно  $x$ , получим следующее соотношение:

$$\begin{aligned} p_1 \left\{ \frac{1}{m_1^0} \frac{dm_1}{dx} - (m_1 - m_1^0) \frac{dm_1}{dx} + \frac{1}{m_1^0} (m_1 - m_1^0)^2 \frac{dm_1}{dx} \right\} \\ + q_1 \left\{ \frac{1}{l_1^0} \frac{dl_1}{dx} - (l_1 - l_1^0) \frac{dl_1}{dx} + \frac{1}{l_1^0} (l_1 - l_1^0)^2 \frac{dl_1}{dx} \right\} = 0. \quad (23) \end{aligned}$$

Применяя правило дифференцирования сложной функции  $\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{dy}{dx} \frac{\partial f}{\partial v}$  к  $f = m_1$  и  $f = l_1$  в (23), приходим к равенству

$$c_1 = \frac{dy}{dx} \Big|_{x=u_0} = - \frac{\frac{p_1}{m_1^0} \frac{\partial m_1}{\partial u} + \frac{q_1}{l_1^0} \frac{\partial l_1}{\partial u}}{\frac{p_1}{m_1^0} \frac{\partial m_1}{\partial v} + \frac{q_1}{l_1^0} \frac{\partial l_1}{\partial v}} \Big|_{(u,v)=(x_0, y_0)}.$$

С другой стороны, любая точка  $(u, v) \in C_1^{p_1, q_1}$  удовлетворяет равенству

$$p_1 \log\left(\frac{m_1}{m_1^0}\right) + q_1 \log\left(\frac{l_1}{l_1^0}\right) = \pi\sqrt{-1}.$$

Пусть  $x^{p_1, q_1}$  — переменная на  $C_1^{p_1, q_1}$ , равная  $u$ , и пусть  $y^{p_1, q_1}$  — функция на  $C_1^{p_1, q_1}$ , равная  $v$ . Мы рассматриваем  $y^{p_1, q_1}$  как функцию от  $x^{p_1, q_1}$ .

Дифференцируя относительно  $x^{p_1, q_1}$ , получим соотношение

$$\frac{p_1}{m_1} \frac{dm_1}{dx^{p_1, q_1}} + \frac{q_1}{l_1} \frac{dl_1}{dx^{p_1, q_1}} = 0. \quad (24)$$

Используя правило дифференцирования сложной функции в (24), имеем

$$c_1^{p_1, q_1} = \left. \frac{dy^{p_1, q_1}}{dx^{p_1, q_1}} \right|_{x^{p_1, q_1} = x_0^{p_1, q_1}} = - \frac{\frac{p_1}{m_1} \frac{\partial m_1}{\partial u} + \frac{q_1}{l_1} \frac{\partial l_1}{\partial u}}{\frac{p_1}{m_1} \frac{\partial m_1}{\partial v} + \frac{q_1}{l_1} \frac{\partial l_1}{\partial v}} \Bigg|_{(u, v) = (u_0^{p_1, q_1}, v_0^{p_1, q_1})}.$$

По лемме 6.3 мы видим, что  $c_1^{p_1, q_1} \rightarrow c_1$  при  $|p_1| + |q_1| \rightarrow \infty$ .

Дифференцируя (23) относительно  $x$  и используя равенство

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 2 \frac{dy}{dx} \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + \frac{d^2 y}{dx^2} \frac{\partial f}{\partial v},$$

запишем

$$c_2 = \left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=u_0} = - \left[ \frac{p_1}{m_1^0} \left\{ \frac{\partial^2 m_1}{\partial u^2} + 2c_1 \frac{\partial^2 m_1}{\partial u \partial v} + c_1^2 \frac{\partial^2 m_1}{\partial v^2} - \frac{1}{m_1^0} \left( \frac{\partial m_1}{\partial u} + c_1 \frac{\partial m_1}{\partial v} \right)^2 \right\} + \frac{q_1}{l_1^0} \left\{ \frac{\partial^2 l_1}{\partial u^2} + 2c_1 \frac{\partial^2 l_1}{\partial u \partial v} + c_1^2 \frac{\partial^2 l_1}{\partial v^2} - \frac{1}{l_1^0} \left( \frac{\partial l_1}{\partial u} + c_1 \frac{\partial l_1}{\partial v} \right)^2 \right\} \right] / \left[ \frac{p_1}{m_1^0} \frac{\partial m_1}{\partial v} + \frac{q_1}{l_1^0} \frac{\partial l_1}{\partial v} \right] \Bigg|_{(u, v) = (u_0, v_0)}. \quad (25)$$

Однако, дифференцируя (24) относительно  $x^{p_1, q_1}$ , получим

$$c_2^{p_1, q_1} = \left. \frac{d^2 y^{p_1, q_1}}{d(x^{p_1, q_1})^2} \right|_{x^{p_1, q_1} = x_0^{p_1, q_1}} = - \left[ \frac{p_1}{m_1} \left\{ \frac{\partial^2 m_1}{\partial u^2} + 2c_1^{p_1, q_1} \frac{\partial^2 m_1}{\partial u \partial v} + (c_1^{p_1, q_1})^2 \frac{\partial^2 m_1}{\partial v^2} - \frac{1}{m_1} \left( \frac{\partial m_1}{\partial u} + c_1^{p_1, q_1} \frac{\partial m_1}{\partial v} \right)^2 \right\} + \frac{q_1}{l_1} \left\{ \frac{\partial^2 l_1}{\partial u^2} + 2c_1^{p_1, q_1} \frac{\partial^2 l_1}{\partial u \partial v} + (c_1^{p_1, q_1})^2 \frac{\partial^2 l_1}{\partial v^2} - \frac{1}{l_1} \left( \frac{\partial l_1}{\partial u} + c_1^{p_1, q_1} \frac{\partial l_1}{\partial v} \right)^2 \right\} \right] / \left[ \frac{p_1}{m_1} \frac{\partial m_1}{\partial v} + \frac{q_1}{l_1} \frac{\partial l_1}{\partial v} \right] \Bigg|_{(u, v) = (x_0^{p_1, q_1}, y_0^{p_1, q_1})}. \quad (26)$$

Опять используя лемму 6.3, видим, что  $c_2^{p_1, q_1} \rightarrow c_2$  при  $|p_1| + |q_1| \rightarrow \infty$ . Продолжая аналогичным образом, мы можем также показать, что  $c_3^{p_1, q_1} \rightarrow c_3$  при  $|p_1| + |q_1| \rightarrow \infty$ .  $\square$

На четвертом шаге рассмотрим голоморфное отображение  $G_2 \iota = (m_2, l_2) : V \rightarrow \mathbb{C}^2$ , определенное в окрестности точки  $(x_0, y_0)$ .

**Предложение 6.5.** *Образы  $\mathcal{C}_1$  и  $\mathcal{C}_1^{p_1, q_1}$  соответствующих геометрических компонент  $C_1$  и  $C_1^{p_1, q_1}$  при отображении  $G_2 \iota$ , когда  $|p_1| + |q_1|$  достаточно большое, являются гладкими кривыми, проходящими через точку  $(m_2^0, l_2^0)$ . Кроме того,  $\mathcal{C}_1$  является графиком голоморфного отображения*

$$l_2 = l_2^0 + a_1(m_2 - m_2^0) + \frac{a_2}{2}(m_2 - m_2^0)^2 + \frac{a_3}{6}(m_2 - m_2^0)^3 + O(|m_2 - m_2^0|^4) \quad (27)$$



в окрестности точки  $(m_2^0, l_2^0)$ , где  $a_1 \neq 0$ , а  $\mathcal{C}_1^{p_1, q_1}$  является графиком голоморфного отображения

$$l_2 = l_2^0 + a_1^{p_1, q_1} (m_2 - m_2^0) + \frac{a_2^{p_1, q_1}}{2} (m_2 - m_2^0)^2 + \frac{a_3^{p_1, q_1}}{6} (m_2 - m_2^0)^3 + O(|m_2 - m_2^0|^4). \tag{28}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Геометрическая компонента  $C_1$  является графиком голоморфного отображения, которое разлагается в следующий ряд Тейлора:

$$v - v_0 = c_1(u - u_0) + \frac{c_2}{2}(u - u_0)^2 + \frac{c_3}{6}(u - u_0)^3 + O(|u - u_0|^4)$$

в окрестности точки  $(u_0, v_0)$ . По определению  $C_1$  имеем  $m_1 = m_1^0$  для точек на  $C_1$ . Таким образом,

$$\left. \frac{dm_1}{dx} \right|_{x=u_0} = \left[ \frac{\partial m_1}{\partial u} + c_1 \frac{\partial m_1}{\partial v} \right] \Big|_{(u,v)=(u_0,v_0)} = 0.$$

Поскольку  $\nabla m_1(u_0, v_0)$  и  $\nabla m_2(u_0, v_0)$  линейно независимы, с необходимостью

$$\left. \frac{dm_2}{dx} \right|_{x=u_0} = \left[ \frac{\partial m_2}{\partial u} + c_1 \frac{\partial m_2}{\partial v} \right] \Big|_{(u,v)=(u_0,v_0)} \neq 0.$$

Итак, отображение  $G_2\iota$ , суженное на  $C_1$ , несингулярно в точке  $(u_0, v_0)$ ; следовательно, образ  $C_1$  при отображении  $G_2\iota$  является гладкой кривой, проходящей через точку  $(m_2^0, l_2^0)$ .

Напомним, что  $C_1^{p_1, q_1}$  — график голоморфного отображения с разложением

$$v - v_0^{p_1, q_1} = c_1^{p_1, q_1} (u - u_0^{p_1, q_1}) + \frac{c_2^{p_1, q_1}}{2} (u - u_0^{p_1, q_1})^2 + \frac{c_3^{p_1, q_1}}{6} (u - u_0^{p_1, q_1})^3 + O(|u - u_0^{p_1, q_1}|^4) \tag{29}$$

в точке  $(u_0^{p_1, q_1}, v_0^{p_1, q_1})$ .

Поскольку  $c_1^{p_1, q_1} \rightarrow c_1$  и  $(u_0^{p_1, q_1}, v_0^{p_1, q_1}) \rightarrow (u_0, v_0)$  при  $|p_1| + |q_1| \rightarrow \infty$ , для достаточно больших  $|p_1| + |q_1|$  имеем

$$\left. \frac{dm_2}{dx} \right|_{x=u_0^{p_1, q_1}} = \left[ \frac{\partial m_2}{\partial u} + c_1^{p_1, q_1} \frac{\partial m_2}{\partial v} \right] \Big|_{(u,v)=(u_0^{p_1, q_1}, v_0^{p_1, q_1})} \neq 0.$$

Выше мы показали, что

$$\left. \frac{dm_2}{dx} \right|_{x=x_0} \neq 0 \quad \text{и} \quad \left. \frac{dm_2}{dx^{p_1, q_1}} \right|_{x^{p_1, q_1}=x_0^{p_1, q_1}} \neq 0$$

при достаточно больших  $|p_1| + |q_1|$ . Аналогично

$$\left. \frac{dl_2}{dx} \right|_{x=u_0} \neq 0 \quad \text{и} \quad \left. \frac{dl_2}{dx} \right|_{x=u_0^{p_1, q_1}} \neq 0$$

при достаточно больших  $|p_1| + |q_1|$ . Таким образом, предложение доказано.  $\square$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.2. Дифференцируя (27) относительно  $x$  и вычисляя в точке  $x = u_0$ , получим

$$\left. \frac{dl_1}{dx} \right|_{x=u_0} = a_1 \left. \frac{dm_1}{dx} \right|_{x=u_0}.$$

Следовательно,

$$a_1 = \frac{\frac{\partial l_1}{\partial u} + c_1 \frac{\partial l_1}{\partial v}}{\frac{\partial m_1}{\partial u} + c_1 \frac{\partial m_1}{\partial v}} \Big|_{(u,v)=(u_0,v_0)}.$$

Аналогично из (28) вытекает, что

$$a_1^{p_1, q_1} = \frac{\frac{\partial l_1}{\partial u} + c_1^{p_1, q_1} \frac{\partial l_1}{\partial v}}{\frac{\partial m_1}{\partial u} + c_1^{p_1, q_1} \frac{\partial m_1}{\partial v}} \Big|_{(u,v)=(x_0^{p_1, q_1}, y_0^{p_1, q_1})}.$$

Поскольку по предложению 6.4 имеем  $c_1^{p_1, q_1} \rightarrow c_1$  при  $|p_1| + |q_1| \rightarrow \infty$ , то  $a_1^{p_1, q_1} \rightarrow a_1$  при  $|p_1| + |q_1| \rightarrow \infty$ .

Продолжая аналогичным образом, используя последовательное дифференцирование, также получим, что  $a_i^{p_1, q_1} \rightarrow a_i$  при  $|p_1| + |q_1| \rightarrow \infty$ ,  $i = 2, 3$ .  $\square$

Завершим данный параграф следующей леммой, вытекающей из инвариантности кривых  $G_2\iota(C_1^{p_1, q_1})$  при инволюции  $(m_2, l_2) \mapsto (1/m_2, 1/l_2)$ , суженной на некоторую окрестность точки  $(m_2^0, l_2^0)$  в  $\mathbb{C}^2$ .

**Лемма 6.6.** *Имеет место равенство  $a_2^{p_1, q_1} = -m_2^0 a_1^{p_1, q_1} + l_2^0 (a_1^{p_1, q_1})^2$  при достаточно больших  $|p_1| + |q_1|$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** По результату из [6] существует инволюция  $\mathcal{I} : V \rightarrow V$  такая, что  $G_1\iota\mathcal{I}(u, v) = (m_1, l_1)$  и  $G_2\iota\mathcal{I}(u, v) = (1/m_2, 1/l_2)$ , где  $G_1\iota(u, v) = (m_1, l_1)$  и  $G_2\iota(u, v) = (m_2, l_2)$ . Поскольку  $C_1^{p_1, q_1}$  инвариантно относительно  $\mathcal{I}$ , то  $G_2\iota(C_1^{p_1, q_1})$  инвариантно относительно инволюции  $(m_2, l_2) \mapsto (1/m_2, 1/l_2)$ .  $\square$

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Hodgson C., Kerckhoff S. Universal bounds for hyperbolic Dehn surgery. (Preprint. Available at arXiv:math.GT/0204345).
2. Bleiler S., Hodgson C. Spherical space forms and Dehn-filling // Topology. 1996. V. 35, N 3. P. 809–833.
3. Kerckhoff S. Deformations of hyperbolic cone manifolds // Topology and Teichmüller spaces. Singapore: World Sci., 1996. P. 101–114.
4. Culler M., Shalen P. Varieties of group representations and splittings of 3-manifolds // Ann. Math. 1983. V. 117. P. 109–146.
5. Dowty J. Ortholengths and hyperbolic Dehn surgery. Thes. ... doct. math. Univ. Melbourne, 2000.
6. Neumann W., Zagier D. Volumes of hyperbolic 3-manifolds // Topology. 1985. V. 24. P. 307–332.
7. S. Kojima Nonsingular parts of hyperbolic 3-cone-manifolds // Topology and Teichmüller spaces. Singapore: World Sci., 1996. P. 115–122.
8. Kojima S. Hyperbolic 3-manifolds singular along knots // Chaos Solitons Fractals. 1998. V. 9, N 4–5. P. 765–777.
9. Cooper D., Culler M., Gillet H., Long D., Shalen P. Plane curves associated to character varieties of 3-manifolds // Invent. Math. 1994. V. 118, N 1. P. 47–84.

*Статья поступила 1 февраля 2005 г.*

Suhyoung Choi  
Department of Mathematics, KAIST  
305-701 Daejeon, South Korea  
schoi@math.kaist.ac.kr

Jungkeun Lee  
Electronics and Telecommunications Research Institute  
305-350 Daejeon, South Korea  
jklee@etri.re.kr