Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2007. Том 48, № 3

УДК 512.543+512.547+515.162.8

ОБ АППРОКСИМАЦИОННЫХ СВОЙСТВАХ ГРУПП ЗАЦЕПЛЕНИЙ

В. Г. Бардаков, Р. В. Михайлов

Аннотация: Изучаются аппроксимационные свойства конечно порожденных линейных групп. Как приложение рассматриваемых методов получена аппроксимируемость конечными 2-группами групп зацеплений Уайтхеда, колец Борромео (ответ на вопрос Кохрана) и некоторых других зацеплений. Также показано, что любое зацепление является подзацеплением некоторого зацепления, группа которого аппроксимируется конечными 2-группами.

Ключевые слова: группа зацепления, аппроксимируемость нильпотентными группами, аппроксимируемость конечными p-группами, линейное представление, арифметическая группа.

1. Введение

Пусть $\mathscr{F}$ — некоторая система групп. Говорят, что группа G *аппроксимируется группами из* $\mathscr{F}$ или $\mathscr{F}$*-аппроксимируема*, если для каждого отличного от единицы элемента g из G существует такое гомоморфное отображение группы G на одну из групп из $\mathscr{F}$, при котором образ элемента g отличен от единицы (см. [1]). Непосредственно из определения следует, что группа G аппроксимируется нильпотентными группами тогда и только тогда, когда пересечение всех членов ее нижнего центрального ряда $\gamma_\omega(G) = \bigcap_{i=1}^{\infty} \gamma_i(G)$, $\gamma_1(G) = G$, $\gamma_{i+1}(G) = [\gamma_i(G), G]$, $i = 1, 2, \dots$, тривиально. Аналогично группа финитно аппроксимируема, т. е. аппроксимируется конечными группами, тогда и только тогда, когда в ней существует убывающий ряд нормальных подгрупп конечного индекса с тривиальным пересечением.

Как известно, следствием гипотезы Тёрстона о геометризации является финитная аппроксимируемость групп 3-многообразий [2]. Вместе с тем финитная аппроксимируемость некоторых групп 3-многообразий может быть доказана и без этой гипотезы. Например, в [2] показано, что фундаментальные группы хакеновских 3-многообразий финитно аппроксимируемы. Доказательство финитной аппроксимируемости для групп 3-многообразий, как правило, сводится к линеаризации этих групп, т. е. вложению этих групп в группу матриц $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$. При этом вопрос об аппроксимируемости групп 3-многообразий конечными p-группами для простых p оказывается значительно сложнее.

Работа первого автора выполнена при поддержке Интеграционного гранта СО РАН (№ 1.9), работа второго автора — при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 05–01–00993) и гранта Президента РФ (МК–3466.2007.1).

Пусть L — гладкое m-компонентное зацепление в трехмерной сфере S^3, т. е. образ при гладком вложении независимого объединения m окружностей в S^3. Обозначим через $G_L = \pi_1(S^3 \setminus L)$ фундаментальную группу дополнения L в S^3. Группа G_L называется *группой зацепления* L. Хорошо известно (см., например, [3, теорема 6.3.9]), что для всякого зацепления L его группа G_L финитно аппроксимируема.

Вопросы нильпотентной аппроксимируемости групп зацеплений возникают при изучении инвариантов конкордантности и кобордантности в классе зацеплений. Ключевым моментом здесь является хорошо известный факт об инвариантности фактор-групп группы зацепления по членам нижнего центрального ряда при конкордантности. Кохран [4, с. 64, вопрос 11] сформулировал следующий вопрос: «Пусть L — некоторое зацепление в S^3, отличное от тривиального и зацепления Хопфа. Вычислить $G_L/\gamma_\omega(G_L)$. Особо интересен случай, когда L — зацепление Уайтхеда и зацепление «борромеевы кольца». Верно ли, что $\gamma_\omega(G_L) = 1$ для всех n-компонентных n-мостовых зацеплений L?»

Если L — тривиальное m-компонентное зацепление, то $G_L \simeq F_m$ — свободная группа ранга m, а если L — зацепление Хопфа, то $G_L \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ — свободная абелева группа ранга 2 и в обоих случаях $\gamma_\omega(G_L) = 1$, т. е. группа G_L аппроксимируется нильпотентными группами.

Один из первых результатов, связанный с нильпотентной аппроксимируемостью, принадлежит Магнусу, который доказал, что если G — свободная группа, то $\gamma_\omega(G) = 1$ (простое доказательство этого факта можно найти в [5, § 14.2]). А. И. Мальцев [1] изучал условия, при которых свободное произведение нильпотентно аппроксимируемых групп является нильпотентно аппроксимируемой группой. В частности, он установил, что группа $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3$ не является нильпотентно аппроксимируемой. Отсюда следует, что и группа Пикара $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[i])$ не является нильпотентно аппроксимируемой.

Стоит отметить, что вопрос об установлении аппроксимационных свойств группы, заданной в виде системы порождающих и определяющих соотношений, является весьма нетривиальным с точки зрения комбинаторной теории групп. Отметим лишь некоторые результаты, известные в этом направлении. Баумслаг [6] изучал финитную аппроксимируемость свободных произведений с объединением. Большинство работ, связанных с аппроксимируемостью, в той или иной мере используют идеи этой статьи. Хигман [7] получил критерий p-аппроксимируемости свободного произведения с объединением конечных групп. Далее, аппроксимируемость свободных произведений с объединением различными классами групп исследовалась в работах [8–12]. Финитная и нильпотентная аппроксимируемость HNN-расширений изучалась в [13–18].

Несмотря на обилие работ, на данный момент нет общих подходов даже к решению задачи о нильпотентной аппроксимируемости групп с одним определяющим соотношением. Есть лишь частные результаты. Так, один специальный класс групп с одним соотношением изучал Баумслаг [8]. Е. Д. Логинова [10] получила аналогичный результат для более широкого класса групп. В работе [19] дана характеризация нильпотентно аппроксимируемых групп с одним соотношением и нетривиальным центром. Установлено [20], что центральное расширение группы с одним соотношением нильпотентно аппроксимируемо тогда и только тогда, когда исходная группа нильпотентно аппроксимируема.

В настоящей работе мы предлагаем некоторый подход, основанный на идеях Магнуса и А. И. Мальцева, к описанию зацеплений с нильпотентно аппроксимируемыми группами. Он основан на изучении зацеплений, группы которых имеют точное представление в $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ или в $\mathrm{PGL}_n(\mathbb{C})$ для некоторого натурального n. Подобное свойство известно для зацеплений, дополнения к которым в трехмерной сфере являются гиперболическими многообразиями. Такие зацепления называются *гиперболическими.* Известно, что зацепление Уайтхеда и кольца Борромео являются гиперболическими зацеплениями [21, 22]. Аппроксимируемость нильпотентными группами конечно порожденных линейных групп над полем нулевой характеристики изучал А. И. Мальцев [23]. В общем случае остается открытым

Вопрос 1. *Группы каких зацеплений являются линейными?*

Отметим также, что до сих пор не найдено описания групп с одним соотношением, имеющих точные линейные представления.

Мы установим (теорема 1) достаточное условие p-аппроксимируемости конечно порожденных подгрупп группы $\mathrm{GL}_n(F)$, где F — поле характеристики 0. Как следствие этого результата будет доказана аппроксимируемость групп некоторых зацеплений, включая зацепление Уайтхеда и колец Борромео, конечными 2-группами (теорема 2). Теорема 2 вместе с результатами работы [24] позволяет доказать, что любое зацепление является подзацеплением некоторого зацепления, группа которого аппроксимируется конечными 2-группами (теорема 3).

Благодарим А. Ю. Веснина за плодотворные дискуссии и замечание о том, что ложное зацепление Мазура является 2-мостовым. Также благодарим всех участников семинара «Эварист Галуа», прослушавших доказательства и внесших ряд полезных замечаний и предложений, и М. В. Нещадима, внесшего ряд исправлений в первоначальный вариант рукописи.

2. Аппроксимационные свойства линейных групп

Напомним вначале следующий результат, принадлежащий Грюнбергу.

Лемма 1 [25]. *Пусть $\mathscr{F}$ — один из следующих классов групп:* 1) *класс разрешимых групп,* 2) *класс конечных групп,* 3) *класс конечных p-групп для данного простого p. Пусть $P \in \mathscr{F}$, H аппроксимируется группами из класса $\mathscr{F}$. Тогда для любого расширения*

$$1 \to H \to G \to P \to 1$$

группа G аппроксимируется группами из класса $\mathscr{F}$.

А. И. Мальцев [23] (см. также [26, теорема 51.2.1]) доказал, что если G — конечно порожденная подгруппа группы $\mathrm{GL}_n(F)$, где F — поле характеристики 0, то в G найдется подгруппа конечного индекса, которая аппроксимируется конечными p-группами почти для всех простых p. Возникает естественный вопрос: при каких условиях сама группа G аппроксимируется конечными p-группами для некоторого простого p? Используя лемму Грюнберга, такое условие легко сформулировать. Действительно, так как G содержит некоторую подгруппу конечного индекса, которая аппроксимируется конечными p-группами (для некоторого простого p), то G содержит и нормальную подгруппу G_0 конечного индекса, которая также аппроксимируется конечными p-группами. Получаем короткую точную последовательность

$$1 \to G_0 \to G \to G/G_0 \to 1.$$

Ввиду леммы Грюнберга если G/G_0 — p-группа, то G аппроксимируется конечными p-группами. Тем не менее если мы имеем конкретную группу G, то мы должны уметь выбирать p. Поэтому мы дадим более конструктивное доказательство p-аппроксимируемости группы G, которое не использует непосредственно теорему Мальцева.

Пусть $G = \langle A \rangle$ — группа с конечным множеством порождающих A, лежащая в $\mathrm{GL}_n(F)$, где F — поле характеристики 0. Рассмотрим подкольцо

$$K = \mathbb{Z}[\{a_{ij}, 1 \leq i, j \leq n, (\det(a))^{-1} \mid a = (a_{ij}) \in A\}]$$

поля F, порожденное над $\mathbb{Z}$ элементами матриц из A и A^{-1}. Кольцо K является целостным, и мы можем рассматривать G как подгруппу группы $\mathrm{GL}_n(K)$.

Ввиду леммы [26, п. 51.1.3] кольцо K финитно аппроксимируемо. Более того, существует бесконечное семейство идеалов $\pi(K) = \{I_1, I_2, \dots\}$, для которых фактор-кольцо K/I_j — конечное поле характеристики p_j и семейство гомоморфизмов

$$\varphi_{j,n} : K \to K/(I_j)^n, \quad j, n = 1, 2, \dots,$$

является финитно аппроксимирующим для всякого идеала I_j, т. е.

$$|\operatorname{Im} \varphi_{j,n}| < \infty, \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} \operatorname{Ker} \varphi_{j,n} = 0.$$

Обозначим $\varphi_j = \varphi_{j,1}$. Всякий гомоморфизм $\varphi_{j,n}$ продолжается до гомоморфизма $\widetilde{\varphi}_{j,n} : \mathrm{GL}_n(K) \to \mathrm{GL}_n(K/(I_j)^n)$. В этих обозначениях справедлива

Теорема 1. *Пусть G — конечно порожденная подгруппа группы $\mathrm{GL}_n(F)$, где F — поле нулевой характеристики, K — конечно порожденное целостное подкольцо поля F такое, что $G \leq \mathrm{GL}_n(K)$. Если для некоторого идеала $I_j \in \pi(K)$ группа $\widetilde{\varphi}_j(G)$ является p_j-группой (соответственно разрешимой), то G аппроксимируется конечными p_j-группами (соответственно разрешимыми группами).*

Доказательство теоремы 1. Пусть I_j — некоторый идеал из множества $\pi(K)$. Существует короткая точная последовательность

$$1 \to \mathrm{GL}_n(K, I_j) \to \mathrm{GL}_n(K) \xrightarrow{\widetilde{\varphi}_j} \mathrm{GL}_n(K/I_j) \to 1,$$

где $\mathrm{GL}_n(K, I_j) = \operatorname{Ker}(\widetilde{\varphi}_j)$ — конгруэнц-подгруппа. Из доказательства теоремы Мальцева (см. [26, п. 51.2.1]) следует, что $\mathrm{GL}_n(K, I_j)$ аппроксимируется p_j-группами. Для самой группы G существует короткая точная последовательность

$$1 \to G \cap \mathrm{GL}_n(K, I_j) \to G \to \widetilde{\varphi}_j(G) \to 1, \tag{1}$$

где группа $G \cap \mathrm{GL}_n(K, I_j)$ аппроксимируется конечными p_j-группами. Так как $\widetilde{\varphi}_j(G)$ является p_j-группой (соответственно разрешимой группой), то G аппроксимируется конечными p_j-группами (соответственно разрешимыми группами) по лемме 1, примененной к расширению (1). $\square$

Из этой теоремы легко получить аналогичный результат для конечно порожденных линейных групп над кольцом целых алгебраических чисел $\mathscr{O}_F$ конечного расширения F поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$. Если F — некоторое конечное расширение поля $\mathbb{Q}$ степени m, то, как хорошо известно, это расширение является простым, т. е. для некоторого элемента θ из F имеем $F = \mathbb{Q}(\theta)$. Тогда всякий элемент из F имеет вид

$$a_0 + a_1\theta + \dots + a_{m-1}\theta^{m-1}, \quad a_i \in \mathbb{Q}.$$

Существует (см. [27, гл. 2, § 2]) так называемый *фундаментальный базис*, т. е. множество элементов $\omega_1, \dots, \omega_m$ из F таких, что $\mathscr{O}_F = \mathbb{Z}\omega_1 + \dots + \mathbb{Z}\omega_m$. Тогда множество $p\mathscr{O}_F = p\mathbb{Z}\omega_1 + \dots + p\mathbb{Z}\omega_m$ образует идеал кольца $\mathscr{O}_F$ для всякого простого p.

Используя те же рассуждения, что и в доказательстве теоремы 1, легко устанавливаем

Предложение 1. *Пусть G — конечно порожденная подгруппа группы $\mathrm{PSL}_n(\mathscr{O}_F)$. Если для некоторого простого p образ группы G в $\mathrm{PSL}_n(\mathscr{O}_F/p\mathscr{O}_F)$ является p-группой, то G аппроксимируется конечными p-группами.*

В дальнейшем мы будем использовать простейший случай этого предложения, а именно случай расширения $\mathbb{Q}[i] = \mathbb{Q}[\sqrt{-1}]$. В этом случае кольцом целых является кольцо целых гауссовых чисел $\mathbb{Z}[i] = \mathbb{Z} + i\mathbb{Z}$. Справедливо

Следствие. *Пусть G — конечно порожденная подгруппа группы Пикара $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[i])$. Если образ группы G в $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}_p[i])$ является p-группой, то G аппроксимируется конечными p-группами.*

Известно, что кольцо $\mathbb{Z}_p[i]$ является полем тогда и только тогда, когда p простое, не равное сумме квадратов двух целых чисел. Если $\mathbb{Z}_p[i]$ — поле, то порядок всей группы $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}_p[i])$ вычисляется по формуле (см. [5, с. 121])

$$|\,\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}_p[i])| = \frac{1}{d(p^2-1)}(p^4-1)(p^4-p^2), \quad d = \text{н.о.д.}(2, p^2-1).$$

В случае $p = 2$ группа $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}_2[i])$ имеет порядок 48.

3. Группы некоторых зацеплений

Рассмотрим теперь приложение рассмотренной выше техники к исследованию аппроксимируемости групп зацеплений конечными p-группами.

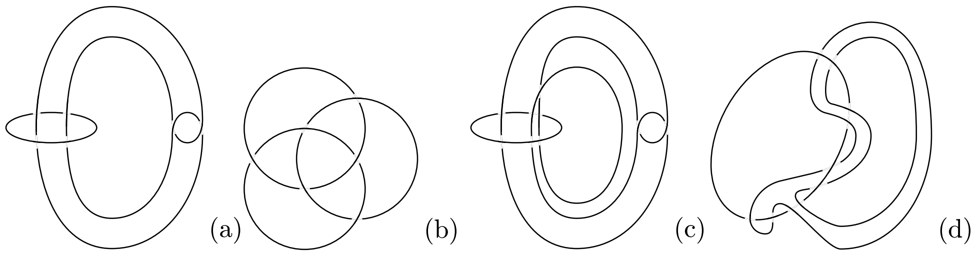
Прежде всего отметим, что для любого нетривиального узла, т. е. 1-компонентного зацепления, его группа G не является нильпотентно аппроксимируемой. Действительно, в этом случае группа G является нормальным замыканием некоторого элемента $g \in G$ (в качестве которого можно выбрать меридиан). Тогда любой элемент коммутанта $[G, G]$ порождается элементами, сопряженными с коммутаторами $[g^f, g] = [g, f, g]$, $f \in G$, где $[a, b] = a^{-1}b^{-1}ab$, $[a, b, c] = [[a, b], c]$. Таким образом, $\gamma_2(G) = \gamma_3(G)$, и если группа G нильпотентно аппроксимируема, то она является абелевой, т. е. бесконечной циклической. Из того, что группа узла вместе с периферической структурой однозначно задает класс изотопии узла [28], непосредственно следует, что узел имеет циклическую группу тогда и только тогда, когда он тривиален.

Покажем, что ответ на последнюю часть вопроса Кохрана о нильпотентной аппроксимируемости группы произвольного n-компонентного n-мостового зацепления отрицательный.

Предложение 2. *Существует 2-компонентное 2-мостовое зацепление, группа которого не является нильпотентно аппроксимируемой.*

Доказательство. Рассмотрим 2-компонентное ложное зацепление Мазура M (рис. 1(c)). Это брунеевское зацепление, т. е. любое его собственное (в данном случае 1-компонентное) подзацепление тривиально. Представление Виртингера группы G_M преобразованиями Титце приводится к следующему:

$$G_M = \langle a, b \mid a^{b^{-1}aba^{-1}bab^{-1}aba^{-1}bab^{-1}} = a, \quad b^{a^{-1}bab^{-1}aba^{-1}bab^{-1}aba^{-1}} = b\rangle,$$



(a) (b) (c) (d)

Рис. 1.

где $x^y = y^{-1}xy$. Из первого соотношения следует, что

$$a^c = a^b, \quad \text{где } c = a^2b^{-1}aba^{-1}bab^{-1}aba^{-1}ba.$$

При этом элемент c лежит в коммутанте, так как сумма показателей по каждому из порождающих равна 0. Следовательно, $[a,b] = [a,c] \in \gamma_3(G_M)$, а потому $\gamma_2(G_M) = \gamma_3(G_M)$. Таким образом, группа G_M является нильпотентно аппроксимируемой, если и только если она абелева. Рассмотрим эпиморфизм $s : G_M \to G_M/N$, где N — нормальное замыкание в G_M элементов a^2 и b^2. Группа G_M/N имеет представление

$$G_M/N = \langle a, b \mid a^2 = b^2 = (ab)^{14} = 1\rangle,$$

т. е. изоморфна группе диэдра D_{14}. Получаем, что коммутант группы G_M/N является циклической группой порядка 7, порожденной элементом $(ab)^2 \neq 1$. Следовательно, группа G_M/N не является абелевой, а поэтому G_M не аппроксимируется нильпотентными группами.

Изображенная на рис. 1 диаграмма ложного зацепления Мазура не является альтернированной. Используя преобразования Рейдемейстера, можно показать, что зацепление Мазура изотопно зацеплению 7_1^2 по классификации Рольфсена. Это зацепление является 2-мостовым. □

Легко заметить, что коэффициент зацепления у ложного зацепления Мазура отличен от нуля. Возникает естественный

Вопрос 2. *Верно ли, что группа любого* 2*-компонентного* 2*-мостового зацепления с нулевым коэффициентом зацепления нильпотентно аппроксимируема?*

Перейдем теперь к рассмотрению гиперболических зацеплений.

Пусть $\mathbb{H}^3$ — трехмерное пространство Лобачевского, которое будем рассматривать в модели Пуанкаре: $\mathbb{H}^3 = \mathbb{C} \times \mathbb{R}^+ = \{(z,r) \mid z \in \mathbb{C}, r \in \mathbb{R}, r > 0\}$. Группа сохраняющих ориентацию изометрий $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^3)$ пространства $\mathbb{H}^3$ изоморфна группе $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$. При этом действие группы $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ на $\mathbb{H}^3$ определяется равенством

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot (z,r) = \frac{1}{N}((az+b)(\overline{cz+d}) + a\bar{c}r^2, r), \quad N = |cz+d|^2 + |c|^2r^2,$$

где мы, как обычно, элементы группы $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ представляем матрицами из $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$. Группа всех изометрий $\mathrm{Isom}(\mathbb{H}^3)$ пространства $\mathbb{H}^3$ является полупрямым произведением группы $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^3) \simeq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ на $\mathbb{Z}_2$, при этом $\mathbb{Z}_2$ действует на $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ комплексным сопряжением.

Известно, что подгруппа $G \leq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ действует вполне разрывно на $\mathbb{H}^3$ тогда и только тогда, когда G дискретна в $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$. Если G дискретна и не имеет кручения, то фактор-пространство $G \setminus \mathbb{H}^3$ является трехмерным римановым многообразием с метрикой, индуцированной из $\mathbb{H}^3$. Известно, что если $G \leq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ является группой зацепления $L \subseteq S^3$, то G дискретна, $G \setminus \mathbb{H}^3$ гомеоморфно $S^3 \setminus L$ и $G \simeq \pi_1(G \setminus \mathbb{H}^3) \simeq \pi_1(S^3 \setminus L)$.

Изучение теоретико-групповых свойств подгрупп в $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ представляет собой целую область, использующую как алгебраические, так и геометрические методы. Особый интерес представляют арифметические подгруппы в $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$, в частности, подгруппы групп $\mathrm{PSL}_2(\mathscr{O}_F)$ для $F = \mathbb{Q}(\sqrt{-d})$, где d — свободное от квадратов натуральное число.

В работе [29] рассматривались подгруппы конечного индекса без кручения в группе Пикара $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[i])$. Такие подгруппы являются группами гиперболических многообразий конечного объема. Эти многообразия могут быть описаны как дополнения зацеплений в замкнутом 3-многообразии. Известно, что если некоторая подгруппа группы Пикара не имеет кручения и является подгруппой конечного индекса, то этот индекс делится на 12. В [29] рассматриваются подгруппы без кручения двух наименьших возможных индексов: 12 и 24. С точностью до изоморфизма число таких подгрупп равно 2 и 17 соответственно.

Рассмотрим некоторые подгруппы группы Пикара индексов 12 и 24. Соответствующие представления этих групп можно найти в работах [21, 22, 29].

1. $G_1 = \langle x, y \mid x(yxy^{-2}xy) = (yxy^{-2}xy)x\rangle$. Это группа зацепления Уайтхеда (рис. 1(a)). Точное представление в группе Пикара $f_1 : G_1 \to \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[i])$ задается отображением

$$x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad y \mapsto \begin{pmatrix} i & 1+i \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Это подгруппа имеет индекс 12 в $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[i])$.

Рассматриваемые ниже группы $G_2, \dots, G_7$ имеют индекс 24 в группе $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[i])$.

2. $$G_2 = \big\langle x_1, x_2, x_3 \mid x_1 = \big(x_2^{-1}x_3x_2x_3^{-1}\big)x_1\big(x_3x_2^{-1}x_3^{-1}x_2\big), \\ x_2 = \big(x_3^{-1}x_1^{-1}x_3x_1\big)x_2\big(x_1^{-1}x_3^{-1}x_1x_3\big)\big\rangle.$$

Это группа колец Борромео (рис. 1(b)). Точное представление в группе Пикара $f_2 : G_2 \to \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[i])$ задается отображением

$$x_1 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -2i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad x_2 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad x_3 \mapsto \begin{pmatrix} 2+i & 2i \\ -1 & -i \end{pmatrix}.$$

Это единственная нормальная подгруппа в $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[i])$, имеющая индекс 24.

3. $G_3 = \langle a_1, a_2, a_3, a_4 \mid a_3a_4 = a_4a_3, a_2a_1 = a_1a_2, a_2a_3a_1a_4 = a_4a_1a_3a_2\rangle$. Это группа четырехзвенной цепи (рис. 2(a)). Точное представление в группе Пикара $f_3 : G_3 \to \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[i])$ задается отображением

$$a_1 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1-i & 1 \end{pmatrix}, \quad a_2 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1-i & 1 \end{pmatrix},$$

$$a_3 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -2i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad a_4 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. $G_4 = \langle u, v, w, z \mid uv = vu,\ wz = zw,\ zuv^{-1}zuw^{-1}vw^{-1}u = 1\rangle$. Это группа 3-компонентного зацепления (рис. 1(d)). Точное представление в группе Пикара $f_4 : G_4 \to \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[i])$ задается отображением

$$u \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad v \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1+2i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad w \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1-i & 1 \end{pmatrix}, \quad z \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1-i & 1 \end{pmatrix}.$$

5. $G_6 = \langle u, v, w \mid w(u^2v^{-2}) = (u^2v^{-2})w,\ w^{-1}u^{-1}vw = u^3v^{-3}\rangle$. Это группа некоторого зацепления в $S^1 \times S^2$. Точное представление в группе Пикара $f_6 : G_6 \to \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[i])$ задается отображением

$$u \mapsto \begin{pmatrix} i & 1 \\ -1+i & 1 \end{pmatrix}, \quad v \mapsto \begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1+i & 1 \end{pmatrix}, \quad w \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. $G_7 = \langle u, v, w \mid w(u^2v^{-1}w^{-1}v) = (u^2v^{-1}w^{-1}v)w,\ w^{-1}u^{-1}v^3w = u^3v^{-1}\rangle$. Это группа некоторого зацепления в линзовом пространстве $L(8,3)$. Точное представление в группе Пикара $f_7 : G_7 \to \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[i])$ задается отображением

$$u \mapsto \begin{pmatrix} i & 1 \\ -1+i & 1 \end{pmatrix}, \quad v \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1+i & i \end{pmatrix}, \quad w \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Теорема 2. *Группы G_i, $i = 1, \dots, 6$, аппроксимируются конечными 2-группами.*

Доказательство. Рассмотрим образы групп $G_i \leq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[i])$ при гомоморфизме $\varphi_2 : \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[i]) \to \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}_2[i])$. Докажем, что они являются 2-группами в $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}_2[i])$. Тогда требуемое утверждение будет вытекать из следствия предложения 1.

1. Обозначим $a = \varphi_2(f_1(x))$, $b = \varphi_2(f_1(y))$. Тогда $a^2 = b^2 = 1$. Непосредственно проверяется, что

$$[a, b] = \begin{pmatrix} i & 1+i \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

(для простоты мы обозначаем образы элементов $\mathbb{Z}[i]$ в $\mathbb{Z}_2[i]$ теми же символами). Имеем $[a, b]^2 = 1$, откуда следует, что порядок группы $\varphi_2(G_1)$ равен 8.

2. Для группы G_2 имеем $\varphi_2(x_1) = 1$. Обозначим $z_i = \varphi_2(x_i)$, $i = 2, 3$. Получим $z_i^2 = 1$ и $[z_2, z_3] = 1$, откуда следует, что группа $\varphi_2(G_2) \simeq \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ имеет порядок 4.

3. Для группы G_3 имеем $\varphi_2(a_i) = 1$, $i = 3, 4$, и $\varphi_2(a_1) = \varphi_2(a_2)$ — элемент порядка 2 в группе $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}_2[i])$. Следовательно, $\varphi_2(G_3) = \mathbb{Z}_2$.

4. Имеем $\varphi_2(u) = E$, где E — единичная матрица,

$$\varphi_2(v) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \varphi_2(w) = \varphi_2(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1+i & 1 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, $\varphi_2(v)^2 = \varphi_2(w)^2 = 1$ и

$$[\varphi_2(v), \varphi_2(w)] = \begin{pmatrix} i & 1+i \\ 0 & i \end{pmatrix}, \quad [\varphi_2(v), \varphi_2(w)]^2 = 1.$$

Следовательно, порядок группы $\varphi_2(G_4)$ равен 8.

5. Имеем $\varphi_2(w) = E$ и

$$\varphi_2(u) = \varphi_2(v) = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1+i & 1 \end{pmatrix}$$

— элемент порядка 4 в группе $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[i])$. Поэтому $\varphi_2(G_6)$ имеет порядок 4.

6. Имеем $\varphi_2(w) = E$ и

$$\varphi_2(u) = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1+i & 1 \end{pmatrix}, \quad \varphi_2(v) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1+i & i \end{pmatrix}.$$

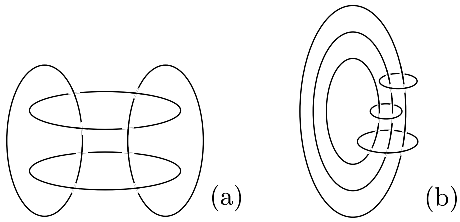


Рис. 2.

Очевидно, $\varphi_2(v) = \varphi_2(w)^{-1}$, и, как уже отмечалось в п. 6, $\varphi_2(v)$ имеет порядок 4. Поэтому порядок $\varphi_2(G_7)$ также равен 4. $\square$

Таким образом, мы доказали аппроксимируемость конечными 2-группами пяти из 17 подгрупп индекса 24 в группе Пикара, а также группы зацепления Уайтхеда и четырехзвенной цепи. В работе [30] изучались подгруппы без кручения индекса 6 и 12 в $\mathrm{PSL}_2(\mathscr{O}_{-7})$, где $\mathscr{O}_{-7}$ — кольцо целых чисел алгебраического поля $\mathbb{Q}[\sqrt{-7}]$. С точностью до изоморфизма существует две подгруппы индекса 6 и 16 подгрупп индекса 12. Ни для одной из них нам не удалось доказать аппроксимируемость конечными 2-группами.

Вопрос 3. *Существует ли простое $p > 2$, при котором некоторые из этих групп аппроксимируются конечными p-группами?*

Как было отмечено выше, сама группа Пикара $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[i])$ не является нильпотентно аппроксимируемой. Покажем, что и группа $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}[i])$ не является нильпотентно аппроксимируемой. Рассмотрим следующие элементы группы $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}[i])$:

$$\alpha = \begin{pmatrix} -1 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что $\alpha^3 = 1$, $\beta^4 = 1$. Очевидно, $[\alpha, \beta] \neq 1$, а так как в нильпотентной группе любые два элемента взаимно простых порядков перестановочны, то $[\alpha, \beta] \in \gamma_\omega(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}[i]))$.

Вопрос 4. *Верно ли, что группы 3-многообразий, полученных из трехмерной сферы 2-арной перестройкой по зацеплениям G_i, $i = 1, \dots, 6$ (т. е. перестройкой по оснащенным зацеплениям G_i, где в качестве оснащений рассматриваются степени 2), аппроксимируются конечными 2-группами?*

Теорема 3. *Любое зацепление L в S^3 является подзацеплением некоторого зацепления, группа которого аппроксимируется конечными 2-группами.*

Доказательство. В работе [24] показано, что любое зацепление — подзацепление некоторого арифметического зацепления. Основным шагом в доказательстве этого факта является следующее утверждение: любое зацепление L является подзацеплением зацепления J такого, что $S^3 \setminus J$ — накрытие над $S^3 \setminus L_1$, где L_1 — 6-компонентное зацепление (рис. 2(b)). Дополнение $S^3 \setminus L_1$ является 2-листным накрытием над $S^3 \setminus L_0$, где L_0 —четырехзвенная цепь (рис. 2(a)). Группа $\pi_1(S^3 \setminus L_0)$ аппроксимируется конечными 2-группами по теореме 2, а так как $\pi_1(S^3 \setminus J)$ является подгруппой группы $\pi_1(S^3 \setminus L_0)$, отсюда следует, что $\pi_1(S^3 \setminus J)$ также аппроксимируется конечными 2-группами. $\square$

В частности, из теоремы 3 следует, что аппроксимационные свойства групп зацеплений не сохраняются при переходе к подзацеплениям. Теорема 3 дает естественную мотивацию следующего определения. Для зацепления L через $N(L)$ будем обозначать наименьшее число n такое, что можно добавить к L n окружностей так, что полученное зацепление будет иметь нильпотентно аппроксимируемую группу. Вычисление $N(L)$ для данного зацепления L, видимо, представляет собой нетривиальную задачу. В частности, интересен даже такой

Вопрос 5. *Существует ли m-компонентное, $m \geq 1$, зацепление L, группа которого не является нильпотентно аппроксимируемой, такое, что для любого $(m+1)$-компонентного зацепления J такого, что $L \subset J$, группа G_J также не является нильпотентно аппроксимируемой? Другими словами, существует ли зацепление L, для которого $N(L) > 1$?*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мальцев А. И.* Обобщенно нильпотентные алгебры и их присоединенные группы // Мат. сб. 1949. Т. 25, № 3. С. 347–366.
2. *Thurston W.* Three dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry // Bull. Amer. Math. Soc. 1982. V. 6, N 3. P. 357–381.
3. *Kawauchi A.* A survey of knot theory. Basel; Boston; Berlin: Birkhauser Verl., 1996.
4. *Cochran T. D.* Derivatives of links: Milnor's concordance invariants and Massey's products // Mem. Amer. Math. Soc. 1990. V. 84, N 427. P. 1–73.
5. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп. М.: Наука, 1996.
6. *Baumslag G.* On the residual finiteness of generalized free products of nilpotent groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1963. V. 106, N 2. P. 193–209.
7. *Higman G.* Amalgams of p-groups // J. Algebra. 1964. V. 1, N 3. P. 301–305.
8. *Baumslag G.* On the residual nilpotent of certain one-relator groups // Comm. Pure Appl. Math. 1968. V. 21, N 5. P. 491–506.
9. *Kim G., McCarron J.* On amalgamated free products of residually p-finite groups // J. Algebra. 1993. V. 162, N 1. P. 1–11.
10. *Логинова Е. Д.* Финитная аппроксимируемость свободного произведения двух групп с коммутирующими подгруппами // Сиб. мат. журн. 1999. Т. 40, № 2. С. 395–407.
11. *Азаров Д. Н.* О нильпотентной аппроксимируемости свободных произведений свободных групп с циклическим объединением // Мат. заметки. 1998. Т. 64, № 1. С. 3–8.
12. *Kim G., Tang C. Y.* On generalized free products of residually finite p-groups // J. Algebra. 1998. V. 201, N 1. P. 317–327.
13. *Baumslag B., Tretkoff M.* Residually finite HNN-extensions // Comm. Algebra. 1978. V. 6, N 2. P. 179–194.
14. *Andreadakis S., Raptis E., Varsos D.* A characterization of residually finite HNN-extensions of finitely generated abelian groups // Arch. Math. 1988. V. 50, N 6. P. 495–501.
15. *Raptis E., Varsos D.* The residual nilpotency of HNN-extensions with base group a finite or a f. g. abelian group // J. Pure Appl. Algebra. 1991. V. 76, N 2. P. 167–178.
16. *Молдаванский Д. И.* Аппроксимируемость конечными p-группами HNN-расширений // Вестн. Ивановского гос. ун-та. 2000. № 3. С. 129–140.
17. *Молдаванский Д. И.* Финитная аппроксимируемость некоторых HNN-расширений групп // Вестн. Ивановского гос. ун-та. 2002. № 3. С. 123–133.
18. *Молдаванский Д. И.* Аппроксимируемость конечными p-группами некоторых HNN-расширений групп // Вестн. Ивановского гос. ун-та. 2003. № 3. С. 102–116.
19. *McCarron J.* Residually nilpotent one-relator groups with nontrivial centre // Proc. Amer. Math. Soc. 1996. V. 124, N 1. P. 1–5.
20. *Михайлов Р.* О нильпотентной и разрешимой аппроксимируемости групп // Мат. сб. 2005. Т. 196, № 11. С. 109–126.
21. *Wielenberg N.* The structure of certain subgroups of the Picard group // Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. 1978. V. 84, N 3. P. 427–436.
22. *Крушкаль С. Л., Апанасов Б. Н., Гусевский Н. А.* Клейновы группы и униформизация в примерах и задачах. Новосибирск: Наука, 1981.
23. *Мальцев А. И.* Об изоморфном представлении бесконечных групп матрицами // Мат. сб. 1940. Т. 8, № 3. С. 405–422.

24. *Baker M.* All links are sublinks of arithmetic links // Pacific J. Math. 2002. V. 203, N 1. P. 257–263.
25. *Gruenberg K. W.* Residual properties of infinite soluble groups // Proc. London Math. Soc. 1957. V. 7, N 25. P. 29–62.
26. *Мерзляков Ю. И.* Рациональные группы. М.: Наука, 1987.
27. *Боревич З. И., Шафаревич Р. И.* Теория чисел. М.: Наука, 1972.
28. *Waldhausen F.* On irreducible 3-manifolds which are sufficiently large // Ann. of Math. (2). 1968. V. 87, N 1. P. 56–88.
29. *Brunner A. M., Frame M. L., Lee Y. W., Wielenberg N. J.* Classifying torsion-free subgroups of the Picard group // Trans. Amer. Math. Soc. 1984. V. 282, N 1. P. 205–235.
30. *Grunewald F., Hirsch U.* Link complements arising from arithmetic group actions // International J. Math. 1995. V. 6, N 3. P. 337–370.

Статья поступила 21 ноября 2005 г., окончательный вариант — 7 июня 2006 г.

Бардаков Валерий Георгиевич,
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
bardakov@math.nsc.ru,

Михайлов Роман Валерьевич
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН,
ул. Губкина, 8, Москва 119991
rmikhailov@mail.ru