Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2007. Том 48, № 2

УДК 510.67

О ЧИСЛЕ СЧЕТНЫХ МОДЕЛЕЙ ПОЛНЫХ ТЕОРИЙ С КОНЕЧНЫМИ ПРЕДПОРЯДКАМИ РУДИНА — КЕЙСЛЕРА

С. В. Судоплатов

Аннотация: Целью настоящей работы является обобщение классификации элементарных полных теорий с конечным числом счетных моделей относительно двух основных характеристик (предпорядков Рудина — Кейслера и функций распределения числа предельных моделей) на произвольный случай с конечным предпорядком Рудина — Кейслера. Устанавливается, что те же самые характеристики играют ключевую роль в рассматриваемом случае, и доказывается совместность любых конечных предпорядков Рудина — Кейслера с произвольными функциями распределения f, удовлетворяющими условию $\operatorname{rang} f \subseteq \omega \cup \{\omega, 2^\omega\}$.

Ключевые слова: счетная модель, полная теория, предпорядок Рудина — Кейслера.

В работах [1, 2] раскрыт механизм построения всех возможных теорий с конечным числом попарно неизоморфных счетных моделей относительно предпорядков Рудина — Кейслера и функций распределения числа предельных моделей. Целью настоящей работы является обобщение основного результата работы [2], переносящее классификацию теорий с конечным числом счетных моделей на случай произвольной теории с конечным предпорядком Рудина — Кейслера, имеющим не более чем счетное или континуальное число предельных моделей для каждого класса эквивалентности.

Теорема 1. *Для любого конечного квазиупорядоченного множества $\langle X, \leq\rangle$ с наименьшим элементом x_0 и наибольшим классом $\tilde{x}_1$ в упорядоченном фактормножестве $\langle X, \leq\rangle/\sim$ по отношению $\sim$ (где $x \sim y \Leftrightarrow x \leq y$ и $y \leq x$), а также для любой функции $f : X/\sim \to \omega \cup \{\omega, 2^\omega\}$, удовлетворяющей условиям $f(\tilde{x}_0) = 0$, $f(\tilde{x}_1) > 0$ при $|X| > 1$, $f(\tilde{y}) > 0$ при $|\tilde{y}| > 1$, существуют полная малая теория T и изоморфизм $g : \langle X, \leq\rangle \widetilde{\to} \mathrm{RK}(T)$ такие, что $\mathrm{IL}(g(\tilde{y})) = f(\tilde{y})$ для любого $\tilde{y} \in X/\sim$.*

Мы будем использовать без пояснений стандартную теоретико-модельную терминологию [3], а также понятия и обозначения из работ [1, 2].

Все рассматриваемые теории T будут считаться полными, имеющими бесконечные модели и *малыми*, т. е. со счетным числом типов ($|S(T)| = \omega$). Как обычно, через $I(T, \omega)$ будет обозначаться число попарно неизоморфных счетных моделей теории T.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 02–01–00258, 05–01–00411), а также Совета по грантам Президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ Российской Федерации (код проекта НШ–4787.2006.1).

Очевидно, если теория T мала, то для любого типа $p \in S(T)$ существует простая модель $\mathscr{M}_p$ над реализацией типа p.

Напомним (см. [1]), что для любых типов $p, q \in S(T)$ мы пишем $p \leq_{\mathrm{RK}} q$ и говорим, что *тип p не превосходит типа q относительно предпорядка Рудина — Кейслера* или *тип p подчиняется типу q*, если модель $\mathscr{M}_q$ содержит реализацию типа p. Вместе с тем мы пишем $\mathscr{M}_p \leq_{\mathrm{RK}} \mathscr{M}_q$ и говорим, что модель $\mathscr{M}_p$ *подчиняется модели $\mathscr{M}_q$*, если $p \leq_{\mathrm{RK}} q$. Через $\mathrm{RK}(T)$ мы обозначаем множество всех типов изоморфизма моделей $\mathscr{M}_p$ с отношением подчинения, индуцированным отношением $\leq_{\mathrm{RK}}$ для моделей $\mathscr{M}_p$.

Мы говорим, что модели $\mathscr{M}_p$ и $\mathscr{M}_q$ *взаимоподчиняемы*, если $\mathscr{M}_p \leq_{\mathrm{RK}} \mathscr{M}_q$ и $\mathscr{M}_q \leq_{\mathrm{RK}} \mathscr{M}_p$. Типы изоморфизма $\mathbf{M}_1$ и $\mathbf{M}_2$ из $\mathrm{RK}(T)$ называются *взаимоподчиняемыми* ($\mathbf{M}_1 \sim_{\mathrm{RK}} \mathbf{M}_2$), если взаимоподчиняемы их представители.

Предположение. *В дальнейшем будем предполагать, что система* $\mathrm{RK}(T)$ *конечна.*

Модель $\mathscr{M}$ называется (*сильно*) *предельной над типом p*, если $\mathscr{M}$ является объединением элементарной цепи $(\mathscr{M}_n)_{n\in\omega}$, для которой $\mathscr{M}_n \simeq \mathscr{M}_p$, $n \in \omega$, и $\mathscr{M} \not\simeq \mathscr{M}_p$.

Для любого класса $\widetilde{\mathbf{M}} \in \mathrm{RK}(T)/{\sim_{\mathrm{RK}}}$, состоящего из типов изоморфизма взаимоподчиняемых моделей $\mathscr{M}_{p_1}, \ldots, \mathscr{M}_{p_n}$, через $\mathrm{IL}(\widetilde{\mathbf{M}})$ обозначается число попарно неизоморфных предельных моделей, каждая из которых предельна над некоторым типом p_i.

Напомним [4], что тип $p \in S(T)$ называется *властным*, если модель $\mathscr{M}_p$ имеет реализацию любого типа из $S(T)$.

Как показано в [1], любое предупорядоченное множество $\mathrm{RK}(T)$ содержит наименьший элемент, соответствующий простой модели, а из конечности системы $\mathrm{RK}(T)$ следует существование наибольшего $\sim_{\mathrm{RK}}$-класса, соответствующего простым моделям над реализациями властных типов.

Повторяя доказательство предложения 3 из [1] и используя условие $|\mathrm{RK}(T)| < \omega$ вместо условия $I(T,\omega) < \omega$, получаем

Предложение. *Если $|\mathrm{RK}(T)| < \omega$, то любая счетная модель теории T проста над реализацией некоторого типа из $S(T)$ или предельна над некоторым типом из $S(T)$.*

Заметим, что в силу теоремы Морли [5] для любого класса $\widetilde{\mathbf{M}} \in \mathrm{RK}(T)/{\sim_{\mathrm{RK}}}$ число предельных моделей $\mathrm{IL}(\widetilde{\mathbf{M}})$ принадлежит множеству $\omega \cup \{\omega, \omega_1, 2^\omega\}$.

Используя последнее замечание, аналогично теореме 1 из работы [1] мы получаем следующую теорему, которая может рассматриваться как синтаксическая характеризация класса полных теорий с конечными предпорядками Рудина — Кейслера.

Теорема 2. *Любая полная малая теория T с конечным предпорядком Рудина — Кейслера удовлетворяет следующим условиям:*

(а) *система* $\mathrm{RK}(T)$ *имеет наименьший элемент* $\mathbf{M}_0$ (*тип изоморфизма простой модели*), *и* $\mathrm{IL}(\widetilde{\mathbf{M}}_0) = 0$;

(б) *система* $\mathrm{RK}(T)$ *имеет наибольший* $\sim_{\mathrm{RK}}$-*класс* $\widetilde{\mathbf{M}}_1$ (*класс типов изоморфизма всех простых моделей над реализациями властных типов*), *и из* $|\mathrm{RK}(T)| > 1$ *следует* $\mathrm{IL}(\widetilde{\mathbf{M}}_1) \geq 1$;

(в) *если* $|\widetilde{\mathbf{M}}| > 1$, *то* $\mathrm{IL}(\widetilde{\mathbf{M}}) \geq 1$.

Более того, справедлива следующая декомпозиционная формула:

$$I(T,\omega) = |\operatorname{RK}(T)| + \sum_{i=0}^{|\operatorname{RK}(T)/\sim_{\mathrm{RK}}|-1} \operatorname{IL}(\widetilde{\mathbf{M}}_i),$$

где $\widetilde{\mathbf{M}}_0, \ldots, \widetilde{\mathbf{M}}_{|\operatorname{RK}(T)/\sim_{\mathrm{RK}}|-1}$ *— все элементы частично упорядоченного множества* $\operatorname{RK}(T)/\sim_{\mathrm{RK}}$ *и* $\operatorname{IL}(\widetilde{\mathbf{M}}_i) \in \omega \cup \{\omega, \omega_1, 2^\omega\}$ *для любого* i.

Таким образом, подобно теориям с конечным числом счетных моделей число и взаимосвязь счетных моделей теории с конечным предпорядком Рудина — Кейслера определяется следующими двумя характеристиками: самим предпорядком Рудина — Кейслера, а также функцией $\operatorname{IL}(\cdot)$ распределения числа предельных моделей, которая для любого $\sim_{\mathrm{RK}}$-класса может принимать значение из множества $\omega \cup \{\omega, \omega_1, 2^\omega\}$.

Покажем, что все возможности, описанные в теореме 2 и удовлетворяющие условию $\operatorname{rang}(\operatorname{IL}(\cdot)) \subseteq \omega \cup \{\omega, 2^\omega\}$, можно реализовать. Этим теорема 1 будет доказана.

Воспользуемся доказательством теоремы 4.1 из работы [2]. Построение теории T^0 с заданным предпорядком подчинения $\langle X, \leq\rangle$ шаг за шагом повторяет конструкцию аналогичной теории с конечным числом счетных моделей. Требуемое расширение T теории T^0, удовлетворяющее условиям $\operatorname{IL}(g(\tilde{y})) = f(\tilde{y})$ для любого $\tilde{y} \in X/\sim$, будет построено по схеме, аналогичной схеме доказательства теоремы 4.1 из [2].

В силу конструкции теории T^0 достаточно рассмотреть индукционный шаг k для случая $\operatorname{IL}(g(\widetilde{\nu(k)})) = \lambda$, $\lambda \in (\omega \cup \{\omega, 2^\omega\}) \setminus \{0\}$. Определим на структуре реализаций типа p_k графовую структуру с дугами, раскрашенными попарно несовместными двухместными отношениями R''_n, $n \in \omega$, удовлетворяющую следующим условиям:

1) $R''_n(a,y)$ — главная формула, и $R''_n(a,y) \vdash p_k(y)$ для любого $a \models p_k$, $n \in \omega$;

2) для любых $a, b \models p_k$ существуют бесконечно много элементов $c \models p_k$ и бесконечно много элементов d, не реализующих типы $p_1(x), \ldots, p_{|X|-1}(x)$, для которых

$$\models R''_n(c,a) \wedge R''_n(c,b) \wedge R''_n(d,a) \wedge R''_n(d,b), \quad n \in \omega;$$

более того, из $\models R''_n(c,a)$ и $c \models p_i$ следует, что a не полуизолирует c;

3) отношение $R'_k \cup \bigcup\limits_{i=1}^{r} R''_i$ образует орграф, изоморфный орграфу Γ_{gen}.

Пусть $\mathscr{M}_a$ и $\mathscr{M}_b$ — простые модели над реализациями a и b типа p_k, для которых $\models R''_n(a,b)$ и $\mathscr{M}_b \prec \mathscr{M}_a$. Тогда модель $\mathscr{M}_a$ называется *n-расширением* модели $\mathscr{M}_b$, $n \in \omega$. Пусть $w = \langle n_1, \ldots, n_m\rangle \in \omega^m$ — m-ка, $\mathscr{M}_{a_i}$, $i = 1, \ldots, m+1$, — модели такие, что $\mathscr{M}_{a_{i+1}}$ является n_i-расширением модели $\mathscr{M}_{a_i}$, $i = 1, \ldots, m$. Тогда модель $\mathscr{M}_{a_{m+1}}$ называется *w-расширением* модели $\mathscr{M}_{a_1}$. Элементарная цепь $(\mathscr{M}_s)_{s\in\omega}$ называется *f-цепью* (где $f \in \omega^\omega$), если $\mathscr{M}_{s+1}$ — $f(s)$-расширение модели $\mathscr{M}_s$ для любого $s \in \omega$.

Аналогично доказательству теоремы 4.1 из [2], расширяя теорию предикатами R_q и R'_q, получаем теорию, в которой любая предельная модель с типом изоморфизма из $g(\widetilde{\nu(k)})$ представима в виде объединения f-цепи для некоторой последовательности $f \in \omega^\omega$. Следовательно, число $\operatorname{IL}(g(\widetilde{\nu(k)}))$ равно числу попарно неизоморфных объединений f-цепей. Введением дополнительных предикатов R_q и R'_q существование изоморфизма объединений f_1- и f_2-цепей сводится к существованию слов $w_1^m, w_2^m \in \omega^{<\omega}$, $m \in \omega$, удовлетворяющих следующим условиям:

a) последовательность f_i «подобна» счетной конкатенации слов $w_i^0, w_i^1, \ldots, w_i^m, \ldots$, $i = 0, 1$;

b) любое w_0^m-расширение является w_1^m-расширением, и, наоборот, $m \in \omega$.

Итак, проблема построения расширения теории с условием $\mathrm{IL}(g(\widetilde{\nu(k)})) = \lambda$ сводится к проблеме нахождения такой факторизации множества ω^ω отождествлениями слов w_1^m и w_2^m, что результат факторизации содержит ровно λ классов. Теперь формально определим и исследуем возможности факторизации множества ω^ω.

Рассмотрим полугруппу $S_\varnothing = \langle W, \hat{} \rangle$, состоящую из всех *непустых* слов алфавита ω и операции $\hat{}$ конкатенации. Если w_1 и w_2 — слова из W, то формула $w_1 \approx w_2$, как обычно, будет называться *тождеством*. Для данного множества I тождеств $w_1^j \approx w_2^j$, $j \in J$, определим множество тождеств, выводимых из I. Тождество $w_1 \approx w_2$ называется *выводимым* из I, если существует конечная последовательность тождеств $w_1^1 \approx w_2^1, \ldots, w_1^t \approx w_2^t$ такая, что $w_1^t = w_1$, $w_2^t = w_2$ и любое тождество из этой последовательности принадлежит I или получается из предыдущих тождеств применением одного из следующих правил вывода:

$$\frac{w_1 \approx w_2}{w_2 \approx w_1}, \quad \text{где } w_1, w_2 \in W; \tag{1}$$

$$\frac{w_1 \approx w_2;\ w_2 \approx w_3}{w_1 \approx w_3}, \quad \text{где } w_1, w_2, w_3 \in W; \tag{2}$$

$$\frac{w_1 \approx w_2;\ w_1' \approx w_2'}{w_1 w_1' \approx w_2 w_2'}, \quad \text{где } w_1, w_1', w_2, w_2' \in W; \tag{3}$$

$$\frac{w_1 w_2 w_3 \approx w_1 w_2' w_3}{w_2 \approx w_2'}, \quad \text{где } w_1, w_2, w_2', w_3 \in W. \tag{4}$$

В дальнейшем будут рассматриваться множества тождеств, замкнутые относительно выводимости. Любое множество тождеств I биективно полугруппе $S_I = \langle W, \hat{} \rangle / I$, которая является результатом факторизации полугруппы $S_\varnothing$ по следующему отношению конгруэнции $\sim_I$:

$$w_1 \sim_I w_2 \Leftrightarrow (w_1 \approx w_2) \in I.$$

Пусть $\langle \mathscr{L}, \leq \rangle$ — пара, в которой $\mathscr{L}$ — множество всех полугрупп S_I, а $S_{I_1} \leq S_{I_2}$ равносильно $I_1 \subseteq I_2$. Очевидно, система $\langle \mathscr{L}, \leq \rangle$ является полной решеткой, где $\sup\{S_{I_j} \mid j \in J\} = S_I$, I — множество всех тождеств выводимых из $\bigcup\limits_{j \in J} I_j$, $\inf\{S_{I_j} \mid j \in J\} = S_{\bigcap\limits_{j \in J} I_j}$. Полугруппа $S_0 = S_\varnothing$ является нулевым элементом в решетке $\langle \mathscr{L}, \leq \rangle$, а одноэлементная полугруппа S_1 (в которой все слова отождествлены) — ее единичным элементом.

Определим факторизации множества ω^ω, соответствующие множествам тождеств I. Две последовательности f_0 и f_1 из ω^ω называются *почти одинаковыми*, если существуют такие числа $l_0, l_1 \in \omega$, что $f_0(n + l_0) = f_1(n + l_1)$ для любых $n \in \omega$. Последовательности f_0 и f_1 называются *сильно I-эквивалентными*, если f_0 и f_1 почти одинаковы или f_i почти одинакова со счетной конкатенацией слов $w_i^m \in W$, $m \in \omega$, $i = 0, 1$, где тождество $w_0^m \approx w_1^m$ принадлежит I, $m \in \omega$. Последовательности f и f' называются *I-эквивалентными*, если существует последовательность $f_0, f_1, \ldots, f_n \in \omega^\omega$, в которой $f_0 = f$, $f_n = f'$, f_i и f_{i+1} сильно I-эквивалентны для любого $i = 0, \ldots, n - 1$.

Очевидно, что после попарных отождествлений w_1- и w_2-цепей для всех тождеств $w_1 \approx w_2$ из I существование изоморфизма объединений f- и f'-цепей становится равносильным I-эквивалентности f и f'.

Для любого множества тождеств I обозначим через ω^ω/I фактор-множество множества ω^ω по отношению I-эквивалентности. Через T^0/I обозначим теорию, полученную из T^0 попарными отождествлениями w_1- и w_2-цепей для всех тождеств $w_1 \approx w_2$ из I. Очевидно, можно предполагать, что множества ω^ω/I биективны теориям T^0/I.

Обозначим через $\mathrm{IL}_k(T^0/I)$ число $\mathrm{IL}(\widetilde{\mathbf{M}})$ для класса $\widetilde{\mathbf{M}}$ типов изоморфизма моделей теории T^0/I, содержащего тип изоморфизма модели $\mathscr{M}_{p_k}$.

Лемма 1. 1. *Если* $I_1 \subseteq I_2$, *то* $\mathrm{IL}_k(T^0/I_1) \geq \mathrm{IL}_k(T^0/I_2)$.
2. $\mathrm{IL}_k(T^0/\varnothing) = 2^\omega$.
3. $\mathrm{IL}_k(T^0/\{w_1 \approx w_2 \mid w_1, w_2 \in W\}) = 1$.

Доказательство очевидно.

Следующая лемма неявно доказана в работе [2].

Лемма 2. *Для любого* $n \in \omega \setminus \{0\}$ *существует такое множество тождеств* I_n, *что* $\mathrm{IL}_k(T^0/I_n) = n$.

Доказательство. Зафиксируем число $n \geq 1$ и рассмотрим множество I_n тождеств, выводимых из множества тождеств $n-1 \approx m$, $m \geq n$, и $n_1 n_2 \dots n_s \approx n_s$, $\max\{n_1, n_2, \dots, n_{s-1}\} < n_s$. Нетрудно заметить, что любая последовательность из ω^ω I_n-эквивалентна некоторой константной последовательности f_r, $f_r(j) \equiv r$, $j \in \omega$, $0 \leq r < n$. Действительно, из выписанных тождеств вытекает, что любая последовательность f I_n-эквивалентна последовательности f_r, где r равно наибольшему значению, меньшему чем $n-1$, бесконечных константных подпоследовательностей f, если такие подпоследовательности существуют, и $r = n-1$, если таких подпоследовательностей нет. Кроме того, очевидно, последовательности $f_0, \dots, f_{n-1}$ попарно не I_n-эквивалентны. Таким образом, $\mathrm{IL}_k(T^0/I_n) = n$. $\square$

Лемма 3. *Существует такое множество тождеств* I_ω, *что* $\mathrm{IL}_k(T^0/I_\omega) = \omega$.

Доказательство. Обозначим через I_ω множество тождеств, выводимых из тождеств $n_1 n_2 \dots n_s \approx n_s$, $\max\{n_1, n_2, \dots, n_{s-1}\} < n_s$, и $n_1 n_2 \approx n_1(n_1+1)(n_1+2)\dots(n_2-1)n_2$, $n_1 < n_2$. Покажем, что $\mathrm{IL}_k(T^0/I_\omega) = \omega$. Действительно, в силу первой системы тождеств любая ограниченная последовательность $f \in \omega^\omega$ I_ω-эквивалентна константной последовательности $f_r \in \omega^\omega$, $f_r(j) \equiv r$, $j \in \omega$, где r — наибольшее значение бесконечной константной подпоследовательности f. Кроме того, из первой и второй систем тождеств вытекает, что любая неограниченная последовательность I_ω-эквивалентна последовательности $f_\omega \in \omega^\omega$, где $f_\omega(j) = j$, $j \in \omega$. Таким образом, любая последовательность $f \in \omega^\omega$ I_ω-эквивалентна некоторой последовательности f_μ, $\mu \leq \omega$. Очевидно, последовательности f_μ попарно не I_ω-эквивалентны. Следовательно, $\mathrm{IL}_k(T^0/I_\omega) = \omega$. $\square$

Теорема 1 непосредственно вытекает из лемм 1–3.

Остается открытым вопрос о существовании такого множества I_{ω_1}, что $\mathrm{IL}_k(T^0/I_{\omega_1}) = \omega_1$. По-видимому, положительный ответ может представить альтернативный по отношению к конструкции Найта [6] подход для построения контрпримера к гипотезе Воота об отсутствии теории T, для которой $I(T, \omega) = \omega_1$.

В заключение автор благодарит Робина Найта за полезные обсуждения, предпославшие написание настоящей работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Судоплатов С. В.* Полные теории с конечным числом счетных моделей. I // Алгебра и логика. 2004. Т. 43, № 1. С. 110–124.
2. *Судоплатов С. В.* Полные теории с конечным числом счетных моделей. II // Алгебра и логика. 2006. Т. 45, № 3. С. 314–353.
3. *Справочная* книга по математической логике. I. Теория моделей / Под ред. Дж. Барвайса, Ю. Л. Ершова, Е. А. Палютина, А. Д. Тайманова. М.: Наука, 1982.
4. *Benda M.* Remarks on countable models // Fund. Math. 1974. V. 81, N 2. P. 107–119.
5. *Morley M.* The number of countable models // J. Symbolic Logic. 1970. V. 35, N 1. P. 14–18.
6. *Knight R. W.* The vaught conjecture: A counterexample. Oxford, 2002. (Preprint).

Статья поступила 8 октября 2003 г.

Судоплатов Сергей Владимирович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
sudoplat@math.nsc.ru, sudoplat@ngs.ru