Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2006. Том 47, № 6

УДК 519.224.24

О ПРИБЛИЖЕНИЯХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ХИ–КВАДРАТ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ В СТАТИСТИЧЕСКИХ ПРИЛОЖЕНИЯХ

В. В. Ульянов, Г. Кристоф, Я. Фуджикоши

Аннотация: Получены вычислимые оценки порядка $O(n^{-1})$ точности приближения для преобразованных хи-квадрат случайных величин с n степенями свободы. Рассмотрены применения результатов к критериям отношения правдоподобия в многомерном случае.

Ключевые слова: вычислимые оценки точности приближения, хи-квадрат приближение, критерий отношения правдоподобия, преобразования случайных величин.

1. Введение

Пусть $\mathscr{X}_n^2$ — случайная величина с распределением хи-квадрат с n степенями свободы и плотностью

$$p_{\mathscr{X}_n^2}(x) = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} x^{-1+n/2} e^{-x/2} I_{(0,\infty)}(x),$$

где $I_A(x)$ обозначает индикаторную функцию множества A. Рассмотрим преобразование вида

$$T_1 = \mathscr{X}_n^2 - n\log\frac{\mathscr{X}_n^2}{n} - n.$$

Распределение T_1 возникает, например, как распределение критерия отношения правдоподобия при нулевой гипотезе о том, что дисперсия σ^2 равна некоторой заданной величине, когда выборки объема $n+1$ берутся из нормального распределения $N(\mu,\sigma^2)$ с одинаковыми средними. Заметим, что по центральной предельной теореме распределение $V_n = \bigl(\mathscr{X}_n^2 - n\bigr)/\sqrt{2n}$ сходится к распределению стандартной нормальной случайной величины. Далее, раскладывая $\log\bigl(\mathscr{X}_n^2/n\bigr)$ в ряд Тейлора в окрестности 1 до членов второго порядка малости, получаем, что главная часть в соответствующем разложении для T_1 есть V_n^2. Поэтому при больших n

$$P(T_1 \le x) = G_1(x) + O(n^{-1}),$$

где $G_m(x)$ — функция распределения хи-квадрат случайной величины $\mathscr{X}_m^2$ с m степенями свободы или суммы m квадратов независимых стандартных нормальных случайных величин. Одна из наших задач — показать, что

$$\sup_x |P(T_1 \le x) - G_1(x)| \le C(n),$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 05–01–00535, 05–01–02941) и ИНТАС (проект 03–51–5018).

где $C(n)$ — вычислимая постоянная порядка $O(n^{-1})$.

Мы получим также оценку, аналогичную оценке Берри — Эссеена, для приближения распределения случайной величины

$$T_p = \operatorname{tr} W - n \log \left| \frac{1}{n} W \right| - np,$$

которая является обобщением T_1, где случайная матрица W имеет распределение Уишарта $W_p(n, I_p)$. Напомним, что распределение Уишарта является обобщением распределения хи-квадрат. А именно, матрица W распределена так же, как сумма $X_1 X_1' + \dots + X_n X_n'$, где $X_1, \dots, X_n$ суть независимые одинаково распределенные p-мерные нормальные случайные величины с нулевыми средними и единичными ковариационными матрицами, здесь штрих означает транспонирование вектора. Распределение T_p возникает как распределение критерия отношения правдоподобия при справедливой нулевой гипотезе, когда проверяется равенство ковариационной матрицы Σ некоторой заданной матрице. Фактически мы докажем, что

$$\sup_x |P(T_p \le x) - G_q(x)| \le C(p, n),$$

где $q = \frac{1}{2} p(p+1)$ и $C(p, n)$ — вычислимая постоянная, зависящая только от p и n, при этом $C(p, n) = O(n^{-1})$, когда $n \to \infty$.

В п. 2 сформулированы основные результаты. В п. 3 дана схема доказательства теоремы 1. Показано, что теорема вытекает из оценок трех интегралов J_1–J_3. В п. 5 приведен подробный вывод оценок для J_1–J_3, который опирается на вспомогательные результаты из п. 4. Доказательство теоремы 1 дано в п. 6. В п. 7 доказывается теорема 2, которая, по существу, следует из теоремы 1. Возможные обобщения теоремы 1 обсуждаются в заключительном п. 8.

2. Основные результаты

Пусть $p \ge 1$ и $n \ge 1$ целые и $p \le n$.

Теорема 1. *Пусть $p = 1$, тогда*

$$\sup_x |P(T_1 \le x) - G_1(x)| \le C(n), \tag{1}$$

где

$$C(n) = 2D(n) + \frac{1.0249}{n} + \frac{3.3852}{\sqrt{n}} 0.9726^n$$

и

$$D(n) = \frac{0.7771}{n} + \frac{4.6155}{n} \cdot 0.9636^n + \frac{4.5094}{n} \cdot 0.9699^n.$$

Теорема 2. *Пусть $p \ge 2$ и $q = \frac{1}{2} p(p+1)$. Тогда*

$$\sup_x |P(T_p \le x) - G_q(x)| \le C(p, n), \tag{2}$$

где

$$C(p, n) = \sum_{i=1}^{p} C(n_i), \quad n_i = n - i + 1.$$

Замечание. Легко видеть, что $C(n) = O(n^{-1})$ и $C(p, n) = O(n^{-1})$, когда $n \to \infty$. Величины $D(n)$, $C(n)$ и $C(p, n)$ при некоторых значениях n и p даны в таблице, из которой, в частности, видно, что оценка точности приближения $P(T_1 \le x)$ коротким асимптотическим разложением Эджворта — Чебышева (см. неравенство (4) и лемму 3 ниже) является удовлетворительной уже при небольших значениях n.

Таблица значений $D(n)$, $C(n)$, $C(2,n)$, $C(3,n)$

n	100	150	200	250	300	500
$D(n)$	0.0111	0.0056	0.0039	0.0031	0.0026	0.0016
$C(n)$	0.0533	0.0223	0.0139	0.0105	0.0086	0.0051
$C(2,n)$	0.1079	0.0449	0.0280	0.0211	0.0173	0.0103
$C(3,n)$	0.1638	0.0678	0.0421	0.0318	0.0260	0.0155

3. Схема доказательства теоремы 1

Положим $h(y) = \sqrt{2n}y - n\log\bigl(1+\sqrt{\frac{2}{n}}y\bigr)$. Легко видеть, что

$$T_1 = h(V_n) \quad \text{с } V_n = \bigl(\mathscr{X}_n^2 - n\bigr)/\sqrt{2n}. \tag{3}$$

Заметим, что V_n получается из $\mathscr{X}_n^2$ нормировкой средним $E\bigl(\mathscr{X}_n^2\bigr) = n$ и дисперсией $\operatorname{Var}\bigl(\mathscr{X}_n^2\bigr) = 2n$. Следовательно, по центральной предельной теореме

$$F_n(x) = P(V_n \le x) = P\bigl(\mathscr{X}_n^2 - n \le \sqrt{2n}x\bigr)$$

сходится к нормальному закону $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2}\,du$ при $n\to\infty$. Поскольку $E\bigl(V_n^3\bigr) = 2\sqrt{2/n}$, разложение Эджворта — Чебышева имеет вид $F_n(x) = \Phi_n(x) + O(1/n)$ при $n\to\infty$, где

$$\Phi_n(x) = \Phi(x) + \frac{\sqrt{2}(1-x^2)}{3\sqrt{n}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}.$$

Из леммы 3, доказанной в п. 4, вытекает, что для всех целых $n \ge 1$

$$\sup_x |F_n(x) - \Phi_n(x)| \le D(n), \tag{4}$$

где

$$D(n) = \frac{0.7771}{n} + \frac{4.6155}{n}\cdot 0.9636^n + \frac{4.5094}{n}\cdot 0.9699^n.$$

Определим

$$p_{V_n}(x) = \frac{d}{dx}P(V_n \le x), \quad \varphi(x) = \frac{d}{dx}\Phi(x), \quad \varphi_n(x) = \frac{d}{dx}\Phi_n(x), \tag{5}$$
$$B_x = \{y\in\mathbb{R} : h(y) \le x\} \quad \text{и} \quad A_x = \{y\in\mathbb{R} : |y| \le \sqrt{x}\}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} P(T_1 \le x) - G_1(x) &= P(h(V_n) \le x) - [\Phi(\sqrt{x}) - \Phi(-\sqrt{x})] \\ &= \int\limits_{B_x} p_{V_n}(y)\,dy - \int\limits_{A_x}\varphi(y)\,dy = J_1 + J_2 + J_3, \end{aligned} \tag{6}$$

где

$$J_1 = \int\limits_{B_x}(p_{V_n}(y) - \varphi_n(y))\,dy, \quad J_2 = \int\limits_{B_x}\varphi(y)\,dy - \int\limits_{A_x}\varphi(y)\,dy,$$

$$J_3 = \int\limits_{B_x}(\varphi_n(y) - \varphi(y))\,dy - \int\limits_{A_x}(\varphi_n(y) - \varphi(y))\,dy.$$

Здесь мы пользуемся тем, что

$$\int\limits_{A_x} (\varphi_n(y) - \varphi(y))\, dy = 0,$$

так как множество A_x симметрично и функция $\varphi_n(y) - \varphi(y)$ нечетна. В п. 5 мы получим оценки для J_1–J_3 порядка $O(n^{-1})$, используя (4) и следующие факты: мера Лебега множества $\{A_x \Delta B_x\}$ имеет порядок $O(n^{-1/2})$; функция $\varphi(y)$ четна; функция $\varphi_n(y) - \varphi(y)$ нечетна и имеет порядок $O(n^{-1/2})$.

Детальное доказательство теоремы 1 дано в п. 6. Возможные обобщения теоремы 1 обсуждаются в п. 8.

4. Вспомогательные результаты

Пусть $f(y) = y - \log(1 + y)$ для $y > -1$.

Лемма 1. *Пусть t — действительное число, для которого*

$$0 < t < t_0 = -5 + \sqrt{40} = 1.3245. \tag{7}$$

Предположим, что y_t и $\bar{y}_t$ удовлетворяют условиям

$$f(y_t) = f(\bar{y}_t) = t^2/2 \quad \text{с } y_t > 0 \text{ и } \bar{y}_t < 0. \tag{8}$$

Тогда

$$t + \frac{t^2}{3} + \frac{t^3}{45} < y_t < t + \frac{t^2}{3} + \frac{t^3}{36} \tag{9}$$

и

$$-t + \frac{t^2}{3} - \frac{t^3}{27} < \bar{y}_t < -t + \frac{t^2}{3} - \frac{t^3}{36}. \tag{10}$$

Замечание 1. Заметим, что функция $f(y)$ убывает на интервале $y \in (-1, 0)$ и возрастает, когда $y > 0$. Поскольку функция $f(y)$ непрерывна, $\lim\limits_{y \downarrow -1} f(y) = \lim\limits_{y \uparrow +\infty} f(y) = +\infty$ и $f(0) = 0$, решения y_t и $\bar{y}_t$ однозначно определяются условиями (8).

Замечание 2. Решение $\bar{y}_t < 0$ уравнения $f(\bar{y}_t) = t^2/2$ можно записать в терминах действительной W-функции Ламберта. Напомним, что эта функция определяется как функция $W(u)$, обратная к ze^z для $z \geq -1$, т. е. если $ze^z = u$, то $z = W(u)$. Некоторые свойства и применения W-функции Ламберта см. в [1], например, имеет место представление в виде ряда

$$W(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-n)^{n-1}}{n!} z^n = z - z^2 + \frac{3}{2} z^3 - \frac{8}{3} z^4 + \frac{125}{24} z^5 + O(z^6), \quad z \to 0,$$

который сходится абсолютно при $|z| < 1/e$. Для нахождения решения уравнения

$$f(y) = t^2/2 \tag{11}$$

при условии, что $-1 < y < 0$, положим $z = 1 + y$. Тогда (11) можно записать в эквивалентном виде как $(-z)e^{-z} = -\exp\{-1 - t^2/2\}$. Следовательно, используя разложение Тейлора с $W^{(k)}(0) = (-k)^{k-1}$ для $k = 0, 1, \dots$, получаем

$$\begin{aligned} \bar{y}_t &= -W(-\exp\{-1 - t^2/2\}) - 1 \\ &= -t + (1/3)t^2 - (1/36)t^3 - (1/270)t^4 - (1/4320)t^5 + O(t^6), \quad t \to 0. \end{aligned}$$

Доказательство. Все четыре неравенства в (9) и (10) доказываются однотипно. Сначала докажем неравенство, стоящее в левой части (9). Поскольку

$f(y)$ возрастает при $y>0$, для доказательства левого неравенства в (9) достаточно показать, что

$$f(t+t^2/3+t^3/45) < f(y_t) = t^2/2 \tag{12}$$

при условии, что t удовлетворяет (7). Положим

$$\lambda_1(t) = f(t+t^2/3+t^3/45) - t^2/2 = t - t^2/6 + t^3/45 - \ln(1+t+t^2/3+t^3/45).$$

Имеем $\lambda_1(0)=0$. Следовательно, для доказательства (12) достаточно показать, что производная $\lambda_1'(t)$ отрицательна для t, удовлетворяющих (7). Легко видеть, что

$$\lambda_1'(t) = \frac{t^3(t^2+10t-15)}{675(1+t+t^2/3+t^3/45)}.$$

Квадратное уравнение $t^2+10t-15=0$ имеет решения $-5\pm\sqrt{40}$. Поэтому $\lambda_1'(t)<0$ и $\lambda_1(t)<0$ для t, удовлетворяющих (7). Заметим, что $\lambda_1(t)<0$ при $0<t<t_0^*$, где t_0^* — решение уравнения

$$t - t^2/6 + t^3/45 - \ln(1+t+t^2/3+t^3/45) = 0,$$

здесь $1.7 < t_0^* < 1.75$. Следовательно, интервал в (7) можно расширить до t_0^*. Второе неравенство в (9) доказывается аналогично. Положим

$$\lambda_2(t) = f(t+t^2/3+t^3/36) - t^2/2.$$

Имеем $\lambda_2(0)=0$ и

$$\lambda_2'(t) = \frac{t^4(t+8)}{432(1+t+t^2/3+t^3/36)}.$$

Итак, производная $\lambda_2'(t)$ положительна, и $\lambda_2(t)>0$.

Поскольку $f(y)$ убывает при $y\in(-1,0)$, неравенства (10) будут доказаны, если показать, что

$$f(-t+t^2/3-t^3/27) < f(\bar{y}_t) = t^2/2 < f(-t+t^2/3-t^3/36) \tag{13}$$

при условии, что t удовлетворяет (7). Положим

$$\lambda_3(t) = f(-t+t^2/3-t^3/27) - t^2/2, \quad \lambda_4(t) = f(-t+t^2/3-t^3/36) - t^2/2.$$

Тогда $\lambda_3(0)=\lambda_4(0)=0$ и мы получим (13), так как

$$\lambda_3'(t) = \frac{t^3(t^2-6t+9)}{243(1-t+t^2/3-t^3/27)} > 0, \quad \lambda_4'(t) = \frac{t^4(t-8)}{432(1-t+t^2/3-t^3/36)} < 0.$$

Лемма 1 доказана.

Теперь рассмотрим функцию $h(y)$, введенную перед формулой (3). Очевидно,

$$h(y) = nf\big(\sqrt{2/n}y\big). \tag{14}$$

Лемма 2. *Пусть t_0 то же, что в лемме 1, и x удовлетворяет неравенствам*

$$0 < \sqrt{2x/n} < t_0 = -5+\sqrt{40} = 1.3245. \tag{15}$$

Пусть $y_1(x)$, $y_2(x)$ таковы, что

$$h(y_1(x)) = h(y_2(x)) = x \quad \text{с } y_1(x)>0 \text{ и } y_2(x)<0. \tag{16}$$

Тогда

$$\sqrt{x} + \sqrt{\frac{2}{n}}\frac{x}{3} + \frac{2}{n}\frac{x^{3/2}}{45} < y_1(x) < \sqrt{x} + \sqrt{\frac{2}{n}}\frac{x}{3} + \frac{2}{n}\frac{x^{3/2}}{36}, \tag{17}$$

$$-\sqrt{x} + \sqrt{\frac{2}{n}}\frac{x}{3} - \frac{2}{n}\frac{x^{3/2}}{27} < y_2(x) < -\sqrt{x} + \sqrt{\frac{2}{n}}\frac{x}{3} - \frac{2}{n}\frac{x^{3/2}}{36}. \tag{18}$$

Доказательство. Неравенства (17) и (18) вытекают из (14) и (9), (10), если взять $t = \sqrt{2x/n}$ в лемме 1 и рассмотреть

$$y_t = \sqrt{\frac{2}{n}} y_1(x) \quad \text{и} \quad \bar{y}_t = \sqrt{\frac{2}{n}} y_2(x).$$

Лемма 2 доказана.

Пусть $f_n(t)$ и $g_n(t)$ — характеристическая функция распределения $F_n(x)$ и преобразование Фурье — Стилтьеса функции $\Phi_n(x)$ соответственно. Тогда при $m = n/2$ имеем

$$f_n(t) = e^{-it\sqrt{m}} \left(1 - \frac{it}{\sqrt{m}}\right)^{-m}, \quad g_n(t) = \left(1 - \frac{it^3}{3\sqrt{m}}\right) e^{-t^2/2}.$$

Сейчас мы получим равномерную оценку для хи-квадрат распределения.

Лемма 3. *Для всех $\lambda \in (0, \sqrt{3} - 1)$ и целых $n \geq 1$ имеет место оценка*

$$\sup_x |F_n(x) - \Phi_n(x)| \leq D(\lambda, n),$$

где

$$D(\lambda, n) = \frac{2}{\pi n} \left(\frac{1}{9} + \frac{2(1-\lambda)}{(2 - 2\lambda - \lambda^2)^2} + \frac{(1+\lambda^2)^{1-n/4}}{\lambda^2} + \frac{3+\lambda}{3\lambda^2} e^{-\lambda^2(3-\lambda)n/(12+4\lambda)} \right).$$

Доказательство. По формуле обращения получим

$$|F_n(x) - \Phi_n(x)| \leq \frac{1}{2\pi}(I_1 + I_2 + I_3)$$

с

$$I_1 = \int\limits_{|t|<\lambda\sqrt{m}} \frac{1}{|t|} \left| f_n(t) - \left(1 - \frac{it^3}{3\sqrt{m}}\right) e^{-t^2/2} \right| dt,$$

$$I_2 = \int\limits_{|t|\geq\lambda\sqrt{m}} \frac{|f_n(t)|}{|t|}\, dt, \quad I_3 = \int\limits_{|t|\geq\lambda\sqrt{m}} \frac{e^{-t^2/2}}{|t|} \left| \left(1 - \frac{it^3}{3\sqrt{m}}\right) \right| dt.$$

Используя ту ветвь комплексной функции $\tau(z) = \ln(1-z)$, для которой $\tau(0) = 0$, запишем

$$f_n(t) = \exp\left\{ -it\sqrt{m} - m \ln \frac{1 - it}{\sqrt{m}} \right\}$$
$$= \exp\left\{ \frac{-t^2}{2} - \frac{it^3}{3\sqrt{m}} + mR_m(t) \right\} = \exp\left\{ \frac{-t^2}{2} - \frac{it^3}{3\sqrt{m}} \right\} + S_m(t)$$

с

$$R_m(t) = -\ln\left(1 - \frac{it}{\sqrt{m}}\right) - \frac{it}{\sqrt{m}} - \frac{(it)^2}{2m} - \frac{(it)^3}{3m^{3/2}},$$

$$S_m(t) = \exp\left\{ \frac{-t^2}{2} - \frac{it^3}{3\sqrt{m}} \right\} (\exp\{mR_m(t)\} - 1).$$

Тогда для $|t| < \lambda\sqrt{m}$ находим, что

$$|mR_m(t)| \leq \frac{|t|^4}{4m(1 - |t|/\sqrt{m})}$$

и

$$|S_m(t)| \le e^{-t^2/2}|e^{mR_m(t)}-1| \le e^{-t^2/2}m|R_m(t)|e^{m|R_m(t)|}$$
$$\le e^{-t^2/2}\frac{|t|^4}{4m(1-|t|/\sqrt{m})}\exp\left\{\frac{|t|^4}{4m(1-|t|/\sqrt{m})}\right\}$$
$$\le e^{-t^2/2}\frac{|t|^4}{4m(1-\lambda)}\exp\left\{\frac{|t|^2\lambda^2}{4(1-\lambda)}\right\} = \frac{|t|^4}{4m(1-\lambda)}e^{-a|t|^2/2}$$

с $a = 1-\lambda^2/(2-2\lambda)$. Поэтому $I_1 \le I_{11}+I_{12}$, где

$$I_{11} = \int\limits_{|t|<\lambda\sqrt{m}} \frac{e^{-t^2/2}}{|t|}\left|e^{-\frac{it^3}{3\sqrt{m}}}-1+\frac{it^3}{3\sqrt{m}}\right| dt, \quad I_{12} = \int\limits_{|t|<\lambda\sqrt{m}} \frac{|S_m(t)|}{|t|}\,dt.$$

Из неравенства $\left|e^{-iz}-1+iz\right| \le |z|^2/2$ с $z = t^3/(3\sqrt{m})$ получаем

$$I_{11} \le \frac{1}{18m}\int\limits_{|t|\le\lambda\sqrt{m}} |t|^5 e^{-t^2/2}\,dt \le \frac{2}{18m}\int\limits_0^\infty t^5 e^{-t^2/2}\,dt = \frac{4}{18m} = \frac{4}{9n}$$

и

$$I_{12} \le \frac{1}{4m(1-\lambda)}\int\limits_{|t|\le\lambda\sqrt{m}} |t|^3 e^{-at^2/2}\,dt \le \frac{2}{4m(1-\lambda)}\int\limits_0^\infty t^3 e^{-at^2/2}\,dt$$
$$= \frac{4}{4m(1-\lambda)a^2} = \frac{2}{n(1-\lambda)a^2} \quad \text{с } a = 1-\lambda^2/(2-2\lambda).$$

Для оценки I_2 заметим, что $|f_n(t)| = (1+t^2/m)^{-m/2}$. Имеем

$$I_2 \le \int\limits_{|t|\ge\lambda\sqrt{m}} \frac{1}{|t|}\frac{1}{(1+t^2/m)^{m/2}}\,dt = \int\limits_{u\ge\lambda^2} \frac{du}{u(1+u)^{m/2}}$$
$$= \int\limits_{u\ge\lambda^2} \frac{(1+u)du}{u(1+u)^{1+m/2}} \le \frac{1+\lambda^2}{\lambda^2}\int\limits_{u\ge\lambda^2}(1+u)^{-1-m/2}\,du$$
$$= \frac{1+\lambda^2}{\lambda^2 m/2}(1+\lambda^2)^{-m/2} = \frac{4(1+\lambda^2)}{\lambda^2 n}(1+\lambda^2)^{-n/4}.$$

Аналогично заключительной части в доказательстве леммы 2.1 в [2], проинтегрировав по частям второй член, находим, что

$$I_3 \le 2\int\limits_{t\ge\lambda\sqrt{m}} e^{-t^2/2}\left(\frac{1}{t}+\frac{t^2}{3\sqrt{m}}\right)dt \le \left(\frac{2}{\lambda^2 m}+\frac{2\lambda}{3}+\frac{2}{3\lambda m}\right)e^{-\lambda^2 m/2}$$
$$= \frac{6+2\lambda}{3\lambda^2 m}\left(1+\frac{\lambda^3 m}{3+\lambda}\right)e^{-\lambda^2 m/2} \le \frac{6+2\lambda}{3\lambda^2 m}e^{-\lambda^2 m/2}e^{\lambda^3 m/(3+\lambda)}$$
$$= \frac{6+2\lambda}{3\lambda^2 m}e^{-\lambda^2 m(3-\lambda)/(6+2\lambda)} = \frac{12+4\lambda}{3\lambda^2 n}\left(e^{-\lambda^2(3-\lambda)/(3+\lambda)}\right)^{n/4}.$$

Объединяя оценки для I_1–I_3, завершаем доказательство леммы 3.

Замечание 3. Взяв $\lambda = 0.4$ в лемме 3, получим (4).

5. Оценки для J_1–J_3 из (6)

Напомним, что $A_x = (-\sqrt{x}, \sqrt{x})$ и $B_x = \{y : h(y) \le x\}$. Функция $h(y)$ убывает для $y \in (-\sqrt{n/2}, 0)$, $h(0) = 0$, и $h(y)$ возрастает при $y > 0$ (ср. замечание 2). Следовательно, множество B_x есть фактически интервал $(y_2(x), y_1(x))$

согласно определениям $y_1(x)$ и $y_2(x)$ в (16). Теперь мы покажем, как получить оценки для

$$J_1 = \int\limits_{B_x} (p_{V_n}(y) - \varphi_n(y))\, dy,$$

$$J_2 = \int\limits_{B_x} \varphi(y) dx - \int\limits_{A_x} \varphi(y)\, dy, \tag{19}$$

$$J_3 = \int\limits_{B_x} \Big(\varphi_n(y) - \varphi(y)\Big)\, dy - \int\limits_{A_x} (\varphi_n(y) - \varphi(y))\, dy. \tag{20}$$

Сначала рассмотрим J_1. Получаем (см. (5))

$$J_1 = (F_n(y_1(x)) - \Phi_n(y_1(x))) - (F_n(y_2(x)) - \Phi_n(y_2(x))),$$

что приводит к неравенству

$$|J_1| \le 2 \sup_x |F_n(x) - \Phi_n(x)|. \tag{21}$$

В силу (4) получаем оценку для J_1.

Теперь оценим J_2. Из (17) и (18) следует, что $\sqrt{x} - (-y_2(x)) \le y_1(x) - \sqrt{x}$. Поэтому величина J_2 может быть как положительной, так и отрицательной.

Если $J_2 < 0$, то из леммы 2 и (19) вытекает, что

$$\begin{aligned} |J_2| = -J_2 &= [\Phi(\sqrt{x}) - \Phi(-\sqrt{x})] - [\Phi(y_1(x)) - \Phi(y_2(x))] \\ &= 2\Phi(\sqrt{x}) - [\Phi(y_1(x)) + \Phi(-y_2(x))] \\ &\le 2\Phi\left(\sqrt{x} + \frac{b_1 + b_2}{2}\right) - [\Phi(\sqrt{x} + a + b_1) + \Phi(\sqrt{x} - a + b_2)], \end{aligned}$$

где $a = \frac{x}{3}\sqrt{\frac{2}{n}}$, $b_1 = \frac{x^{3/2}}{45}\frac{2}{n}$, $b_2 = \frac{x^{3/2}}{36}\frac{2}{n}$. Используя разложение Тейлора для обеих функций $\Phi(\sqrt{x} + a + b_1)$ и $\Phi(\sqrt{x} - a + b_2)$ в точке $\sqrt{x} + (b_1 + b_2)/2$, находим, что

$$|J_2| \le -\frac{1}{2}(\varphi'(y^*) + \varphi'(y^{**}))\left(a + \frac{b_1 - b_2}{2}\right)^2, \tag{22}$$

где

$$\sqrt{x} - a + b_2 \le y{*}{*} \le \sqrt{x} + (b_1 + b_2)/2 \le y{*} \le \sqrt{x} + a + b_1$$

и $\varphi'(y) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} y \exp(-y^2/2) < 0$, если $y > 0$.

Заметим, что при условии (15) имеем

$$\left(a + \frac{b_1 - b_2}{2}\right)^2 = \frac{2x^2}{9n}\left(1 - \frac{1}{120}\sqrt{\frac{2x}{n}}\right)^2 \le \frac{2x^2}{9n}.$$

Поскольку $\sqrt{x} \le y^*$, находим, что

$$x^2(-\varphi'(y^*)) \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \max_{y \ge 0}\{y^5 \exp\{-y^2/2\}\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{5}{e}\right)^{5/2}.$$

Заменим теперь условие (15) более сильным:

$$0 < \sqrt{2x/n} \le 1/3. \tag{23}$$

Имеем

$$\sqrt{x} - a + b_2 = \sqrt{x}(1 - u/3 + u^2/36) = \sqrt{x}(1 - u/6)^2 \quad \text{с } u = \sqrt{2x/n}.$$

Поскольку $\sqrt{x} - a + b_2 \le y^{**}$ и
$$\max_{0<u\le 1/3} \frac{(1-u/120)^2}{(1-u/6)^8} = \left(\frac{359}{360}\right)^2 \left(\frac{18}{17}\right)^8,$$
получаем
$$-\frac{9n}{2}\varphi'(y^{**})\Big(a + \frac{b_1 - b_2}{2}\Big)^2 = -\varphi'(y^{**})\frac{x^2(1-u/6)^8(1-u/120)^2}{(1-u/6)^8}$$
$$\le \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{359}{360}\right)^2 \left(\frac{18}{17}\right)^8 \max_{y\ge 0}\big\{y^5 \exp\{-y^2/2\}\big\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{359}{360}\right)^2 \left(\frac{18}{17}\right)^8 \left(\frac{5}{e}\right)^{5/2}.$$

В силу (22) находим, что
$$|J_2| \le \frac{1}{9\cdot\sqrt{2\pi}\cdot n}\left(\frac{5}{e}\right)^{5/2}\left(1 + \left(\frac{359}{360}\right)^2\left(\frac{18}{17}\right)^8\right) \le \frac{0.523}{n}. \tag{24}$$

Теперь предположим, что $J_2 > 0$. В этом случае из леммы 2 вытекает, что
$$0 < J_2 = \int\limits_{\sqrt{x}}^{y_1(x)} \varphi(y)\,dy - \int\limits_{-\sqrt{x}}^{y_2(x)} \varphi(y)\,dy = \int\limits_{\sqrt{x}}^{y_1(x)} \varphi(y)\,dy - \int\limits_{-y_2(x)}^{\sqrt{x}} \varphi(y)\,dy$$
$$\le \int\limits_{\sqrt{x}}^{\sqrt{x}+a+b_3} \varphi(y)\,dy - \int\limits_{\sqrt{x}}^{\sqrt{x}+a-b_4} \varphi(y)\,dy = \int\limits_{\sqrt{x}+a-b_4}^{\sqrt{x}+a+b_3} \varphi(y)\,dy,$$
где $b_3 = \frac{2}{n}\frac{x^{3/2}}{36}$, $b_4 = \frac{2}{n}\frac{x^{3/2}}{27}$. Следовательно,
$$J_2 \le \frac{14}{108n}x^{3/2}\varphi(\sqrt{x}) \le \frac{14}{108n\sqrt{2\pi}}\left(\frac{3}{e}\right)^{3/2} \le \frac{0.06}{n}.$$
Сравнивая эту оценку с (24), получаем, что для J_2 справедливо неравенство (24), когда x удовлетворяет условию (23).

Теперь мы построим следующую оценку для J_3:
$$|J_3| \le \frac{0.5019}{n}. \tag{25}$$
Положим $m(y) = (y^3 - 3y)e^{-y^2/2}$. Тогда
$$\varphi_n(y) - \varphi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{y^3 - 3y}{3\sqrt{n/2}}e^{-y^2/2} = \frac{m(y)}{3\sqrt{n\pi}}.$$

Напомним, что $y_1(x) > 0$ и $y_2(x) < 0$. Поскольку $m(-y) = -m(y)$, имеем
$$J_3 = \int\limits_{\sqrt{x}}^{y_1(x)} \frac{m(y)}{3\sqrt{n\pi}}\,dy - \int\limits_{-\sqrt{x}}^{y_2(x)} \frac{m(y)}{3\sqrt{n\pi}}\,dy = \int\limits_{-y_2(x)}^{y_1(x)} \frac{m(y)}{3\sqrt{n\pi}}\,dy.$$
Из (17) и (18) при условии (23) вытекают неравенства
$$y_1(x) \le \frac{361}{324}\sqrt{x}, \quad -y_2(x) \ge \frac{289}{324}\sqrt{x} \quad \text{и} \quad y_1(x) + y_2(x) \le \sqrt{\frac{2}{n}}\frac{2x}{3}. \tag{26}$$
При построении оценки для J_3 рассмотрим различные случаи в зависимости от значений x. Определим попарно не пересекающиеся множества следующим образом: $A_1 = (6.8493, n/18]$, $A_2 = (3.7707, 6.8493]$, $A_3 = (3.6609, 3.7707]$, $A_4 = (2.0509, 3.6609]$, $A_5 = (0, 2.0509]$. Заметим, что
$$|J_3| = \max_{1\le i\le 5}|J_{3i}|,$$

где $J_{3i} = J_3 \cdot I_{A_i}(x)$ и $I_A(x)$ обозначает индикатор множества. Ясно, что для доказательства (25) достаточно показать, что для $i = 1, \dots, 5$ имеем

$$|J_{3i}| \le \frac{0.5019}{n}. \tag{27}$$

Функция $m(y)$ принимает экстремальные значения в точках $y = \pm\sqrt{3 \pm \sqrt{6}}$, и нам нужно рассмотреть только случай $y > 0$. Тогда $m(y) < 0$, если $0 < y < \sqrt{3}$, и $m(y) > 0$, когда $y > \sqrt{3}$.

Сначала рассмотрим J_{31}. Если $x \in A_1$, то $\sqrt{3+\sqrt{6}} \le (289/324)\sqrt{x}$. Поскольку функция $m(y)$ убывает для $y \ge \sqrt{3+\sqrt{6}}$, получаем

$$0 < m(y) \le m(-y_2(x)) \le m(289\sqrt{x}/324) \quad \text{для } y \in (-y_2(x), y_1(x))$$

и

$$\int\limits_{-y_2(x)}^{y_1(x)} m(y)\,dy \le m(289\sqrt{x}/324)(y_1(x) + y_2(x))$$

$$\le \left(\left(\frac{289}{324}\right)^3 x^{3/2} - 3\left(\frac{289}{324}\right)x^{1/2}\right)e^{-(289/324)^2 x/2}\sqrt{\frac{2}{n}}\frac{2x}{3}.$$

Функция $v(x) := (a^3 x^{5/2} - 3ax^{3/2})e^{-a^2x/2}$ принимает максимальное значение в точке $x^* = (4+\sqrt{7})a^{-2}$. Взяв $a = 289/324$, находим, что $v(x) \le v(x^*) = 2.8307$. Следовательно, в этом случае

$$|J_{31}| \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{4v(x^*)}{9n},$$

что приводит к (27) для $i = 1$.

Предположим теперь, что $3.7707 < x \le 6.8493$, т. е. $(289/324)\sqrt{x} > \sqrt{3}$. Тогда, так как $0 < m(y) \le m(\sqrt{3+\sqrt{6}}) = 0.3749$ для $y \in (-y_2(x), y_1(x))$ и $x \le 6.8493$, имеем

$$|J_{32}| \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{4x}{9n}m\big(\sqrt{3+\sqrt{6}}\big) \le \frac{0.4553}{n}.$$

Заметим, что $\max\limits_{y>0}|m(y)| = -m(\sqrt{3-\sqrt{6}}) \le 1.3802$. Итак, получаем (27) для $i = 5$.

Далее рассмотрим J_{34}. Возьмем $x_1 = 2.0509$ и $x_2 = 3.6609$. В силу (26)

$$-y_2(x_1) \ge 1.2773, \quad y_1(x_2) \le 2.1319, \quad m(2.1319) \le -m(1.2773) \le 0.7732$$

и поэтому получаем (27) для $i = 4$.

Наконец, построим оценку для J_{33}. Положим $x_3 = 3.7707$. Ввиду (26)

$$-y_2(x_2) \ge 1.7066, \quad y_1(x_3) \le 2.1636 \quad \text{и} \quad -m(1.7066) \le m(2.1636) \le 0.3502,$$

что приводит к (27) для $i = 3$, так как $|J_{33}| \le 0.235/n$.

Таким образом, при всех x, удовлетворяющих (23), мы доказали (25).

6. Доказательство теоремы 1

Заметим, что J_2 и J_3 оценены в (24) и (25) для x, удовлетворяющих (15). Оценка для J_1 равномерна для всех x.

Отметим следующий факт: пусть $F(x)$ и $G(x)$ — функции распределения. Предположим, что для некоторого $x_0 > 0$

$$\sup_{|x| \le x_0} |F(x) - G(x)| \le \delta \tag{28}$$

и

$$\max\{G(-x_0), 1 - G(x_0)\} \le \varepsilon. \tag{29}$$

Тогда

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^1} |F(x) - G(x)| \le \delta + \varepsilon. \tag{30}$$

Действительно, (30) немедленно вытекает из (28) и (29), так как в силу (29)

$$\max\{F(-x_0), 1 - F(x_0)\} \le \delta + \varepsilon$$

и

$$\sup_{|x|\ge x_0} |F(x) - G(x)| \le \max\{G(-x_0), F(-x_0), 1 - F(x_0), 1 - G(x_0)\}.$$

Поскольку $G_1(x) = P(|Y|^2 \le x)$ и

$$P(|Y|^2 > x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{\sqrt{x}}^{\infty} \exp\{-y^2/2\}\, dy \le \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \int_{\sqrt{x}}^{\infty} y \exp\{-y^2/2\}\, dy$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \int_{x/2}^{\infty} \exp(-z) dz = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \exp\{-x/2\},$$

для $x \ge n/18$ получаем

$$P(|Y|^2 > x) \le \frac{6}{\sqrt{\pi n}} \exp\left(-\frac{n}{36}\right).$$

Таким образом, объединение (4), (6), (21), (24), (25) и (30) приводит к желаемой оценке (1).

7. Доказательство теоремы 2

Покажем, как (2) выводится из (1). Для $i = 1, \dots, p$ положим

$$n_i = n - i + 1 \quad \text{и} \quad X_i = \mathscr{X}^2_{n_i} - n_i \log \frac{\mathscr{X}^2_{n_i}}{n_i} - n_i.$$

Здесь все случайные величины $\mathscr{X}^2_{n_i}$ независимы. Используя известную теорему Бартлетта о разложении (см. [3]), можем записать T_p в виде

$$T_p = \sum_{i=1}^{p} (X_i + Z_i), \tag{31}$$

где $Z_i \sim \mathscr{X}^2_{i-1}$, $\mathscr{X}^2_0 = 0$ и все случайные величины Z_i и X_i независимы.

Теперь покажем, что если D_i удовлетворяет неравенству

$$\sup_x |P(X_i \le x) - P(U_i \le x)| \le D_i, \tag{32}$$

где U_i распределено так же, как $\mathscr{X}^2_1$, то

$$\sup_x |P(T_p \le x) - G_q(x)| \le D_1 + \dots + D_p \tag{33}$$

с $q = p(p + 1)/2$.

Действительно, (33) вытекает из (31), леммы 4 (см. ниже) и того факта, что сумма двух независимых случайных величин, распределенных как $\mathscr{X}^2_m$ и $\mathscr{X}^2_n$ соответственно, имеет хи-квадрат распределение с $m + n$ степенями свободы.

Лемма 4. *Пусть X_1, X_2, U_1, U_2 и Z — независимые случайные величины. Пусть для D_1 и D_2 выполнено (32) при $i = 1, 2$. Тогда*

$$\sup_x |P(X_1 + X_2 + Z \leq x) - P(U_1 + U_2 + Z \leq x)| \leq D_1 + D_2. \tag{34}$$

Замечание. В лемме 4 мы не делали никаких предположений о виде распределений X_1, X_2, U_1, U_2 и Z. Существенным было лишь условие их независимости.

Доказательство. Запишем

$$\begin{aligned}\sup_x |P(X_1 + X_2 + Z \leq x) - P(U_1 + U_2 + Z \leq x)| \\ \leq \sup_x |P(X_1 + X_2 + Z \leq x) - P(U_1 + X_2 + Z \leq x)| \\ + \sup_x |P(U_1 + X_2 + Z \leq x) - P(U_1 + U_2 + Z \leq x)|.\end{aligned} \tag{35}$$

Поскольку для любых независимых случайных величин X, U и Z имеем

$$\begin{aligned}\sup_x |P(X+Z \leq x) - P(U+Z \leq x)| \leq \sup_x E|P(X \leq x-Z \mid Z) - P(U \leq x-Z \mid Z)| \\ \leq \sup_x |P(X \leq x) - P(U \leq x)|,\end{aligned}$$

из (35) и предположений леммы получаем (34).

8. Обобщение теоремы 1

В теореме 1 построены оценки точности приближения для распределения величины T_1, для которой (см. (3)) имеет место представление $T_1 = h(V_n)$. Следовательно, обобщения возможны, если мы заменяем либо функцию h, либо случайную величину V_n, либо одновременно h и V_n на нечто похожее. Сейчас мы дадим обобщение, связанное с заменой V_n. Что касается V_n, в доказательстве теоремы 1 мы использовали только то, что распределение величины V_n может быть приближено коротким асимптотическим разложением Эджворта — Чебышева, при этом известна оценка точности приближения (см. (4)). Следовательно, справедливо следующее обобщение.

Теорема 3. *Пусть случайная величина W_n допускает приближение*

$$\sup_x |P(W_n \leq x) - \Phi_{1n}(x)| \leq C_2(n), \tag{36}$$

где $\Phi_{1n}(x) = \Phi(x) + p\big(EW_n^3, x\big)\varphi(x)/\sqrt{n}$, $p\big(EW_n^3, x\big)$ — многочлен, зависящий от третьего момента величины W_n, при этом функция $p\big(EW_n^3, x\big)$ дифференцируема и четна и $C_2(n) = O(n^{-1})$ при $n \to +\infty$. Пусть $h(y) = \sqrt{2n}y - n\log\big(1 + \sqrt{\frac{2}{n}}y\big)$ и $T = h(W_n)$. Тогда

$$\sup_x |P(T \leq x) - G_1(x)| \leq 2C_2(n) + \frac{c}{n} + \frac{3.3852}{\sqrt{n}} 0.9726^n,$$

где c — ограниченная вычислимая постоянная, зависящая от коэффициентов многочлена p.

Замечание. Различные примеры случайных величин W_n, когда W_n — нормированная сумма независимых одинаково распределенных случайных величин и W_n удовлетворяет (36), можно найти, например, в работе [2]. Мы отмечали, что теорему 1 можно применять для критериев отношения правдоподобия, когда проверяется гипотеза о равенстве дисперсии σ^2 некоторому заданному значению в случае нормальной выборки $N(\mu, \sigma^2)$ независимо от того, известно среднее μ или нет. Теорема 3 позволяет получать оценки приближения для тех же статистик при выборках из распределений, отличных от нормальных, но с известными средними μ.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Corless R. M., Gonnet G. H., Hare D. E. G., Jeffrey D. J., Knuth D. E.* On the Lambert W function // Adv. Comput. Math. 1996. V. 5, N 1. P. 329–359.
2. *Dobrić V., Ghosh B. K.* Some analogs of the Berry–Esséen bound for first-order Chebyshev–Edgeworth expansions // Statist. Decisions. 1996. V. 14, N 4. P. 383–404.
3. *Siotani M., Hayakawa T., Fujikoshi Y.* Modern multivariate statistical analysis. A graduate course and handbook. Columbus, Ohio: Amer. Sci. Press, 1985. (Amer. Sci. Press Ser. Math. Management Sci.; V. 9).

Статья поступила 29 марта 2006 г.

Ульянов Владимир Васильевич
Московский гос. университет им. М. В. Ломоносова,
Факультет вычислительной математики и кибернетики,
Ленинские горы, 119992 Москва
vladim53@yandex.ru

Gerd Christoph (Кристоф Герд)
Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Fakultät für Mathematik
Institut für Mathematische Stochastik
PF 4120
39016 Magdeburg, Deutschland
gerd.christoph@mathematik.uni-magdeburg.de

Yasunori Fujikoshi (Фуджикоши Ясунори)
Graduate School of Science and Engineering,
Chuo University, Kasuga 1-13-27, Bunkyo-ku,
Tokyo 112 Japan
yfujikoshi@yahoo.co.jp