*Сибирский математический журнал*
*Март—апрель, 2007. Том 48, № 2*

*УДК 512.5*

# О $\tau$–ЦЕНТРАЛИЗАТОРАХ ПОЛУПЕРВИЧНЫХ КОЛЕЦ

**Э. Албаш**

**Аннотация:** Пусть $R$ — полупервичное кольцо без 2-кручения и $\tau$ — эндоморфизм кольца $R$. Доказано, что при выполнении некоторых условий йорданов левый $\tau$-централизатор кольца $R$ является левым $\tau$-централизатором. Доказано также, что при выполнении тех же условий йорданов $\tau$-централизатор будет $\tau$-централизатором кольца $R$. Таким образом, получено обобщение результатов Цалара до $\tau$-централизаторов $R$.

**Ключевые слова:** первичное кольцо, полупервичное кольцо, левый централизатор, йорданов левый централизатор, левый $\tau$-централизатор, йорданов левый $\tau$-централизатор, обобщенное $(\sigma,\tau)$-дифференцирование, обобщенное йорданово $(\sigma,\tau)$-дифференцирование.

## 1. Введение

В статье $R$ обозначает ассоциативное кольцо с центром $Z$. Напомним, что кольцо $R$ является первичным, если $xRy = 0$ влечет $x = 0$ или $y = 0$, и полупервичным, если $xRx = 0$ влечет $x = 0$. Аддитивное отображение $\alpha : R \to R$ называется *дифференцированием*, если равенство $\alpha(xy) = \alpha(x)y + x\alpha(y)$ выполняется для всех $x, y \in R$. Аддитивное отображение $\alpha : R \to R$ называется *йордановым дифференцированием*, если $\alpha(x^2) = \alpha(x)x + x\alpha(x)$ верно для всех $x \in R$. Очевидно, всякое дифференцирование на $R$ является йордановым дифференцированием. Обратное, вообще говоря, неверно. Известный результат Херстейна [1] утверждает, что всякое йорданово дифференцирование на первичном кольце без 2-кручения является дифференцированием. Брешар [2] распространил этот результат до йордановых дифференцирований полупервичных колец без 2-кручения. Пусть $\sigma$ и $\tau$ — эндоморфизмы $R$. Аддитивное отображение $\alpha : R \to R$ называется $(\sigma,\tau)$-*дифференцированием*, если равенство $\alpha(xy) = \alpha(x)\tau(y) + \sigma(x)\alpha(y)$ справедливо для всех $x, y \in R$. Напомним, что *йорданово* $(\sigma,\tau)$-*дифференцирование*, определенное в [3], есть аддитивное отображение $\alpha : R \to R$, удовлетворяющее тождеству $\alpha(x^2) = \alpha(x)\tau(x) + \sigma(x)\alpha(x)$ для всех $x \in R$. В [3] показано, что при выполнении некоторых условий всякое йорданово $(\sigma,\tau)$-дифференцирование первичного кольца $R$ без 2-кручения является $(\sigma,\tau)$-дифференцированием.

Относительно недавно Брешар [4] ввел следующее определение. Аддитивное отображение $d : R \to R$ называется *обобщенным дифференцированием*, если существует такое дифференцирование $\alpha$ кольца $R$, что $d(xy) = d(x)y + x\alpha(y)$ для всех $x, y \in R$. Следовательно, понятие обобщенного дифференцирования охватывает и понятие дифференцирования, и понятие левого множителя (т. е. аддитивного отображения, удовлетворяющего тождеству $f(xy) = f(x)y$ для всех

$x, y \in R$). Основными примерами являются дифференцирования и обобщенные внутренние дифференцирования (т. е. отображения типа $x \mapsto ax + xb$ для некоторых $a, b \in R$). Заметим, что если для полупервичного (или первичного) кольца $R$ функция $d : R \to R$ произвольна и $\alpha : R \to R$ — любое аддитивное отображение, удовлетворяющие тождеству $d(xy) = d(x)y + x\alpha(y)$, для всех $x, y \in R$, то $d$ определяется единственным образом при задании $\alpha$, которое согласно [2, замечание 1] должно быть дифференцированием. Следуя [5], аддитивное отображение $d : R \to R$ назовем *йордановым обобщенным дифференцированием*, если существует такое дифференцирование $\alpha$ кольца $R$, что $d(x^2) = d(x)x + x\alpha(x)$ для всех $x \in R$. Ясно, что всякое обобщенное дифференцирование на $R$ является йордановым обобщенным дифференцированием. В статье [6] доказано, что если $R$ — первичное кольцо без 2-кручения, то всякое йорданово обобщенное дифференцирование на $R$ является обобщенным дифференцированием. Схемы доказательств этих результатов можно проследить в [7] (см. также [2, 3, 8] и [9], где можно найти некоторые обобщения). Пусть $\sigma$ и $\tau$ — эндоморфизмы кольца $R$. Аддитивное отображение $d : R \to R$ называется *обобщенным* $(\sigma, \tau)$*-дифференцированием*, если существует такое $(\sigma, \tau)$-дифференцирование $\alpha$ кольца $R$, что $d(xy) = d(x)\tau(y) + \sigma(x)\alpha(y)$ для всех $x, y \in R$.

Аддитивное отображение $d : R \to R$ называется *обобщенным йордановым* $(\sigma, \tau)$*-дифференцированием*, если существует такое $(\sigma, \tau)$-дифференцирование $\alpha$ кольца $R$, что $d(x^2) = d(x)\tau(x) + \sigma(x)\alpha(x)$ для всех $x \in R$. Очевидно, всякое $(\sigma, \tau)$-дифференцирование является обобщенным йордановым $(\sigma, \tau)$-дифференцированием.

В работе Цалара [10] введены следующие понятия. Пусть $R$ — полупервичное кольцо. *Левым* (*правым*) *централизатором* $R$ называется аддитивное отображение $T : R \to R$, удовлетворяющее равенству $T(xy) = T(x)y$ (соответственно $T(xy) = xT(y)$) для всех $x, y \in R$. Если $T$ является одновременно левым и правым централизатором, то $T$ — *централизатор*. Аддитивное отображение $T : R \to R$ называется *йордановым централизатором*, если оно удовлетворяет тождествам $T(xy + yx) = T(x)y + yT(x) = T(y)x + xT(y)$ для всех $x, y \in R$. *Йордановым левым* (*правым*) *централизатором* кольца $R$ называется аддитивное отображение $T : R \to R$ с условием $T(x^2) = T(x)x$ (соответственно $T(x^2) = xT(x)$) для всех $x \in R$. В работе [10] показано, что йорданов централизатор полупервичного кольца $R$ является левым централизатором, а каждый йорданов централизатор будет централизатором.

Дадим следующие определения. Пусть $R$ — полупервичное кольцо без 2-кручения и $\tau$ — эндоморфизм кольца $R$. *Йордановым* $\tau$*-централизатором* кольца $R$ назовем аддитивное отображение $f : R \to R$, удовлетворяющее условиям

$$f(xy + yx) = f(x)\tau(y) + \tau(y)f(x) = f(y)\tau(x) + \tau(x)f(y)$$

для всех $x, y \in R$. Аддитивное отображение $f : R \to R$ назовем *левым* (*правым*) $\tau$*-централизатором* $R$, если справедливо тождество

$$f(xy) = f(x)\tau(y) \quad (\text{соответственно } f(xy) = \tau(x)f(y))$$

для всех $x, y \in R$. Если $f$ — левый и правый $\tau$-централизатор, то его естественно назвать $\tau$*-централизатором*. Аддитивное отображение $f : R \to R$ назовем *йордановым левым* (*правым*) $\tau$*-централизатором* кольца $R$, если справедливо тождество

$$f(x^2) = f(x)\tau(x) \quad (\text{соответственно } f(x^2) = \tau(x)f(x))$$

для всех $x \in R$. Ясно, что левый $\tau$-централизатор кольца $R$ является йордановым левым $\tau$-централизатором и аналогично $\tau$-централизатор кольца $R$ является йордановым $\tau$-централизатором кольца $R$. Но обращения этих утверждений, вообще говоря, неверны. Основной целью статьи является обобщение результата Цалара до $\tau$-централизаторов кольца $R$.

## 2. Первый результат

В дальнейшем полагаем, что $R$ — полупервичное кольцо без 2-кручения и $\tau$ — сюръективный эндоморфизм $R$. В этом пункте мы покажем, что всякий йорданов левый $\tau$-централизатор кольца $R$ является при выполнении некоторых условий левым $\tau$-централизатором.

Через $[x, y]$ обозначим коммутатор $xy - yx$. Следуя [10], введем обозначение $D(x, y) = f(xy) - f(x)\tau(y)$ для всех $x, y \in R$. Заметим, что $D$ является биаддитивным отображением, ибо оно линейно по $x$ и по $y$. Далее, если $D(x, y) = 0$ для всех $x, y \in R$, то $f$ — левый $\tau$-централизатор кольца $R$.

Начнем со следующих результатов, существенно используемых в доказательстве нашего первого утверждения.

**Лемма 1** [10, лемма 1.1]. *Пусть $R$ — полупервичное кольцо. Если $a, b \in R$ таковы, что $axb = 0$ для всех $x \in R$, то $ab = ba = 0$.*

**Лемма 2** [10, лемма 1.2]. *Пусть $R$ — полупервичное кольцо, и пусть $A, B : R \times R \to R$ — биаддитивные отображения. Если $A(x, y)wB(x, y) = 0$ для всех $w, x, y \in R$, то $A(x, y)wB(u, v) = 0$ для всех $u, v, w, x, y \in R$.*

**Лемма 3.** *Пусть $f : R \to R$ — йорданов левый $\tau$-централизатор кольца $R$. Тогда $f$ удовлетворяет следующим соотношениям:*

(i) *$f(xy + yx) = f(x)\tau(y) + f(y)\tau(x)$ для всех $x, y \in R$,*

(ii) *$f(xyx) = f(x)\tau(y)\tau(x)$ для всех $x, y \in R$,*

(iii) *$f(xyz + zyx) = f(x)\tau(y)\tau(z) + f(z)\tau(y)\tau(x)$ для всех $x, y, z \in R$,*

(iv) *$D(x, y) = -D(y, x)$ для всех $x, y \in R$,*

(v) *$D(x, y)\tau(z)[\tau(u), \tau(v)] = 0$ для всех $u, v, x, y, z \in R$.*

Доказательство. (i) Так как $f$ — йорданов левый $\tau$-централизатор кольца $R$, то справедливо равенство

$$f(x^2) = f(x)\tau(x) \tag{1}$$

для всех $x \in R$. В силу линейности по $x$ из (1) получаем

$$f((x + y)^2) = f(x + y)\tau(x + y) = f(x)\tau(x) + f(y)\tau(y) + f(x)\tau(y) + f(y)\tau(x)$$

для всех $x, y \in R$. С другой стороны, из (1) имеем

$$f((x + y)^2) = f(x^2 + y^2 + xy + yx) = f(x)\tau(x) + f(y)\tau(y) + f(xy + yx)$$

для всех $x, y \in R$. Сравнивая полученные два соотношения, устанавливаем справедливость (i).

(ii) Заменяя $y$ элементом $xy + yx$ в (i) и пользуясь соотношением (1), получим

$$\begin{aligned} f(x(xy + yx) + (xy + yx)x) &= f(x)\tau(xy + yx) + f(xy + yx)\tau(x) \\ &= f(x)\tau(x)\tau(y) + 2f(x)\tau(y)\tau(x) + f(y)\tau(x)\tau(x) \end{aligned}$$

для всех $x, y \in R$ и

$$f(x(xy + yx) + (xy + yx)x) = f(x^2y + yx^2 + 2xyx)$$
$$= f(x)\tau(x)\tau(y) + f(y)\tau(x)\tau(x) + 2f(xyx)$$

для всех $x, y \in R$. Эти два соотношения устанавливают (ii).

(iii) Подставляя $x + z$ вместо $x$ в (ii), получаем (iii).

(iv) Очевидным образом следует из (i): надо переписать (i), пользуясь обозначением $D(x, y) = f(xy) - f(x)\tau(y)$.

(v) Вычислим элемент $j = f(xyzyx + yxzxy)$ двумя способами. Используя (ii), имеем

$$j = f(x)\tau(y)\tau(z)\tau(y)\tau(x) + f(y)\tau(x)\tau(z)\tau(x)\tau(y) \tag{2}$$

для всех $x, y, z \in R$. С учетом (iii) получаем

$$j = f(xy)\tau(z)\tau(y)\tau(x) + f(yx)\tau(z)\tau(x)\tau(y) \tag{3}$$

для всех $x, y, z \in R$. Сравнивая (2) и (3), приходим к равенству

$$D(x, y)\tau(z)\tau(y)\tau(x) + D(y, x)\tau(z)\tau(x)\tau(y) = 0$$

для всех $x, y, z \in R$. Поэтому в силу (iv) $D(x, y)\tau(z)[\tau(y), \tau(x)] = 0$ для всех $x, y, z \in R$. Пользуясь леммой 2 и затем леммой 1, получим $D(x, y)\tau(z)[\tau(u), \tau(v)] = 0$ для всех $u, v, x, y, z \in R$.

**Лемма 4.** *$D(x, y) \in Z$ для всех $x, y \in R$.*

Доказательство. Согласно лемме 3(v)

$$[D(x, y), \tau(r)]\tau(z)[D(x, y), \tau(r)]$$
$$= D(x, y)\tau(r)\tau(z)[D(x, y), \tau(r)] - \tau(r)D(x, y)\tau(z)[D(x, y), \tau(r)] = 0$$

для всех $r, x, y, z \in R$. Так как $R$ полупервично и $\tau$ сюръективно, получаем $[D(x, y), \tau(r)] = 0$ для всех $r, x, y \in R$. Следовательно, $D(x, y) \in Z$ для всех $x, y \in R$.

**Теорема 1.** *Если $\tau(Z) = Z$, то каждый йорданов левый $\tau$-централизатор кольца $R$ является левым $\tau$-централизатором.*

Доказательство. Наша цель — доказать, что $D(x, y) = 0$ для всех $x, y \in R$. Подставив $xa$ вместо $x$ в лемме 3(i) при $a \in Z$ и используя лемму 3(i), получим

$$f(xay + yxa) = f(xa)\tau(y) + f(y)\tau(xa) = f(xa)\tau(y) + f(y)\tau(x)\tau(a)$$

для всех $x, y \in R$ и $a \in Z$. Так как $f(xay + yxa) = f(xay + yax)$ для всех $x, y \in R$ и $a \in Z$, пользуясь леммой 3(iii), получаем

$$f(xay + yax) = f(x)\tau(ay) + f(y)\tau(ax) = f(x)\tau(a)\tau(y) + f(y)\tau(a)\tau(x)$$

для всех $x, y \in R$ и $a \in Z$. Комбинируя последние два соотношения, имеем $(f(xa) - f(x)\tau(a))\tau(y) = 0$ для всех $x, y \in R$ и $a \in Z$. Поскольку $R$ полупервично и $\tau$ сюръективно, заключаем, что

$$f(xa) - f(x)\tau(a) = D(x, a) = 0 \tag{4}$$

для всех $x \in R$ и $a \in Z$. Ясно, что $D(x, a) = -D(a, x)$ по лемме 3(iv). Следовательно,

$$D(a, x) = f(ax) - f(a)\tau(x) = 0 \tag{5}$$

для всех $x \in R$ и $a \in Z$.

Теперь мы утверждаем, что $D(x,y)c = 0$ для всех $x, y \in R$ и $c \in Z$. Так как $\tau(Z) = Z$ по предположению теоремы, то возьмем $a \in Z$ такое, что $c = \tau(a)$. Раскрыв $D(x,y)$, получим

$$D(x,y)c = f(xy)\tau(a) - f(x)\tau(y)\tau(a) \tag{6}$$

для всех $x \in R$ и $a \in Z$. С другой стороны, подставив $xy$ вместо $x$ в (4), приходим к соотношению $D(xy,a) = f(xya) - f(xy)\tau(a) = 0$ для всех $x, y \in R$ и $a \in Z$. Следовательно,

$$f(xy)\tau(a) = f(xya) \tag{7}$$

для всех $x, y \in R$ и $a \in Z$.

В силу (4)

$$f(x)\tau(a) = f(xa) \tag{8}$$

для всех $x, y \in R$ и $a \in Z$. Пользуясь соотношениями (4), (5), (7) и (8) в (6), соответственно получаем

$$\begin{aligned} D(x,y)c &= f(xy)\tau(a) - f(x)\tau(y)\tau(a) = f(xya) - f(x)\tau(a)\tau(y) \\ &= f(xya) - f(xa)\tau(y) = f(xya) - f(ax)\tau(y) = f(xya) - f(a)\tau(x)\tau(y) \\ &= f(xya) - f(a)\tau(xy) = f(xya) - f(axy) = f(xya - axy) = 0 \end{aligned}$$

для всех $x, y \in R$ и $a \in Z$. Следовательно, согласно предположению $\tau(Z) = Z$ будет $D(x,y)\tau(a) = D(x,y)c = 0$ для всех $x, y \in R$ и $c \in Z$. В частности, имеем $D(x,y)D(x,y) = (D(x,y))^2 = 0$ для всех $x, y \in R$ по лемме 4. Поскольку $R$ полупервично, то получаем желаемый результат $D(x,y) = 0$ для всех $x, y \in R$.

**Следствие 1.** *Пусть $R$ — полупростое кольцо без 2-кручения. Если $\tau(Z) = Z$, то каждый йорданов левый $\tau$-централизатор кольца $R$ является левым $\tau$-централизатором.*

Доказательство очевидным образом получается из теоремы 1 и известного факта, что всякое полупростое кольцо полупервично.

Ясно, что всякий левый $\tau$-централизатор на $R$ является йордановым левым $\tau$-централизатором. Однако следующий пример показывает, что обратное, вообще говоря, не имеет места.

Пример 1. Пусть $R$ — кольцо с $\operatorname{char} R \neq 2$ и $a^2 = 0$ для всех $a \in R$. Пусть оно содержит такой ненулевой элемент $x$, что $axa = 0$ для всех $a \in R$, но $axb \neq 0$ для некоторых ненулевых элементов $a, b \in R$; более того, $ax \neq 0$ для некоторого ненулевого $a \in R$. Рассмотрим матричное кольцо $A = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : a, b \in R \right\}$. Пусть $\tau$ — эндоморфизм кольца $A$, определяемый равенством

$$\tau\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Тогда отображение $f : A \to A$, определяемое правилом

$$f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} ax & ax - a \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

приводит к левому йорданову $\tau$-централизатору, не являющемуся левым $\tau$-централизатором на $A$.

## 3. Второй результат

Напомним, что $R$ — полупервичное кольцо без 2-кручения и $\sigma$, $\tau$ — эпиморфизмы $R$. Здесь мы покажем, что при некоторых условиях всякий йорданов $\tau$-централизатор кольца $R$ является $\tau$-централизатором.

**Лемма 5.** *Пусть $D$ — обобщенное $(\sigma,\tau)$-дифференцирование кольца $R$ и $a \in R$ — некоторый фиксированный элемент.*

(i) *Если $D(x)D(y) = 0$ для всех $x, y \in R$, то $D = 0$.*

(ii) *Если $a\tau(x) - \tau(x)a \in Z$ для всех $x \in R$, то $a \in Z$.*

Доказательство. (i) Пусть $D(x)D(y) = 0$ для всех $x, y \in R$. Подставив $yz$ вместо $y$, получим

$$0 = D(x)D(yz) = D(x)D(y)\tau(z) + D(x)\sigma(y)\alpha(z) = D(x)\sigma(y)\alpha(z)$$

для всех $x, y \in R$. Поскольку $\sigma$ сюръективно и $R$ полупервично, по лемме 1

$$\alpha(z)D(x) = 0 \tag{9}$$

для всех $x, z \in R$. Подставив $xz$ вместо $x$ в равенство (9), имеем

$$0 = \alpha(z)D(xz) = \alpha(z)D(x)\tau(z) + \alpha(z)\sigma(x)\alpha(z)$$

для всех $x, z \in R$. Полупервичность $R$ и сюръективность $\sigma$ влекут $\alpha = 0$. Тогда

$$0 = D(zx)D(z) = D(z)\tau(x)D(z) + \sigma(z)\alpha(x)D(z) = D(z)\tau(x)D(z)$$

для всех $x, z \in R$. Так как $\tau$ сюръективно (и $R$ полупервично), последнее равенство влечет $D = 0$, что и требовалось.

(ii) Положим $D(x) = a\tau(x) - \tau(x)a$. Легко видеть, что $D$ является $(\tau,\tau)$-дифференцированием кольца $R$, т. е.

$$\begin{aligned} D(xy) &= a\tau(xy) - \tau(xy)a = a\tau(x)\tau(y) - \tau(x)\tau(y)a \\ &= (a\tau(x) - \tau(x)a)\tau(y) + \tau(x)(a\tau(y) - \tau(y)a) = D(x)\tau(y) + \tau(x)D(y) \end{aligned}$$

для всех $x, y \in R$. Ясно, что $D(y) \in Z$ для всех $y \in R$ по п. (ii). Итак, имеем $D(y)x = xD(y)$ и точно так же $D(yz)x = xD(yz)$ для всех $x, y, z \in R$. Следовательно,

$$D(y)\tau(z)x + \tau(y)D(z)x = xD(y)\tau(z) + x\tau(y)D(z),$$
$$D(y)(\tau(z)x - x\tau(z)) = D(z)(x\tau(y) - \tau(y)x)$$

для всех $x, y, z \in R$. Возьмем здесь $y$ вместо $z$ и $a$ вместо $x$, тогда

$$0 = 2D(y)(\tau(y)a - a\tau(y)) = 2D(y)D(y)$$

для всех $y \in R$. Поскольку $R$ полупервичное без 2-кручения, то $D(y)^2 = 0$ для всех $y \in R$. Таким образом, из предположения п. (ii) и полупервичности $R$ вытекает равенство $D(y) = 0$ при всех $y \in R$. Так как $0 = D(y) = \tau(y)a - a\tau(y)$ при всех $y \in R$, в силу сюръективности $\tau$ получаем, что $a \in Z$.

**Лемма 6.** *Пусть $a$ — фиксированный элемент из $R$. Если $f(x) = a\tau(x) + \tau(x)a$ (для всех $x \in R$) является йордановым $\tau$-централизатором кольца $R$, то $a \in Z$.*

Доказательство. Так как $f$ — йорданов $\tau$-централизатор кольца $R$, получим $f(xy + yx) = f(x)\tau(y) + \tau(y)f(x)$ для всех $x \in R$. Отсюда

$$a\tau(xy + yx) + \tau(xy + yx)a = (a\tau(x) + \tau(x)a)\tau(y) + \tau(y)(a\tau(x) + \tau(x)a),$$
$$a\tau(y)\tau(x) + \tau(x)\tau(y)a = \tau(x)a\tau(y) + \tau(y)a\tau(x)$$

для всех $x, y \in R$. Эти соотношения приводят к равенству

$$\tau(x)(a\tau(y) - \tau(y)a) - (a\tau(y) - \tau(y)a)\tau(x) = 0$$

для всех $x, y \in R$. Из сюръективности $\tau$ вытекает, что $a\tau(y) - \tau(y)a \in Z$. Следовательно, по лемме 5(ii) $a \in Z$.

**Лемма 7.** *Всякий йорданов $\tau$-централизатор кольца $R$ отображает $Z$ в $Z$.*

Доказательство. Возьмем произвольный элемент $c \in Z$ и обозначим $a = f(c)$. Так как $f$ — йорданов $\tau$-централизатор кольца $R$, получим

$$2f(cx) = f(cx + xc) = f(c)\tau(x) + \tau(x)f(c) = a\tau(x) + \tau(x)a$$

для всех $x \in R$. Ясно, что $g(x) = 2f(cx)$ для всех $x \in R$ также является йордановым $\tau$-централизатором кольца $R$. По лемме 6 получаем $f(c) \in Z$ для всех $c \in Z$, что и требовалось.

**Лемма 8.** *Пусть $a$ и $b$ — фиксированные элементы $R$. Если $a\tau(x) = \tau(x)b$ для всех $x \in R$, то $a = b \in Z$.*

Доказательство. По предположению $a\tau(xy) = \tau(xy)b$ для всех $x, y \in R$, откуда $a\tau(x)\tau(y) = \tau(x)\tau(y)b = \tau(x)a\tau(y)$ для всех $x, y \in R$. Из последнего соотношения имеем $(a\tau(x) - \tau(x)a)\tau(y) = 0$ для всех $x, y \in R$. Так как $\tau$ сюръективно и $R$ полупервично, получаем $a\tau(x) - \tau(x)a = 0$ для всех $x \in R$. Итак, $a \in Z$. По предположению леммы $(a - b)\tau(x) = 0$ для всех $x \in R$. Отсюда $a = b$.

**Теорема 2.** *Если $\tau(Z) = Z$, то всякий йорданов $\tau$-централизатор кольца $R$ является $\tau$-централизатором.*

Доказательство. Пусть $f$ — йорданов $\tau$-централизатор кольца $R$, т. е.

$$f(xy + yx) = f(x)\tau(y) + \tau(y)f(x) = f(y)\tau(x) + \tau(x)f(y)$$

для всех $x, y \in R$. Подставив вместо $y$ элемент $xy + yx$, получим

$$\begin{gathered} f(x)\tau(xy + yx) + \tau(xy + yx)f(x) = f(xy + yx)\tau(x) + \tau(x)f(xy + yx), \\ f(x)\tau(x)\tau(y) + \tau(y)\tau(x)f(x) = \tau(y)f(x)\tau(x) + \tau(x)f(x)\tau(y), \\ (f(x)\tau(x) - \tau(x)f(x))\tau(y) = \tau(y)(f(x)\tau(x) - \tau(x)f(x)) \end{gathered}$$

для всех $x, y \in R$. Так как $\tau$ сюръективно, последнее соотношение влечет $f(x)\tau(x) - \tau(x)f(x) = [f(x), \tau(x)] \in Z$ для всех $x \in R$. Следующая цель — показать, что $[f(x), \tau(x)] = 0$ выполняется при всех $x \in R$. Возьмем произвольный элемент $c \in Z$. Поскольку $f$ — йорданов $\tau$-централизатор кольца $R$, имеем

$$2f(cx) = f(cx + xc) = f(c)\tau(x) + \tau(x)f(c) = 2f(x)\tau(c)$$

для всех $x \in R$ и $c \in Z$. По лемме 7 $f(cx) = f(c)\tau(x) = f(x)\tau(c)$ для всех $x \in R$ и $c \in Z$. Используя последнее соотношение и лемму 7, получим также

$$\begin{aligned} [f(x), \tau(x)]\tau(c) &= f(x)\tau(x)\tau(c) - \tau(x)f(x)\tau(c) = \tau(c)f(x)\tau(x) - \tau(x)f(x)\tau(c) \\ &= f(c)\tau(x)\tau(x) - \tau(x)f(c)\tau(x) = f(c)\tau(x)\tau(x) - f(c)\tau(x)\tau(x) = 0 \end{aligned}$$

для всех $x \in R$ и $c \in Z$. Следовательно, $[f(x), \tau(x)]\tau(c) = 0$ для всех $x \in R$ и $c \in Z$. Поскольку $\tau(Z) = Z$ по предположению и $[f(x), \tau(x)] \in Z$ для всех $x \in R$, из предыдущего равенства следует, что $[f(x), \tau(x)][f(x), \tau(x)] = 0$ для всех $x \in R$. Полупервичность $R$ приводит к равенству $[f(x), \tau(x)] = 0$ для всех $x \in R$. Итак, используя последнее соотношение, получим

$$2f(x^2) = f(xx + xx) = f(x)\tau(x) + \tau(x)f(x) = 2f(x)\tau(x)$$

для всех $x \in R$. А так как $R$ без 2-кручения, то $f(x^2) = f(x)\tau(x)$ для всех $x \in R$. Это показывает, что $f$ является йордановым левым $\tau$-централизатором кольца $R$. Применение теоремы 1 завершает доказательство.

**Благодарности.** Выражаю мою благодарность профессору Н. Аргач, а также рецензенту за полезные советы.

*ЛИТЕРАТУРА*


1. *Herstein I. N.* Jordan derivations of prime rings // Proc. Amer. Math. Soc. 1957. V. 8. P. 1104–1110.
2. *Brešar M.* Jordan derivations on semiprime rings // Proc. Amer. Math. Soc. 1988. V. 104, N 4. P. 1003–1006.
3. *Brešar M., Vukman J.* Jordan $(\theta, \phi)$-derivations // Glas. Mat. Ser. III. 1991. V. 26, N 1–2. P. 13–17.
4. *Brešar M.* On the distance of the composition of two derivations to the generalized derivations // Glasgow Math. J. 1991. V. 33. P. 89–93.
5. *Ashraf M., Rehman N.* On Jordan generalized derivations in rings // Math. J. Okayama Univ. 2000. V. 42. P. 7–9.
6. *Ashraf M., Rehman N., Ali S.* On Lie ideals and Jordan generalized derivations of prime rings // Indian J. Pure Appl. Math. 2003. V. 34, N 2. P. 291–294.
7. *Brešar M., Vukman J.* Jordan derivations on prime rings // Bull. Austral. Math. Soc. 1988. V. 37, N 3. P. 321–322.
8. *Awtar R.* Lie ideals and Jordan derivations of prime rings // Proc. Amer. Math. Soc. 1984. V. 90, N 1. P. 9–14.
9. *Аргач Н., Албаш Э.* Об обобщенных $(\sigma, \tau)$-дифференцированиях // Сиб. мат. журн. 2002. Т. 43, № 6. С. 1211–1221.
10. *Zalar B.* On centralizers of semiprime rings // Comment. Math. Univ. Carolin. 1991. V. 32, N 4. P. 609–614.


*Статья поступила 31 августа 2005 г.*

*Emine Albaş (Албаш Эмине)*
*Ege University,*
*Department of Mathematics,*
*Science Faculty,*
*35100 Bornova, Izmir, Turkey*
emine.albas@ege.edu.tr