*Сибирский математический журнал*
*Май—июнь, 2007. Том 48, № 3*

*УДК 517.54*

# УСТОЙЧИВОСТЬ CR–ОТОБРАЖЕНИЙ МЕЖДУ НИЛЬПОТЕНТНЫМИ ДВУСТУПЕНЧАТЫМИ ГРУППАМИ ЛИ

**В. Ван**

**Аннотация:** Квази-CR-отображение из нильпотентной двуступенчатой группы Ли $\mathscr{N}_b$ в другую такую группу удовлетворяет системе дифференциальных уравнений с частными производными типа Бельтрами, обычно не эллиптической, но субэллиптической, когда группа $\mathscr{N}_b$ строго 2-псевдовогнута. Получено интегральное представление для CR-отображения из строго 2-псевдовогнутой нильпотентной двуступенчатой группы Ли в другую такую группу и с использованием этого представления установлены гёльдеровость $\varepsilon$-квази-CR-отображения и устойчивость CR-отображения между такими группами.

**Ключевые слова:** квази-CR-отображение, система типа Бельтрами, устойчивость CR-отображений, формула интегрального представления.

Проблема устойчивости конформных отображений поставлена М. А. Лаврентьевым около 60 лет тому назад. Теория устойчивости конформных отображений в евклидовых пространствах развита М. А. Лаврентьевым, П. П. Белинским и Ю. Г. Решетняком [1]. А. П. Копылов ввел понятие $\xi$-устойчивости и создал теорию устойчивости многомерных голоморфных отображений [2–5]. Н. С. Даирбековым и А. П. Копыловым развита теория классов отображений, удовлетворяющих линейным системам эллиптических дифференциальных уравнений первого порядка или высоких порядков [6, 7]. Недавно А. П. Копылов распространил эту теорию на класс гармонических отображений [8, 9]. А. А. Егоров и М. В. Коробков рассмотрели устойчивость класса аффинных отображений и некоторых других классов отображений [10–12]. CR-отображения на вещественных подмногообразиях в $\mathbf{C}^N$ аналогичны голоморфным отображениям на $\mathbf{C}^N$, а квази-CR-отображения удовлетворяют системе дифференциальных уравнений в частных производных типа Бельтрами. Эта система обычно не эллиптична, но иногда субэллиптична. Группа Гейзенберга служит простейшей нильпотентной двуступенчатой группой Ли. Кораньи и Рейманн [13] вывели систему дифференциальных уравнений в частных производных типа Бельтрами для квазиконформных отображений на группе Гейзенберга. Цель нашей работы — получить устойчивость CR-отображений из нильпотентной двуступенчатой группы Ли $\mathscr{N}_b$ в другую такую группу $\mathscr{N}_{\tilde{b}}$. От нильпотентной группы Ли $\mathscr{N}_b$ мы требуем строгой 2-псевдовогнутости, поскольку на такой группе оператор $\overline{\partial}_b$ на функциях и лапласиан Кона $\Box_b$ на $(0,1)$-формах разрешимы и теория CR-функций хорошо изучена. Группа Гейзенберга не является строго 2-псевдовогнутой, она строго псевдовогнута. Однако Н. С. Даирбеков

Partially supported by the National Natural Science Foundation in China.

показал устойчивость отображений с ограниченным искажением на группе Гейзенберга [14].

Для любых $q, q' \in \mathbf{N}$ есть нильпотентная двуступенчатая группа Ли $\mathscr{N}_{q,q'}$ такая, что группой CR-автоморфизмов группы $\mathscr{N}_{q,q'}$ является $\mathrm{SU}(q+1, q'+1)$ по модулю ее центра. Группа $\mathscr{N}_{q,q'}$ представляет собой комплексный аналог псевдоевклидова пространства $\mathbf{R}^{q,q'}$ (см. замечание 1.2(1)). Класс CR-отображений из нильпотентной группы Ли $\mathscr{N}_{q,q'}$ в себя, очевидно, отличен от класса конформных отображений на $\mathscr{N}_{q,q'}$, определенных с использованием метрики Карно — Каратеодори [15]. В вещественном случае Л. Г. Гуров изучил устойчивость преобразований Лоренца [16]. Отметим, что до сих пор нет удовлетворительного подхода к изучению $\varepsilon$-квазиконформных отображений на псевдоевклидовых пространствах, хотя на их комплексном аналоге можно использовать систему уравнений с частными производными типа Бельтрами для определения деформаций CR-отображений. Когда $\mathscr{N}_b$ — контактное многообразие ($\mathscr{N}_{q,q'}$ таково), класс квази-CR-отображений довольно обширен благодаря обилию контактных отображений (см. замечание 1.2(2)). Квази-CR-отображения могут быть применены в деформациях CR-структур [17–19].

План статьи таков. В § 1 сообщаются основные утверждения о нильпотентных двуступенчатых группах Ли, квази-CR-отображениях, системах дифференциальных уравнений с частными производными типа Бельтрами и наша основная теорема устойчивости CR-отображений. В § 2 с помощью формулы Грина для лапласиана Кона выводится формула интегрального представления CR-отображения на строго 2-псевдовогнутой нильпотентной двуступенчатой группе Ли. Эта формула является CR-версией формулы Бохнера — Мартинелли для голоморфного отображения на $\mathbf{C}^n$. В § 3 доказана гёльдеровость $\varepsilon$-квази-CR-отображений. В § 4 класс функционалов, введенный А. П. Копыловым, и его результаты о $\xi$-устойчивости на $\mathbf{R}^N$ обобщаются на нильпотентные двуступенчатые группы и с использованием этих обобщений доказывается наша основная теорема.

## § 1. Предварительные сведения и формулировки результатов

Будем обозначать через $(z, w)$, $z = (z_1, \dots, z_n)$, $w = (w_1, \dots, w_p)$, точки пространства $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^p$. Основные факты о квадратичных CR-многообразиях, нильпотентных двуступенчатых группах Ли и анализе на них см. в [20]. Пусть $b = (b^1, \dots, b^p)$, где $b^\alpha = \left(b^\alpha_{jk}\right)$, $\alpha = 1, \dots, p$, — эрмитова $n \times n$-матрица. С фиксированным $p$-набором $b$ свяжем *квадратичное* CR-*многообразие* $M_b$ над $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^p$, определенное равенствами

$$\rho_\alpha(z, w) = 0, \quad \alpha = 1, \dots, p, \tag{1.1}$$

где

$$\rho_\alpha(z, w) = \operatorname{Im} w_\alpha - \sum_{j,k=1}^{n} b^\alpha_{jk} z_j \bar{z}_k. \tag{1.2}$$

*Проекция* $\pi_b : M_b \to \mathbf{C}^n \times \mathbf{R}^p$ определяется так:

$$\pi_b(z, w) = (z_1, \dots, z_n, \operatorname{Re} w_1, \dots, \operatorname{Re} w_p). \tag{1.3}$$

*Комплексные касательные векторы* на $M_b$ суть линейные комбинации $\frac{\partial}{\partial z_j}$ и $\frac{\partial}{\partial w_\alpha}$, дающие 0 при применении к заданным функциям $\rho_\alpha$. Они являются линейными комбинациями величин

$$\widetilde{Z}_j = \frac{\partial}{\partial z_j} + 2i \sum_{\alpha=1}^{p} \sum_{k=1}^{n} b_{jk}^{\alpha} \bar{z}_k \frac{\partial}{\partial w_\alpha}, \quad j = 1, \dots, n. \tag{1.4}$$

Пространство комплексных касательных векторов на $M_b$ обозначается через $T_{1,0}(M_b)$. Функция $f$ на $M_b$ — это функция от $(z, \bar{z}, t_\alpha)$, где $t_\alpha = \operatorname{Re} w_\alpha$, на таких функциях $\frac{\partial}{\partial w_\alpha}$ и $\frac{\partial}{\partial \overline{w}_\alpha}$ переходят в $\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t_\alpha}$. А именно, $\pi_{b*}\widetilde{Z}_j = Z_j$ с

$$Z_j = \frac{\partial}{\partial z_j} + i \sum_{\alpha=1}^{p} \sum_{k=1}^{n} b_{jk}^{\alpha} \bar{z}_k \frac{\partial}{\partial t_\alpha}, \quad j = 1, \dots, n. \tag{1.5}$$

Пусть

$$T_\alpha = \frac{\partial}{\partial t_\alpha}, \quad \alpha = 1, \dots, p. \tag{1.6}$$

Тогда $\{Z_1, \dots, Z_n, \overline{Z}_1, \dots, \overline{Z}_n, T_1, \dots, T_p\}$ образует базис нильпотентной двуступенчатой алгебры Ли:

$$[Z_j, Z_k] = [\overline{Z}_j, \overline{Z}_k] = 0, \quad [\overline{Z}_j, Z_k] = 2i b_{kj}^{\alpha} T_\alpha, \quad j, k = 1, \dots, n. \tag{1.7}$$

Запишем вещественную и мнимую части $Z_j$:

$$Z_j = \frac{1}{2}(X_j - iX_{n+j}), \quad X_j = \frac{\partial}{\partial x_j} + 2 \sum_{\alpha=1}^{p} \sum_{k=1}^{n} \bigl(-\operatorname{Im} b_{jk}^{\alpha} x_k + \operatorname{Re} b_{jk}^{\alpha} x_{n+k}\bigr) \frac{\partial}{\partial t_\alpha},$$

$$X_{n+j} = \frac{\partial}{\partial x_{n+j}} - 2 \sum_{\alpha=1}^{p} \sum_{k=1}^{n} \bigl(\operatorname{Re} b_{jk}^{\alpha} x_k + \operatorname{Im} b_{jk}^{\alpha} x_{n+k}\bigr) \frac{\partial}{\partial t_\alpha}, \tag{1.8}$$

где $\bigl(\operatorname{Re} b_{jk}^{\alpha}\bigr)$ вещественная симметрическая, а $\bigl(\operatorname{Im} b_{jk}^{\alpha}\bigr)$ вещественная антисимметрическая, поскольку $\bigl(b_{jk}^{\alpha}\bigr)$ эрмитова симметрическая. Обозначив

$$a^\alpha = 2 \begin{pmatrix} -\operatorname{Im} b^\alpha & \operatorname{Re} b^\alpha \\ -\operatorname{Re} b^\alpha & -\operatorname{Im} b^\alpha \end{pmatrix} \tag{1.9}$$

и отметив антисимметричность, имеем

$$X_j = \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{\alpha=1}^{p} \sum_{k=1}^{2n} a_{jk}^{\alpha} x_k \frac{\partial}{\partial t_\alpha}, \quad j = 1, \dots, 2n. \tag{1.10}$$

Для $p$-набора $b$ *нильпотентная двуступенчатая группа Ли* $\mathscr{N}_b$ — это $\mathbf{R}^{2n} \times \mathbf{R}^p$ с умножением, заданным формулой

$$(x, t) \cdot (x', t') = (x'', t''), \tag{1.11}$$

где

$$x'' = x + x', \quad t''_\alpha = t_\alpha + t'_\alpha + \sum_{j,k=1}^{2n} a_{jk}^{\alpha} x'_j x_k, \tag{1.12}$$

$0 = (0, \dots, 0)$ — тождественный элемент группы, и обратным $(x,t)^{-1}$ к $(x,t)$ является $(-x, -t)$, так как $(a_{jk}^{\alpha})$ антисимметрична для каждого $\alpha$.

На нильпотентной двуступенчатой группе $\mathscr{N}_b$ есть *левый перенос*

$$\tau_{(y,s)} : (x, t) \mapsto (y, s) \cdot (x, t), \quad (x, t) \in \mathscr{N}_b, \tag{1.13}$$

для фиксированной точки $(y,s)\in\mathscr{N}_b$ и *растяжение*

$$\delta_a(x,t)=(ax,a^2t),\quad (x,t)\in\mathscr{N}_b, \tag{1.14}$$

для любого $a>0$. Тогда $\tau^{-1}_{(y,s)}=\tau_{(y,s)^{-1}}$, $\delta_a^{-1}=\delta_{a^{-1}}$.

Легко видеть, что $X_j$, заданные посредством (1.10), составляют левоинвариантное векторное поле относительно умножения (1.12):

$$X_jf(x,t)=\frac{\partial}{\partial x'_j}(f\circ\tau_{(x,t)})(x',t')|_{x'=0,t'=0}. \tag{1.15}$$

*Левоинвариантность* означает, что для фиксированной точки $(y,s)\in\mathscr{N}_b$ будет

$$(\tau_{(y,s)*}X_j)(x,t)=X_j((y,s)(x,t)),\quad (x,t)\in\mathscr{N}_b, \tag{1.16}$$

где $\tau_{(y,s)*}$ — касательное отображение левого сдвига $\tau_{(y,s)}$, $X_j(x,t)$ — вектор поля $X_j$ в точке $(x,t)$. Равенство (1.16) вытекает из (1.15). Из левоинвариантности (1.16) следует, что $X_{(x,t),j}(f((y,s)(x,t)))=(X_jf)((y,s)(x,t))$ для гладкой функции $f$, где $X_{(x,t),j}$ действует по переменным $(x,t)$.

На нильпотентной группе Ли $\mathscr{N}_b$ определим *норму*, полагая

$$\|(x,t)\|=\left(\left(\sum_{j=1}^{2n}x_j^2\right)^2+\sum_{\alpha=1}^{p}t_\alpha^2\right)^{\frac14}. \tag{1.17}$$

*Однородная размерность* нильпотентной двуступенчатой группы Ли $\mathscr{N}_b$ равна

$$\mathfrak{n}=2n+2p. \tag{1.18}$$

Пусть $\Delta\subset\mathscr{N}_b$ — область. Определим *анизотропные соболевские пространства*

$$S^{k,l}(\Delta):=\Big\{f\in L^l(\Delta)\mid \sum_{1\le a_1,\dots,a_j\le 2n,j\le k}\|X_{a_1}\dots X_{a_j}f\|_{L^l(\Delta)}<\infty\Big\} \tag{1.19}$$

с нормой, заданной суммой в (1.19).

*CR-структура* на гладком многообразии $M$ определяется как $n$-мерное комплексное подрасслоение $T_{1,0}M$ комплексифицированного касательного расслоения $\mathbf{C}TM$ такое, что $T_{1,0}M\cap T_{0,1}M=\{0\}$, где $T_{0,1}M=\overline{T_{1,0}M}$, и выполняется условие интегрируемости: $[Z_1,Z_2]\in C^\infty(M,T_{1,0}M)$ для $Z_1,Z_2\in C^\infty(M,T_{1,0}M)$. Множество

$$\mathfrak{H}=\mathrm{Re}\{T_{1,0}M\oplus T_{0,1}M\} \tag{1.20}$$

называют *горизонтальным подпространством.* $C^1$-функция $f:M\to\mathbf{C}$ называется *функцией Коши — Римана* (или CR-*функцией*, или *обладающей свойством* CR), если $\overline{Z}f\equiv 0$ для любого $Z\in C^\infty(T_{1,0}M)$. $C^1$-отображение $f:(M_1,T_{1,0}M_1)\to(M_2,T_{1,0}M_2)$ называется *отображением Коши — Римана* (CR-*отображением*), если

$$f_*T_{1,0}M_1\subset T_{1,0}M_2, \tag{1.21}$$

где $f_*$ — касательное отображение к $f$. Если $f$ обратимо и $f$, $f^{-1}$ являются CR-отображениями, то $f$ называется *CR-диффеоморфизмом.*

Стандартная CR-структура на нильпотентной группе Ли $\mathscr{N}_b$ задается как

$$T_{1,0}(\mathscr{N}_b)=\mathrm{span}_{\mathbf{C}}\{Z_1,\dots,Z_n\}, \tag{1.22}$$

а стандартная CR-структура на квадратичном CR-многообразии $M_b$ — как

$$T_{1,0}(M_b) = \mathrm{span}_{\mathbf{C}}\{\widetilde{Z}_1, \dots, \widetilde{Z}_n\}, \tag{1.23}$$

где $\{Z_j\}$ и $\{\widetilde{Z}_j\}$ заданы равенствами (1.5) и (1.4) соответственно. Тогда отображение

$$\pi_b : (M_b, T_{1,0}(M_b)) \to (\mathscr{N}_b, T_{1,0}(\mathscr{N}_b)),$$

заданное равенством (1.3), является CR-диффеоморфизмом, поскольку $\pi_{b*}\widetilde{Z}_j = Z_j$ для любого $j$.

Квадратичное CR-многообразие $M_b$ (или нильпотентная двуступенчатая группа Ли $\mathscr{N}_b$) называется *строго* 2-*псевдовогнутым*, если для любого вектора $(\theta_1, \dots, \theta_p) \in \mathbf{R}^p \setminus \{0\}$ матрица $\sum\limits_{\alpha=1}^{p} b^\alpha \theta_\alpha$ имеет по крайней мере два отрицательных собственных значения. При $p = 1$ CR-многообразие $M_b$ строго 2-псевдовогнуто тогда и только тогда, когда матрица $b$ имеет не менее двух положительных собственных значений и не менее двух отрицательных собственных значений одновременно.

Во многих случаях мы будем отождествлять CR-отображение $f : \mathscr{N}_b \to \mathscr{N}_{\tilde{b}}$ с CR-отображением $\pi_{\tilde{b}}^{-1} \circ f : \mathscr{N}_b \to M_{\tilde{b}} \subset \mathbf{C}^N$, используя $\pi_{\tilde{b}}$. Выгода от такого отождествления в том, что легко выписывать уравнения, которым удовлетворяет CR-отображение $f$ в последнем случае. Пусть $f = (f_1, \dots, f_N) : \mathscr{N}_b \to M_{\tilde{b}} \subset \mathbf{C}^N = \mathbf{C}^{\tilde{n}} \times \mathbf{C}^{\tilde{p}}$ — CR-отображение. Запишем точку в $\mathbf{C}^N$ в виде $(\hat{z}_1, \dots, \hat{z}_N)$. Тогда ее компоненты $f_j = \hat{z}_j \circ f$, $j = 1, \dots, N$, удовлетворяют уравнениям

$$\overline{Z}_k f_j = \overline{Z}_k(\hat{z}_j \circ f) = f_* \overline{Z}_k(\hat{z}_j) = 0. \tag{1.24}$$

Последнее уравнение вытекает из уравнения $f_* Z_k = \sum\limits_{l=1}^{\tilde{n}} a_l \widehat{Z}_l$ с некоторыми функциями $a_l$ относительно $f$, являющейся CR-функцией (т. е. $f_* \overline{Z}_k = \sum\limits_{l=1}^{\tilde{n}} \bar{a}_l \overline{\widehat{Z}}_l$), где $\tilde{n} = \dim_{\mathbf{C}} T_{1,0}(M_{\tilde{b}})$ и $\widehat{Z}_l \in T_{1,0}(M_{\tilde{b}})$ — линейная комбинация $\frac{\partial}{\partial \hat{z}_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \hat{z}_N}$ для любого $l$ (см. (1.4)). Тем самым $f$ — CR-отображение, если все его компоненты суть CR-функции, т. е. удовлетворяют *касательным уравнениям Коши — Римана*,

$$\overline{Z}_k f_j = 0 \tag{1.25}$$

для $k = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, N$.

Пусть $\Delta$ — область в нильпотентной двуступенчатой группе Ли $\mathscr{N}_b$. Отображение $f = (f_1, \dots, f_N) : \Delta \to M_{\tilde{b}} \subset \mathbf{C}^N$ называется *квази-отображением Коши — Римана* (или просто *квази*-CR-*отображением*), если существует измеримая функция со значениями в множестве $n \times n$-матриц $Q = (Q_{lk})$ такая, что

$$\overline{Z}_k f_j = \sum_{l=1}^{n} Q_{lk} Z_l f_j \tag{1.26}$$

для $k = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, N$. Это *система дифференциальных уравнений с частными производными типа Бельтрами.* Для $d \geq 1$ обозначим через $\mathfrak{D}_d(\varepsilon)$ множество отображений $f : \Delta \to M_{\tilde{b}} \subset \mathbf{C}^N$ класса $S^{1,d}_{\mathrm{loc}}(\Delta)$ с некоторой областью $\Delta$, удовлетворяющих системе типа Бельтрами (1.26) с

$$\|Q\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \Delta} \|Q(x)\| \leq \varepsilon. \tag{1.27}$$

Отображение $f$ в $\mathfrak{D}_d(\varepsilon)$ называется *$\varepsilon$-квази-CR-отображением.*

В дальнейшем для простоты точку группы $\mathscr{N}_b$ будем обозначать через $x$ с координатами $(x_1, \dots, x_{2n+p})$ вместо $(x, t)$, а именно положим $x_{2n+\alpha} = t_\alpha$, $\alpha = 1, \dots, p$. Равенство

$$d_b(x, x') = \|{x'}^{-1} \cdot x\|, \quad x, x' \in \mathscr{N}_b \tag{1.28}$$

определяет расстояние, если группа является группой Гейзенберга. Однако неизвестно, когда (1.28) определяет расстояние в общей нильпотентной двуступенчатой группе Ли $\mathscr{N}_b$. Поэтому будем использовать расстояние Карно — Каратеодори на $\mathscr{N}_b$. Кусочно-гладкая кривая $\gamma : [0,1] \to \mathscr{N}_b$ называется *горизонтальной*, если $\gamma'(t) \in \mathfrak{H}_{\gamma(t)}$ для п. в. $t$, т. е. $\gamma'(t)$ — линейная комбинация $X_j$, $j = 1, \dots, 2n$, заданных равенством (1.10). Можно вычислить длину Карно — Каратеодори горизонтальной кривой по формуле

$$L_C(\gamma) = \int\limits_0^1 |\gamma'(t)|_C \, dt, \tag{1.29}$$

где $|\gamma'(t)|_C$ — длина вектора $\gamma'(t)$ относительно *инфинитезимальной метрики Карно — Каратеодори*, т. е. $|\gamma'(t)|_C = \left(\sum\limits_{j=1}^{2n} a_j^2\right)^{\frac{1}{2}}$, если $\gamma'(t) = \sum\limits_{j=1}^{2n} a_j X_j$. Определим *расстояние Карно — Каратеодори* между точками $x$ и $x'$ равенством

$$d_C(x, x') = \inf_\gamma \{L_C(\gamma)\}, \tag{1.30}$$

где точная нижняя граница берется по всем кусочно-гладким горизонтальным кривым, соединяющим $x$ и $x'$. Легко видеть, что (1.30) определяет расстояние на $\mathscr{N}_b$. Для точки $x \in \mathscr{N}_b$ и числа $a > 0$ нетрудно проверить следующие свойства расстояния Карно — Каратеодори:

$$d_C(x \cdot x', x \cdot x'') = d_C(x', x''), \quad d_C(\delta_a(x'), \delta_a(x'')) = a \cdot d_C(x', x'') \tag{1.31}$$

для $x', x'' \in \mathscr{N}_b$.

Известно, что расстояние Карно — Каратеодори $d_C(\cdot,\cdot)$ эквивалентно стандартному квазирасстоянию (1.28), т. е. существует константа $L > 0$ такая, что

$$\frac{1}{L} d_C(x, x') \le d_b(x, x') \le L d_C(x, x') \quad \text{для любых} \;\; x, x' \in \mathscr{N}_b. \tag{1.32}$$

Шары определяются как

$$B_C(x, \rho) = \{y \in \mathscr{N}_b; d_C(y, x) < \rho\}, \quad B(x, \rho) = \{y \in \mathscr{N}_b; d_b(y, x) < \rho\} \tag{1.33}$$

для $x \in \mathscr{N}_b$ и $\rho > 0$. Соотношение (1.32) вытекает из свойств однородности $d_C(\cdot,\cdot)$ в (1.31), таких же свойств однородности $d_b(\cdot,\cdot)$ и компактности обеих единичных сфер.

Неудобство шара $B_C(x, \rho)$ в том, что его граница $\partial B_C(x, \rho)$ лишь липшицева [15]. Так что мы также будем использовать шар $B(x, \rho)$, граница которого гладкая. Для множества $E \subset \mathscr{N}_b$ обозначим через $\operatorname{diam}_C(E)$ диаметр $E$ в метрике Карно — Каратеодори.

**Теорема 1.1.** *Пусть $\mathscr{N}_b$ и $\mathscr{N}_{\tilde b}$ — нильпотентные двуступенчатые группы Ли и $\mathscr{N}_b$ строго 2-псевдовогнута. Существует неотрицательная функция $\alpha^*$ : $\left[0,\frac{1}{2}\right)\to[0,1)$, обладающая следующими свойствами.*

(1) *$\alpha^*(\delta,\rho)\to\alpha^*(0,\rho)=0$ при $\delta\to 0$ для $\rho<1$.*

(2) *Пусть $f:\Delta\to\mathscr{N}_{\tilde b}$ в $\mathfrak{D}_d(\varepsilon)$ с $d>\mathfrak{n}$, $\Delta\subset\mathscr{N}_b$ — область. Тогда для любого $\rho\in(0,1)$ и любой ограниченной области $\Delta'\subset\Delta$ вместе с ее $\rho_{\Delta'}$-окрестностью $U_{\rho_{\Delta'}}=\{x\in\mathscr{N}_b; d_C(x,\Delta')<\rho_{\Delta'}\}\subset\Delta$, $\rho_{\Delta'}=\frac{1-\rho}{2\rho}\operatorname{diam}_C\Delta'$, существует CR-отображение $g:\Delta\to\mathscr{N}_{\tilde b}$ такое, что*

$$d_C(f(x),g(x))<\alpha^*(\varepsilon,\rho)\operatorname{diam}_C f(U_{\rho_{\Delta'}}) \tag{1.34}$$

*для любого $x\in\Delta'$.*

Замечание 1.2. (1) Пусть $M_{q,q'}$ — квадратическая гиперповерхность в $\mathbf{C}^{q+q'+1}$, определенная равенством (1.2) с $b=\operatorname{diag}(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{q+q'})$ (в этом случае $p=1$), где $\varepsilon_1=\dots=\varepsilon_q=1$, $\varepsilon_{q+1}=\dots=\varepsilon_{q+q'}=-1$. Пусть $\mathscr{N}_{q,q'}$ — соответствующая нильпотентная группа. Пусть $\mathrm{SU}(q+1,q'+1)$ — группа индефинитных унитарных групп. Ее центр $K$ состоит из $q+q'+2$ элементов. Обозначим $\mathrm{PU}(q+1,q'+1)=\mathrm{SU}(q+1,q'+1)/\mathrm{center}$. Известно, что группа CR-автоморфизмов группы $M_{q,q'}$ есть $\operatorname{Aut}_{CR}M_{q,q'}=\operatorname{Aut}_{CR}\mathscr{N}_{q,q'}=\mathrm{PU}(q+1,q'+1)$ [21].

(2) Пусть $\mathscr{N}_b$ и $\mathscr{N}_{\tilde b}$ — нильпотентные двуступенчатые группы Ли. Пусть $f$ — $C^1$-*горизонтальное отображение* из $\Delta\subset\mathscr{N}_b$ в $M_{\tilde b}\subset\mathbf{C}^{\tilde n}\times\mathbf{C}^{\tilde p}$, так что $f_*X_k$ — вектор в $\operatorname{Re}\{T_{1,0}M_{\tilde b}\oplus T_{0,1}M_{\tilde b}\}$ для каждого $k$ ($f_*$ отображает горизонтальное подпространство в $\mathscr{N}_b$ в горизонтальное подпространство в $M_{\tilde b}$). Пусть $f=(f_1,\dots,f_{\tilde n+\tilde b})$. Тогда

$$f_*Z_k=V_k+\overline{W}_k,\quad k=1,\dots,n, \tag{1.35}$$

для некоторых $V_k,W_k\in C(f(\Delta),T_{1,0}(M_{\tilde b}))$ с

$$V_k=\sum_{j=1}^{\tilde n+\tilde b}Z_kf_j\frac{\partial}{\partial\hat z_j},\quad \overline{W}_k=\sum_{j=1}^{\tilde n+\tilde b}Z_k\bar f_j\frac{\partial}{\partial\bar{\hat z}_j}. \tag{1.36}$$

Это вытекает из равенства $f_*Z_kg(\hat z,\overline{\hat z})=Z_k(g(f(z),\overline{f(z)}))$, где $\hat z=f(z)$, $g$ — функция на $\mathbf{C}^{\tilde n+\tilde p}$ (см. [13, с. 38, 39]). В этих обозначениях система (1.26) может быть записана так:

$$W_k(x)=\sum_{l=1}^{n}Q_{lk}(x)V_l(x),\quad k=1,\dots,n, \tag{1.37}$$

для $x\in f(\Delta)$. Следовательно, под действием проектора $\pi_b:M_{\tilde b}\to\mathscr{N}_{\tilde b}$ система (1.26) может быть записана в виде (1.37) для квази-CR-отображения $f:\mathscr{N}_b\to\mathscr{N}_{\tilde b}$ с $f_*Z_k=V_k+\overline{W}_k, k=1,\dots,n$, для некоторого $V_k,W_k\in C(f(\Delta),T_{1,0}(\mathscr{N}_{\tilde b}))$.

Отметим, что контактное отображение между двумя контактными многообразиями горизонтально. Если контактное отображение $f$ является малой деформацией CR-отображения, т. е. каждое $W_k$ малое относительно базиса $(V_1,\dots,V_n)$, являющегося локальным базисом для $T_{1,0}(\mathscr{N}_{\tilde b})$, то такая матрица $(Q_{lk})$ всегда существует. Тем самым $f$ — квази-CR-отображение. Обилие контактных отображений приводит к тому, что квази-CR-отображений из $\mathscr{N}_b$ в $\mathscr{N}_{\tilde b}$ много, когда $\mathscr{N}_b$ и $\mathscr{N}_{\tilde b}$ — контактные многообразия, т. е. $p=\tilde p=1$, $b$ и $\tilde b$ не являются нулевыми матрицами.

(3) Множество CR-отображений из одного CR-многообразия в другое, которое может не быть группой, непусто во многих случаях. Интересно рассмотреть устойчивость CR-отображений между такими многообразиями. Основы анализа на CR-многообразиях можно найти в [22], там же есть решение лапласиана Кона.

## § 2. Интегральное представление для CR-отображений

В этом параграфе мы получим формулу, дающую интегральное представление для CR-отображений на области в нильпотентной двуступенчатой группе Ли с помощью функции Грина лапласиана Кона. Эта формула представляет собой CR-версию формулы Бохнера — Мартинелли для голоморфных отображений на $\mathbf{C}^n$.

Напомним определение лапласиана Кона и его функции Грина (см. подробности в [20]). Пусть $*$ — свертка на нильпотентной группе Ли $\mathscr{N}_b$, определенная формулой

$$f * g(x) = \int\limits_{\mathscr{N}_b} f(x')g({x'}^{-1}x)\, dV(x'), \tag{2.1}$$

где $dV(x') = dx'_1 \dots dx'_{2n+p}$ — элемент объема. Как обычно, $f * g \neq g * f$. Из определения свертки (2.1) и левоинвариантности (1.16) векторного поля $X_j$ вытекает, что

$$X_j(f * g) = f * X_j g \tag{2.2}$$

для любого $j$ (отметим, что обычно $X_j(f * g) \neq X_j f * g$). Пусть $T^*_{0,1}(\mathscr{N}_b)$ двойственное к $T_{0,1}(\mathscr{N}_b)$. Элемент из $\omega \in C^\infty(T^*_{0,1}(\mathscr{N}_b))$ ($(0,1)$-форма) и элемент из $\varpi \in C^\infty(\Lambda^2 T^*_{0,1}(\mathscr{N}_b))$ ($(0,2)$-форма) могут быть записаны в виде

$$\omega = \sum_{j=1}^n \omega_j d\bar{z}_j, \quad \varpi = \sum_{j\neq k} \varpi_{j,k} d\bar{z}_j \wedge d\bar{z}_k \tag{2.3}$$

с $\omega_j, \varpi_{j,k} \in C^\infty(\mathscr{N}_b)$. Определим операторы $\bar\partial_b : C^\infty(\mathscr{N}_b) \to C^\infty(T^*_{0,1}(\mathscr{N}_b))$ и $\bar\partial_b : C^\infty(T^*_{0,1}(\mathscr{N}_b)) \to C^\infty(\Lambda^2 T^*_{0,1}(\mathscr{N}_b))$:

$$\bar\partial_b u = \sum_{j=1}^n \overline{Z}_j u \cdot d\bar{z}_j, \quad \bar\partial_b \omega = \sum_{k\neq j} \overline{Z}_k \omega_j d\bar{z}_k \wedge d\bar{z}_j, \tag{2.4}$$

где $u \in C^\infty(\mathscr{N}_b)$. Определим внутреннее произведение $C_0^\infty(T^*_{0,1}(\mathscr{N}_b))$, полагая

$$(\omega, \widetilde{\omega}) = \int\limits_{\mathscr{N}_b} \sum_{j=1}^n \omega_j(y)\overline{\widetilde{\omega}}_j(y)\, dV(y), \tag{2.5}$$

где $\omega$ задано формулой (2.3) и $\widetilde{\omega} = \sum\limits_{j=1}^n \widetilde{\omega}_j d\bar{z}_j$. Аналогично можно определить внутреннее произведение на $C_0^\infty(\Lambda^2 T^*_{0,1}(\mathscr{N}_b))$. Пусть $\bar\partial_b^* : C_0^\infty(T^*_{0,1}(\mathscr{N}_b)) \to C_0^\infty(\mathscr{N}_b)$ — формально сопряженный к $\bar\partial_b$ оператор, т. е. $(\bar\partial_b u, \psi) = (u, \bar\partial_b^* \psi)$ для любых $u \in C_0^\infty(\mathscr{N}_b)$, $\psi \in C_0^\infty(T^*_{0,1}(\mathscr{N}_b))$. Аналогично можно определить формально сопряженный $\bar\partial_b^* : C_0^\infty(\Lambda^2 T^*_{0,1}(\mathscr{N}_b)) \to C_0^\infty(T^*_{0,1}(\mathscr{N}_b))$. Легко заметить, что

$$\bar\partial_b^* \omega = -\sum_{j=1}^n Z_j \omega_j, \tag{2.6}$$

если $\omega \in C_0^\infty(T_{0,1}^*(\mathscr{N}_b))$ задано посредством (2.3).

*Лапласиан Кона* на функциях и на $(0,1)$-формах определяется так:

$$\Box_b^{(0)} = -\bar\partial_b^*\bar\partial_b, \quad \Box_b^{(1)} = -\bar\partial_b^*\bar\partial_b - \bar\partial_b\bar\partial_b^*. \tag{2.7}$$

Для $\phi \in C_0^\infty(\mathscr{N}_b)$ имеем $\Box_b^{(0)}\phi = \sum\limits_{j=1}^{n} Z_j\overline{Z}_j\phi$ с помощью (2.6). Обозначим через $G_b^{(q)}(x,t;x',t')$ *функцию Грина лапласиана Кона* $\Box_b^{(q)}$, $q=0,1$, а именно

$$\Box_{b;(x,t)}^{(q)} G_b^{(q)}(x,t;x',t') = \delta(x-x')\delta(t-t'), \tag{2.8}$$

где $\Box_{b;(x,t)}^{(q)}$ действует по переменным $(x,t)$. Известно, что

$$G_b^{(q)}(x,t;x',t') = G_b^{(q)}((x',t')^{-1}\cdot(x,t)), \tag{2.9}$$

если обозначить $G_b^{(q)}(x,t) = G_b^{(q)}(x,t;0,0)$ (см. [20, с. 292]). Определим *оператор Грина* $\mathbf{G}_b^{(q)}$ как свертку с функцией Грина $G_b^{(q)}(\cdot)$:

$$\mathbf{G}_b^{(q)}\phi = \phi * G_b^{(q)} = \int\limits_{\mathscr{N}_b} \phi(x',t')G_b^{(q)}((x',t')^{-1}\cdot(x,t))\,dV(x',t') \tag{2.10}$$

для $\phi \in C_0^\infty(\Lambda^q T_{0,1}^*(\mathscr{N}_b))$, $q=0,1$. Тогда $\Box_b^{(q)}\mathbf{G}_b^{(q)} = \mathrm{id}$ на $C_0^\infty(\Lambda^q T_{0,1}^*(\mathscr{N}_b))$.

Функция Грина лапласиана Кона на нильпотентных двуступенчатых группах Ли $\mathscr{N}_b$ построена в [20]. Там же установлены асимптотические оценки для функции Грина $G_b^{(q)}(\cdot)$ и $L^l$-оценки для оператора Грина $\mathbf{G}_b^{(q)}$ (см. теоремы 6, 9 и 10 в [20] и их доказательства). Соберем их в следующей теореме. Функция $f$ на $\mathscr{N}_b$ называется *однородной степени* $m$ , если $f(\delta x, \delta^2 t) = \delta^m f(x,t)$ для любых $\delta > 0$, $(x,t) \in \mathscr{N}_b$.

**Теорема 2.1.** *Пусть $b^\alpha$ эрмитова. Определим $q_-(\theta)$ как число отрицательных собственных значений эрмитовой матрицы $\left(\sum\limits_{\alpha=1}^{p} b_{kj}^\alpha\theta_\alpha\right)$ для $(\theta_1,\dots,\theta_p) \in \mathbf{R}^p \setminus \{0\}$. Допустим, что $q < q_-(\theta)$ для любого $\theta$, $q=0,1$. Тогда функция Грина $G_b^{(q)}(\cdot)$ лапласиана $\Box_b^{(q)}$, $q=0,1$, существует и принадлежит классу $C^\infty$ на $\mathbf{R}^{2n+p}\setminus\{0\}$. Она однородна степени $-\mathfrak{n}+2$. Кроме того, существует константа $C>0$ такая, что*

*(1) функция Грина $G_b^{(q)}(\cdot)$ лапласиана $\Box_b^{(q)}$, $q=0,1$, допускает оценки*

$$\left|G_b^{(q)}(x)\right| \le C\|x\|^{-\mathfrak{n}+2}, \quad \left|X_jG_b^{(q)}(x)\right| \le C\|x\|^{-\mathfrak{n}+1} \tag{2.11}$$

*для любых $0 \ne x \in \mathscr{N}_b$ и $j=1,\dots,2n$;*

*(2) $X_jG_b^{(q)}(x)$ и $X_jX_kG_b^{(q)}(x)$ однородны степени $-\mathfrak{n}+1$ и $-\mathfrak{n}$ соответственно. Для $h \in L^l(\Lambda^qT_{0,1}^*(\mathscr{N}_b))$, $q=0,1$, $1<l<\infty$, имеют место оценки*

$$\left\|\mathbf{G}_b^{(q)}h\right\|_l \le C\|h\|_l, \quad \left\|X_j\mathbf{G}_b^{(q)}h\right\|_l \le C\|h\|_l, \quad \left\|X_jX_k\mathbf{G}_b^{(q)}h\right\|_l \le C\|h\|_l \tag{2.12}$$

*для любых $j,k=1,\dots,2n$.*

Условия теоремы выполнены, если $\mathscr{N}_b$ строго 2-псевдовогнута. Оценки в теореме обычно называют *субэллиптическими оценками* для лапласиана Кона $\Box_b^{(q)}$.

Если отождествить $(0,1)$-форму $\omega$, заданную равенством (2.3), с вектором $(\omega_1,\dots,\omega_n)$, то $G_b^{(1)}(x) = \big(G_{b;jk}^{(1)}(x)\big)$ — $n\times n$-матрица и

$$\bar\partial_b^* G_b^{(1)}(x)\omega(y) = -\sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n Z_k G_{b;kj}^{(1)}(x)\omega_j(y)\right).$$

Пусть

$$H_j(x) = -\sum_{k=1}^n Z_k G_{b;kj}^{(1)}(x)$$

и $\overline{Z}f(y) = (\overline{Z}_1 f(y),\dots,\overline{Z}_n f(y))$. Обозначим $H(x) = (H_1(x),\dots,\ H_n(x))$ и

$$H(x)\cdot\overline{Z}f(y) := \sum_{j=1}^n H_j(x)\overline{Z}_j f(y) = \bar\partial_b^* G_b^{(1)}(x)\bar\partial_b f(y). \tag{2.13}$$

Отметим, что интегральное ядро $H_j$ однородно степени $-\mathfrak{n}+1$ и определяет ограниченный оператор из $L^l(\mathscr{N}_b)$ в $S^{1,l}(\mathscr{N}_b)$ для каждого $l$ по теореме 2.1.

**Теорема 2.2.** *Пусть $D$ — ограниченная область в строго 2-псевдовогнутой нильпотентной двуступенчатой группе Ли $\mathscr{N}_b$ с границей класса $C^2$, и пусть $f: U\to\mathbf{C}^N$ — непрерывное отображение класса $S^{1,d}(U)$ с $d>\mathfrak{n}$ для области $U$ с $\overline{D}\subset U\subset\mathscr{N}_b$. Пусть $\nu(x) = (\nu_1(x),\dots,\nu_{2n+p}(x))$ — единичная внешняя нормаль к поверхности $\partial D$. Тогда*

$$\begin{aligned} f(x) = \int_{\partial D} H(x'^{-1}\cdot x)\nu_{\overline{Z}}(x')f(x')\,dS(x') - \int_D H(x'^{-1}\cdot x)\overline{Z}f(x')\,dV(x')\\ = \Phi(f)(x) + T(\overline{Z}f)(x), \end{aligned}\tag{2.14}$$

*где $dS$ — поверхностная мера,*

$$H(x'^{-1}\cdot x)\cdot\nu_{\overline{Z}}(x') = \sum_{j=1}^n H_j(x'^{-1}\cdot x)\nu_{\overline{Z};j}(x')$$

*и $\nu_{\overline{Z}}(x') = (\nu_{\overline{Z};1}(x'),\dots,\nu_{\overline{Z};n}(x'))$ с*

$$\nu_{\overline{Z};j}(x') = \frac{1}{2}(\nu_{X;j}(x') + i\nu_{X,n+j}(x')),\quad j=1,\dots,n, \tag{2.15}$$

*и*

$$\nu_{X;j'}(x') = \nu_{j'}(x') + \sum_{\alpha=1}^p\sum_{k=1}^{2n} a_{j'k}^\alpha x_k'\nu_{2n+\alpha}(x'),\quad j'=1,\dots,2n. \tag{2.16}$$

Доказательство. Достаточно доказать теорему только для функции $f: U\to\mathbf{C}$. Для гладкой области $\Omega$ и гладкой функции $h$ на $\overline{\Omega}$ имеем

$$\int_\Omega \frac{\partial h}{\partial x_j}(x)\,dV(x) = \int_{\partial\Omega} h(x)\nu_j(x)\,dS(x), \tag{2.17}$$

где $\nu(x) = (\nu_1(x),\dots,\nu_{2n+p}(x))$ — единичная внешняя нормаль к поверхности $\partial\Omega$. Тогда

$$\begin{aligned} \int_\Omega X_j h(x)\,dV(x) &= \int_\Omega \left(\frac{\partial h}{\partial x_j}(x) + \sum_{\alpha=1}^p\sum_{k=1}^{2n} a_{jk}^\alpha x_k \frac{\partial h}{\partial x_{2n+\alpha}}(x)\right) dV(x)\\ &= \int_{\partial\Omega}\left(h(x)\nu_j(x) + \sum_{\alpha=1}^p\sum_{k=1}^{2n} a_{jk}^\alpha x_k h(x)\nu_{2n+\alpha}(x)\right) dS(x) = \int_{\partial\Omega} h(x)\nu_{X;j}(x)\,dS(x), \end{aligned}\tag{2.18}$$

поскольку $a_{jk}^{\alpha}x_k\frac{\partial h}{\partial x_{2n+\alpha}}=\frac{\partial(a_{jk}^{\alpha}x_kh)}{\partial x_{2n+\alpha}}$ для $1\le j,k\le 2n$, где $\nu_{X;j}$ определено равенством (2.16). Следовательно,

$$\int\limits_{\Omega}\overline{Z}_jh(x)\,dV(x)=\int\limits_{\partial\Omega}h(x)\nu_{\overline{Z};j}(x)\,dS(x). \tag{2.19}$$

Пусть $\phi\in C_0^{\infty}(\mathscr{N}_b)$ таково, что $\phi(x)=\phi(-x)$, $\int\limits_{\mathscr{N}_b}\phi(x)\,dV(x)=1$. Так как $x^{-1}=-x$, имеем $\phi(x^{-1})=\phi(x)$. Пусть $\chi_D$ — характеристическая функция ограниченной области $D$. Многократно применяя равенство $X_j(\chi_D*\phi_\varepsilon)=\chi_D*X_j\phi_\varepsilon$, получаем, что $\chi_D*\phi_\varepsilon\in C_0^{\infty}(\mathscr{N}_b)$.

Поскольку $\bar\partial_b\Box_b^{(0)}=-\bar\partial_b\bar\partial_b^*\bar\partial_b=\Box_b^{(1)}\bar\partial_b$ (отметим, что $\bar\partial_b\bar\partial_b\equiv 0$), имеем $\mathbf{G}_b^{(1)}\bar\partial_b=\bar\partial_b\mathbf{G}_b^{(0)}$, что выполнено в $S^{1,l}(\mathscr{N}_b)$ по теореме 2.1 (см. [20, с. 333]). Итак,

$$\mathrm{id}=-\bar\partial_b^*\bar\partial_b\mathbf{G}_b^{(0)}=-\bar\partial_b^*\mathbf{G}_b^{(1)}\bar\partial_b. \tag{2.20}$$

Пусть $\varepsilon$ достаточно мало и $f\in C^{\infty}(U)$. Пусть $\phi_\varepsilon(x)=\varepsilon^{-\mathfrak{n}}\phi\big(\delta_\varepsilon^{-1}(x)\big)$ — ядро усреднения. Тогда $f\chi_D*\phi_\varepsilon\in C_0^{\infty}(\mathscr{N}_b)$. Применяя (2.20) к $f\chi_D*\phi_\varepsilon$, получим

$$\begin{aligned}f\chi_D*\phi_\varepsilon(x)&=-\bar\partial_b^*\bar\partial_b\mathbf{G}_b^{(0)}(f\chi_D*\phi_\varepsilon)(x)\\&=-\bar\partial_b^*\mathbf{G}_b^{(1)}\bar\partial_b(f\chi_D*\phi_\varepsilon)(x)=-\bar\partial_b^*\int\limits_{\mathscr{N}_b}G_b^{(1)}(y^{-1}x)\bar\partial_bf(y)\chi_D*\phi_\varepsilon(y)\,dV(y)\\&\qquad-\bar\partial_b^*\int\limits_{\mathscr{N}_b}G_b^{(1)}(y^{-1}x)f(y)\chi_D*\bar\partial_b\phi_\varepsilon(y)\,dV(y).\end{aligned} \tag{2.21}$$

Для фиксированного $x\in D$ будет $\chi_D*\phi_\varepsilon(x)=1$, если $\varepsilon$ достаточно мало. Это может быть переписано в виде

$$\begin{aligned}f(x)=&-\int\limits_{\mathscr{N}_b}H(y^{-1}x)\overline{Z}f(y)\chi_D*\phi_\varepsilon(y)\,dV(y)\\&-\sum_{j=1}^{n}\int\limits_{\mathscr{N}_b}H_j(y^{-1}x)f(y)\chi_D*\overline{Z}_j\phi_\varepsilon(y)\,dV(y)\end{aligned} \tag{2.22}$$

в обозначениях (2.13). Первый член, очевидно, сходится к гладкой $f$. Для второго члена покажем, что $\chi_D*\overline{Z}_j\phi_\varepsilon$ сходится к знакопеременной мере на $\partial D$ для каждого $j$. Для этого преобразуем производные $X_j\phi_\varepsilon(y'^{-1}\cdot y)$ по $y$ в производные $X_{y',j}(\phi_\varepsilon(y^{-1}\cdot y'))$ по $y'$. Это тривиально в евклидовом случае, но непросто в нашем.

Напомним, что

$$(y'^{-1}\cdot y)_j=y_j-y'_j,\quad (y'^{-1}\cdot y)_{2n+\alpha}=y_{2n+\alpha}-y'_{2n+\alpha}-\sum_{k,j=1}^{n}a_{kj}^{\alpha}y_ky'_j$$

для любых $j,\alpha$. Применяя равенство

$$X_{y',j}=\frac{\partial}{\partial y'_j}+\sum_{k=1}^{n}a_{jk}^{\alpha}y'_k\frac{\partial}{\partial y'_{2n+\alpha}}$$

к $\phi_\varepsilon(y^{-1}\cdot y') = \phi_\varepsilon({y'}^{-1}\cdot y)$ и замечая, что $a^\alpha_{jk} = -a^\alpha_{kj}$, получим

$$\begin{aligned}
&X_{y',j}(\phi_\varepsilon(y^{-1}\cdot y')) = X_{y',j}(\phi_\varepsilon({y'}^{-1}\cdot y))\\
&\quad= -\frac{\partial\phi_\varepsilon}{\partial x_j}({y'}^{-1}\cdot y) - \sum_{\alpha,k} a^\alpha_{kj} y_k \frac{\partial\phi_\varepsilon}{\partial x_{2n+\alpha}}({y'}^{-1}\cdot y) - \sum_{\alpha,k} a^\alpha_{jk} {y'}_k \frac{\partial\phi_\varepsilon}{\partial x_{2n+\alpha}}({y'}^{-1}\cdot y)\\
&\qquad= -\frac{\partial\phi_\varepsilon}{\partial x_j}({y'}^{-1}\cdot y) - \sum_{\alpha,k} a^\alpha_{jk}(y_k - y'_k)\frac{\partial\phi_\varepsilon}{\partial x_{2n+\alpha}}({y'}^{-1}\cdot y)\\
&\qquad\quad + 2\sum_{\alpha,k} a^\alpha_{jk}(y_k - y'_k)\frac{\partial\phi_\varepsilon}{\partial x_{2n+\alpha}}({y'}^{-1}\cdot y)\\
&\qquad= -(X_j\phi_\varepsilon)({y'}^{-1}\cdot y) - 2\sum_{\alpha,k} a^\alpha_{jk}(y_k - y'_k)\frac{\partial}{\partial y'_{2n+\alpha}}(\phi_\varepsilon({y'}^{-1}\cdot y)),
\end{aligned} \tag{2.23}$$

где $\frac{\partial\phi_\varepsilon}{\partial x_j}$ — производная $\phi_\varepsilon$ по $j$-й переменной. Используя (2.23) и интегрируя по частям, как в (2.18), найдем, что

$$\begin{aligned}
&\chi_D * \overline{Z}_j\phi_\varepsilon(y) = \int_D \overline{Z}_j\phi_\varepsilon({y'}^{-1}y)\,dV(y')\\
&\quad= -\int_D \biggl(\overline{Z}_{y',j} + \sum_{\alpha,k}\bigl(a^\alpha_{jk} + ia^\alpha_{(n+j)k}\bigr)(y_k - y'_k)\frac{\partial}{\partial y'_{2n+\alpha}}\biggr)(\phi_\varepsilon(y^{-1}y'))\,dV(y')\\
&\qquad= -\int_{\partial D}\phi_\varepsilon(y^{-1}y')\widehat{\nu}_{\overline{Z};j}(y,y')\,dS(y'),
\end{aligned} \tag{2.24}$$

где

$$\widehat{\nu}_{\overline{Z};j}(y,y') = \nu_{\overline{Z};j}(y') + \sum_{\alpha,k}\bigl(a^\alpha_{jk} + ia^\alpha_{(n+j)k}\bigr)(y_k - y'_k)\nu_{2n+\alpha}(y') \to \nu_{\overline{Z};j}(y') \tag{2.25}$$

при $y \to y'$. Согласно (2.24) носитель $\chi_D * \overline{Z}_j\phi_\varepsilon$ является малой окрестностью $\partial D$, если $\varepsilon$ достаточно мало. Тем самым для функции $g$, непрерывной на окрестности $\partial D$, имеем

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathcal{N}_b} g(y)\chi_D * \overline{Z}_j\phi_\varepsilon(y) = -\int_{\mathcal{N}_b} g(y)\int_{\partial D}\phi_\varepsilon(y^{-1}y')\widehat{\nu}_{\overline{Z};j}(y,y')\,dS(y')\\
&\quad= -\int_{\partial D} dS(y')\int_{\mathcal{N}_b} g(y)\phi_\varepsilon(y^{-1}y')\widehat{\nu}_{\overline{Z};j}(y,y')\,dV(y) \to -\int_{\partial D} g(y')\nu_{\overline{Z};j}(y')\,dS(y')
\end{aligned} \tag{2.26}$$

при $\varepsilon \to 0$ ввиду $\int\limits_{\mathcal{N}_b} g(y)\phi_\varepsilon(y^{-1}y')\,dV(y) = g * \phi_\varepsilon(y') \to g(y')$ и (2.25). Устремляя $\varepsilon \to 0$ в (2.22) и используя (2.26) (отметим, что $H_j(y^{-1}x)f(y)$ для фиксированного $x$ и $y$, близкого к $\partial D$), получаем выполнение формулы интегрального представления (2.14) для $f \in C^\infty(U)$.

Для $f \in S^{1,d}(U)$, где $d > \mathfrak{n}$, пусть $f_l \in C^\infty(U)$ — последовательность функций, сходящаяся к $f$ в $S^{1,d}(U)$. Тогда $f_l \to f$ в $C(\overline{D})$ для $\overline{D} \subset U$ ввиду оценок в соболевском вложении в предложении 3.5 (в случае необходимости можно перейти к подпоследовательности). Заметим, что $\overline{Z}f_l \to \overline{Z}f$ в $L^d$ и интегральный оператор $h \to \int\limits_D H\left(y^{-1} \cdot x\right) h(y)\, dV(y)$ ограничен в $L^d$ по теореме 2.1(2). Применяя формулу интегрального представления (2.14) к $f_l$ и устремляя $l \to \infty$, находим, что (2.14) выполняется для $f \in S^{1,d}(U)$. Теорема доказана.

Замечание 2.3. Н. С. Даирбеков и А. П. Копылов в [6] получили формулу интегрального представления для отображения, удовлетворяющего системе линейных уравнений с частными производными, с помощью соответствующей формулы Грина. Фишер и Лейтерер построили аналог формулы интегрального представления для интеграла Бохнера — Мартинелли для малых подобластей вещественной гиперповерхности в $\mathbf{C}^n$ [23]. Но их ядра недостаточно хороши для наших целей.

Согласно теореме 2.2 для непрерывного CR-отображения $f : U \to \mathbf{C}^N$ класса $S^{1,d}(U)$ с $d > \mathfrak{n}$, $D \subset U$, для $f$ имеет место формула типа Коши, т. е.

$$f(x) = \int\limits_{\partial D} H({x'}^{-1} \cdot x)\nu_{\overline{Z}}(x') f(x')\, dS(x'). \tag{2.27}$$

Поскольку ядро в (2.27), как правило, не является CR-функцией, возникает задача определить, когда для $f$ выполнены условия CR, если она удовлетворяет формуле (2.27). Отметим, что даже в голоморфном случае ядро Бохнера — Мартинелли обычно не голоморфно. Однако есть несложное следствие, позволяющее определить, будет ли отображение обладать свойством CR. Пусть $\Omega_0$ — область с границей класса $C^2$, $0 \in \Omega_0$, такая, что $I_0 = \int\limits_{\Omega_0} H(y^{-1})\, dV(y) \neq 0$. Такая область всегда есть, ибо иначе будет $H \equiv 0$. Пусть $\Omega_0(x,r) = \tau_x \delta_r \Omega_0 = \left\{x'; \delta_r^{-1}(x^{-1}x') \in \Omega_0\right\}$.

**Следствие 2.4.** *Если $f \in C(\overline{\Omega})$ удовлетворяет формуле типа Коши (2.27) с $D = \Omega_0(x,r)$ для любого $x \in \Omega$ и достаточного малых $r$, то $f$ обладает свойством CR на $\Omega$.*

Доказательство. Очевидно, что $f \in C^\infty(\Omega)$, если $f \in C(\overline{\Omega})$ удовлетворяет формуле типа Коши (2.27), потому что ее ядро $H(\cdot)$ класса $C^\infty$ на $\mathscr{N}_b \setminus \{0\}$. Допустим, что $\overline{Z} f(x) \neq 0$ в точке $x \in \Omega$. По формуле интегрального представления (2.14) и формуле типа Коши (2.27) для $D = \Omega_0(x,r)$ получаем

$$\int\limits_{\Omega_0(x,r)} H({x'}^{-1} \cdot x)\overline{Z} f(x')\, dV(x') = 0. \tag{2.28}$$

С другой стороны, ввиду непрерывности $\overline{Z} f$ в точке $x$ имеем

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Omega_0(x,r)} H({x'}^{-1} \cdot x)\overline{Z} f(x')\, dV(x') = \overline{Z} f(x) &\int\limits_{\Omega_0(x,r)} H({x'}^{-1} \cdot x)\, dV(x') \\ &+ o(1) \int\limits_{\Omega_0(x,r)} |H({x'}^{-1} \cdot x)|\, dV(x'),\end{aligned} \tag{2.29}$$

где $o(1) \to 0$ при $r \to 0$. Заметим, что $H(\cdot)$ и $dV$ однородны степени $-\mathfrak{n} + 1$ и степени $\mathfrak{n}$ соответственно. Тогда

$$\begin{gathered}\int\limits_{\Omega_0(x,r)} H({x'}^{-1} \cdot x)\, dV(x') = r \int\limits_{\Omega_0} H(y^{-1})\, dV(y) = rI_0, \\ \int\limits_{\Omega_0(x,r)} |H({x'}^{-1} \cdot x)|\, dV(x') = r \int\limits_{\Omega_0} |H(y^{-1})|\, dV(y)\end{gathered} \tag{2.30}$$

с заменой переменных $x' = x\delta_r(y)$. Тем самым (2.29) противоречит (2.28) для достаточно малых $r$ в случае $\overline{Z}f(x) = 0$. Значит, $\overline{Z}f \equiv 0$, и следствие доказано.

## § 3. Гёльдеровость $\varepsilon$-квази-CR-отображения

Докажем гёльдеровость $\varepsilon$-квази-CR-отображений и равностепенную непрерывность отображений в $D_d(\varepsilon)$ для $d > \mathfrak{n}$ и достаточно малого $\varepsilon$. В этом параграфе $\mathscr{N}_b$ — строго 2-псевдовогнутая нильпотентная двуступенчатая группа Ли.

**Теорема 3.1.** *Для $f : \Delta \to \mathbf{C}^N$ в $\mathfrak{D}_d(\varepsilon)$ с $d > \mathfrak{n}$, $0 < \nu < \frac{1}{2}$, $\overline{B(0,1)} \subset \Delta$ существуют константы $C_b, \Lambda_d$, зависящие только от группы $\mathscr{N}_b$ и $d$, такие, что*

$$\||Zf(x)|B(0,1-\nu)\|_d \le C_b \nu^{-\mathfrak{n}} \frac{1}{1-\varepsilon\Lambda_d \nu^{-\mathfrak{n}}} \operatorname{diam}_E f(B(0,1)), \tag{3.1}$$

*если $\varepsilon\Lambda_d\nu^{-\mathfrak{n}} < 1$, где $\operatorname{diam}_E f(B(0,1)) = \sup\limits_{y,y' \in f(B(0,1))} |y - y'|$.*

Доказательство. Пусть $B^\mu = B\left(0, 1-\nu^\mu\right)$. По теореме 2.2

$$f = \int\limits_{\partial B^\mu} H\left(y^{-1}\cdot x\right) \nu_{\overline{Z}}(y) f(y)\, dS(y) - \int\limits_{B^\mu} H(y^{-1}\cdot x)\overline{Z}f(y)\, dV(y)$$

$$= \Phi_\mu(f)(x) + T_\mu(\overline{Z}f)(x). \tag{3.2}$$

Для $x \in B^\mu$ пусть

$$\Pi([h]')(x) = Z\int\limits_{\mathscr{N}_b} H(y^{-1}\cdot x)[h]'(y)\, dV(y) = Z\int\limits_{B^\mu} H(y^{-1}\cdot x) h(y)\, dV(y). \tag{3.3}$$

Для $f = (f_1, \dots, f_N)^t$, где $f_j \in S^{1,d}(B(0,1))$, $j = 1, \dots, N$, обозначим через $Zf = (Z_1 f, \dots, Z_n f)$ $N \times n$-матрицу, где $t$ означает транспонирование. Тогда

$$Zf - Z\left(\Phi_\mu(f)\right)(x) = Z(T_\mu(\overline{Z}f))(x) = \Pi([\overline{Z}f|B^\mu]')(x) \tag{3.4}$$

выполнено п. в. в $B^\mu$, где $(\cdot|D)$ — операция сужения на область $D \subset \mathscr{N}_b$ отображения $f$ и $[\,\cdot\,]'$ — операция распространения на всю группу $\mathscr{N}_b$ отображения $h$ с множества $E \subset D$ т. е. $[h]'(x) = h(x)$ для $x \in E$ и $[h]'(x) = 0$ для $x \in \mathscr{N}_b \setminus E$. Положим $\Pi_\mu = \Pi \circ [\cdot]' \circ (\cdot|B^\mu)$. Тогда из $L^d$-ограниченности интегрального оператора $X_j X_k \mathbf{G}_b^{(1)}$ в теореме 2.1 найдется константа $\Lambda_d$, зависящая только от $d$ и $\mathscr{N}_b$, такая, что

$$\|\Pi_\mu(h)\|_d \le \Lambda_d \|[h|B^\mu]'\|_d \tag{3.5}$$

для любой $h \in L^d(\mathscr{N}_b, \mathbf{C}^N)$. Для области $D_1 \subset D \cap B(0,1)$ имеем

$$\|[Qh|D_1]'\|_d = \left\{\int\limits_{D_1} (\|Q(x)h(x)\|^*)^d\, dV(x)\right\}^{\frac{1}{d}}$$

$$\le \left\{\int\limits_{D_1} \|Q\|_\infty^d (\|h(x)\|^*)^d\, dV(x)\right\}^{\frac{1}{d}} \le \varepsilon \|[h|D_1]'\|_d, \tag{3.6}$$

здесь использовано обозначение $\|h\|_d = \left\{\int\limits_D (\|h(x)\|^*)^d\, dV(x)\right\}^{\frac{1}{d}} < \infty$, где $\|\cdot\|^*$ — норма вектора в $\mathbf{C}^N$. Тогда (3.6) можно записать в виде

$$\|Qh\|_d \le \varepsilon \|h\|_d. \tag{3.7}$$

Определим последовательность $\{a_\mu\}$, полагая

$$a_1 = Z\Phi_2(f)|B^1,\ a_\mu = \Pi_2(Q\Pi_3(\dots(Q\Pi_\mu(QZ\Phi_{\mu+1}(f)))\dots))|B^1, \quad \mu = 2,3,\dots. \tag{3.8}$$

Для $\mu \geq 2$ будет

$$\|\Pi_\mu(QZ\Phi_{\mu+1}(f))\|_d \leq \Lambda_d \|[QZ\Phi_{\mu+1}(f)|B^\mu]\|_d \leq \varepsilon\Lambda_d \|[Z\Phi_{\mu+1}(f)|B^\mu]\|_d. \tag{3.9}$$

Применяя последовательно (3.9), находим, что

$$\|[a_\mu]'\|_d \leq (\varepsilon\Lambda_d)^{\mu-1} \|[Z\Phi_{\mu+1}(f)|B^\mu]'\|_d. \tag{3.10}$$

Отсюда вытекает, что для $x \in B^\mu, y \in \partial B^{\mu+1}$, $0 < \nu < \frac{1}{2}$ существует константа $L > 0$ такая, что

$$\|y^{-1}x\| \geq L\nu^\mu. \tag{3.11}$$

Тогда из следующей ниже леммы 3.2 для $x \in B^\mu$ получим

$$\|X_j\Phi_{\mu+1}(f)(x)\|^* \leq \widetilde{C}_b \nu^{-\mu\mathfrak{n}} \sup_{\|y\|<1} |f(y) - f(0)| \tag{3.12}$$

для каждого $j$ и тем самым

$$\|[Z\Phi_{\mu+1}(f)|B^\mu]'\|_d \leq C_b \nu^{-\mu\mathfrak{n}} \sup_{\|y\|<1} |f(y) - f(0)| \tag{3.13}$$

с некоторыми константами $\widetilde{C}_b$ и $C_b$, зависящими лишь от группы $\mathscr{N}_b$. Поэтому

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} \|[a_\mu]'\|_d \leq C_b\nu^{-\mathfrak{n}} \operatorname{diam}_E f(B(0,1)) \sum_{\mu=1}^{\infty} (\varepsilon\Lambda_d\nu^{-\mathfrak{n}})^{\mu-1}$$
$$= C_b\nu^{-\mathfrak{n}} \frac{1}{1-\varepsilon\Lambda_d\nu^{-\mathfrak{n}}} \operatorname{diam}_E f(B(0,1)), \tag{3.14}$$

если $\varepsilon\Lambda_d\nu^{-\mathfrak{n}} < 1$. Используя систему уравнений с частными производными типа Бельтрами (1.26), т. е. $\overline{Z}f = QZf$, и применяя многократно (3.4), находим, что

$$Zf - \sum_{\chi=1}^{\mu} a_\chi = \Pi_2(Q\Pi_3(\dots(Q\Pi_{\mu+1}(QZf))\dots)) \tag{3.15}$$

на $B(0, 1-\nu)$. Тогда

$$\left\| \left[ Zf - \sum_{\chi=1}^{\mu} a_\chi \mid B(0,1-\nu) \right]' \right\|_d \leq (\varepsilon\Lambda_d)^\mu \|[Zf|B(0,1-\nu)]'\|_d. \tag{3.16}$$

В силу предположения имеем $f \in S^{1,d}(B(0,1))$, $Zf \in L^d(B(0,1))$. Из (3.16) вытекает, что ряд в (3.15) сходится в $L^d$.

Доказательство утверждения (3.11) элементарно. Обозначим через $|\cdot|_1$ и $|\cdot|_2$ евклидовы нормы на $\mathbf{R}^{2n}$ и $\mathbf{R}^p$ соответственно. Для $x = (x', x'') \in \mathbf{R}^{2n} \times \mathbf{R}^p$ имеем $\|x\| = \left(|x'|_1^4 + |x''|_2^2\right)^{\frac{1}{4}}$ ввиду определения (1.17) нормы на $\mathscr{N}_b$. Для $x \in B^\mu$, $y \in \partial B^{\mu+1}$ будет

$$C\nu^\mu \leq (1-\nu^{\mu+1})^4 - (1-\nu^\mu)^4 \leq |y'|_1^4 + |y''|_2^2 - |x'|_1^4 - |x''|_2^2 \leq 4|y'-x'|_1 + 4|y''-x''|_2 \tag{3.17}$$

с некоторой константой $C > 0$, не зависящей от $\nu$, с использованием неравенств для евклидовых норм и $|y'|_1, |y''|_2, |x'|_1, |x''|_2 < 1$, $0 < \nu < \frac{1}{2}$. Заметим, что

$$\begin{aligned}\|x^{-1}y\|^4 &= |y'-x'|_1^4 + \sum_{\alpha=1}^{p}\Bigg|y_{2n+\alpha} - x_{2n+\alpha} - \sum_{j,k=1}^{2n} a_{jk}^{\alpha} x_k y_j\Bigg|^2 \\ &= |y'-x'|_1^4 + \sum_{\alpha=1}^{p}\Bigg|y_{2n+\alpha} - x_{2n+\alpha} - \sum_{j,k=1}^{2n} a_{jk}^{\alpha} (x_k - y_k) y_j\Bigg|^2, \qquad (3.18)\end{aligned}$$

так как $(a_{jk}^{\alpha})$ антисимметрична для любого $\alpha$. Ввиду неравенства (3.17) возможны два случая: (1) $|y'-x'|_1 > \eta\nu^{\mu}$; (2) $|y''-x''|_2 > \frac{C}{10}\nu^{\mu}$, если $|y'-x'|_1 \le \eta\nu^{\mu}$ для малого $\eta > 0$. В случае (2)

$$\sum_{\alpha=1}^{p}\Bigg|y_{2n+\alpha} - x_{2n+\alpha} - \sum_{j,k} a_{jk}^{\alpha}(y_k - x_k)y_j\Bigg|^2 \ge (|y''-x''|_2 - \widetilde{C}|y'-x'|_1)^2 \ge \widetilde{C}'\nu^{2\mu} \qquad (3.19)$$

с некоторыми $\widetilde{C}, \widetilde{C}' > 0$, когда $\eta$ достаточно мало. Из оценок (3.18), (3.19) вытекает, что в обоих случаях имеем $\|x^{-1}y\| \ge L\nu^{\mu}$ с некоторыми константами $L > 0$ и $1 < \nu < \frac{1}{2}$ (отметим, что $\nu^{\mu} < \nu^{\frac{1}{2}\mu}$). Теорема доказана.

**Лемма 3.2.** *Для $x \in B^{\mu+1}$ имеет место неравенство*

$$\|X_j\Phi_{\mu+1}(f)(x)\|^* \le C_b' \int\limits_{\partial B^{\mu+1}} \frac{|f(y) - f(0)|}{\|y^{-1}\cdot x\|^{\mathfrak{n}}}\, dS(y), \qquad (3.20)$$

*где $\mu = 1, 2, \dots$, $j = 1, \dots, 2n$, $C_b'$ — положительная константа, зависящая только от группы $\mathscr{N}_b$.*

Доказательство. Ввиду левоинвариантности векторного поля $X_j$ и того, что

$$\int\limits_{\partial B^{\mu+1}} H(y^{-1}\cdot x)\nu_{\overline{Z}}(y)\, dS(y) = 1$$

для $x \in B^{\mu+1}$ (это получается применением формулы интегрального представления (2.14) к $f \equiv 1$), получаем

$$X_j\Phi_{\mu+1}(f)(x) = \int\limits_{\partial B^{\mu+1}} (X_jH)(y^{-1}\cdot x)(f(y) - f(0))\nu_{\overline{Z}}(y)\, dS(y). \qquad (3.21)$$

Требуемый результат вытекает из того, что $X_jH(\cdot)$ однородна степени $-\mathfrak{n}$ по теореме 2.1(2).

Мы будем часто использовать следующую инвариантность класса $\mathfrak{D}_d(\varepsilon)$ при растяжениях и сдвигах.

**Предложение 3.3.** *Предположим, что $f : \Delta \to \mathscr{N}_{\tilde{b}}$ в $\mathfrak{D}_d(\varepsilon)$. Для $x_0 \in \mathscr{N}_b$, $y_0 \in \mathscr{N}_{\tilde{b}}$, $a, a' > 0$, положим*

$$F = \delta_{a'}^{-1}\circ\tau_{y_0}^{-1}\circ f\circ\tau_{x_0}\circ\delta_a : \delta_a^{-1}\circ\tau_{x_0}^{-1}(\Delta) \to \mathscr{N}_{\tilde{b}}. \qquad (3.22)$$

*Тогда $F \in \mathfrak{D}_d(\varepsilon)$.*

Доказательство. Отметим, что для $f \in C^{\infty}(\mathscr{N}_{\tilde{b}})$

$$\begin{aligned}(\delta_{a*}X_jf)(\delta_a(x,t)) &= \bigg(\frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{\alpha,k} a_{jk}^{\alpha}x_k\frac{\partial}{\partial t_\alpha}\bigg)(f(ax, a^2t)) \\ &= a\bigg(\frac{\partial f}{\partial x_j} + a\sum_{\alpha,k} a_{jk}^{\alpha}x_k\frac{\partial f}{\partial t_\alpha}\bigg)(ax, a^2t) = aX_jf(ax, a^2t). \qquad (3.23)\end{aligned}$$

Следовательно, $\delta_{a*}Z_j = aZ_j$, $\tau_{x_0*}Z_j = Z_j$ ввиду левоинвариантности. Тогда для любого $k$ будет

$$F_* Z_k = a\delta_{a'*}^{-1} \circ \tau_{y_0*}^{-1} \circ f_* Z_k. \tag{3.24}$$

Если $f_* Z_k = V_k + \overline{W}_k$, где $V_k, W_k \in C^1(T_{1,0}(\mathscr{N}_{\tilde{b}}))$, то

$$F_* Z_k = \widetilde{V}_k + \overline{\widetilde{W}}_k \tag{3.25}$$

с

$$\widetilde{V}_k = a\delta_{a'*}^{-1} \circ \tau_{y_0*}^{-1}(V_k), \quad \widetilde{W}_k = a\delta_{a'*}^{-1} \circ \tau_{y_0*}^{-1}(W_k) \in C^1(T_{1,0}(\mathscr{N}_{\tilde{b}})), \tag{3.26}$$

поскольку $\delta_{a'*}^{-1}Z, \tau_{y_0*}^{-1}Z \in C^1(T_{1,0}(\mathscr{N}_{\tilde{b}}))$ для любого $Z \in C^1(T_{1,0}(\mathscr{N}_{\tilde{b}}))$. Это будет так потому, что $\delta_{a'}^{-1} = \delta_{a'^{-1}}$ и $\tau_{y_0}^{-1} = \tau_{y_0^{-1}}$ являются CR-отображениями. Применяя $a\delta_{a'*}^{-1} \circ \tau_{y_0*}^{-1}$ к обеим частям системы уравнений с частными производными типа Бельтрами (1.37) для $f$, т. е. $W_k(y) = \sum_l Q_{lk}(y)V_l(y)$, $y \in f(\Delta)$, приходим к системе типа Бельтрами для $F$:

$$\widetilde{W}_k(x) = \sum_l \widetilde{Q}_{lk}(x)\widetilde{V}_l(x) \tag{3.27}$$

с $\widetilde{Q}_{lk}(x) = Q_{lk}(\tau_{y_0} \circ \delta_{a'}(x))$ для $x \in \delta_{a'}^{-1} \circ \tau_{y_0}^{-1} f(\Delta)$. Значит, $\|\widetilde{Q}\|_\infty \le \varepsilon$, и тем самым $F \in \mathfrak{D}_d(\varepsilon)$.

**Теорема 3.4.** *Для $f : \Delta \to \mathscr{N}_{\tilde{b}}$ в $\mathfrak{D}_d(\varepsilon)$ с $d > \mathfrak{n}$, $B(0,1) \subset \Delta$ найдется константа $C$, зависящая только от группы $\mathscr{N}_b$, $\nu$, $d$ и $\varepsilon$, такая, что*

$$d_b(f(x), f(x')) \le C d_b(x,x')^{\frac{1}{2}(1-\frac{\mathfrak{n}}{d})} \operatorname{diam} f(B(0,1)) \tag{3.28}$$

*для $x, x' \in B(0, 1-\nu)$, где $\operatorname{diam} f(B(0,1)) = \sup\limits_{y,y' \in f(B(0,1))} \|y'^{-1}y\|$.*

Доказательство. Достаточно доказать теорему для $\operatorname{diam} f(B(0,1)) = 1$ с $f(0) = 0$. Действительно, в ином случае положим

$$F = \delta_{\operatorname{diam} f(B(0,1))}^{-1} \circ \tau_{f(0)}^{-1} \circ f. \tag{3.29}$$

Тогда $\operatorname{diam} F(B(0,1)) = 1$, $d_b(F(x), F(x')) = \frac{1}{\operatorname{diam} f(B(0,1))} d_b(f(x), f(x'))$ и $F \in \mathfrak{D}_d(\varepsilon)$ по предложению 3.3.

Пусть $\tilde{f} = \pi_{\tilde{b}}^{-1} \circ f : \Delta \to M_{\tilde{b}} \subset \mathbf{C}^{\tilde{n}+\tilde{p}}$. Заметим, что оценка (3.1) в теореме 3.1 имеет место также, если $Z\tilde{f}$ заменить на $\overline{Z}\tilde{f}$, что получается с помощью системы уравнений с частными производными типа Бельтрами (1.26), $\overline{Z}\tilde{f}_j = QZ\tilde{f}_j$ для $j = 1, \dots, \tilde{n} + \tilde{p}$, и того факта, что $\|Q\|_\infty < \varepsilon$. Следовательно,

$$\| |X_j \tilde{f}(x)| B(0, 1-\nu)\|_d \le \widetilde{C}_b \nu^{-\mathfrak{n}} \frac{1}{1 - \varepsilon \Lambda_d \nu^{-\mathfrak{n}}} \operatorname{diam}_E \tilde{f}(B(0,1)), \tag{3.30}$$

$j = 1, \dots, 2n$, с константой $\widetilde{C}_b$, зависящей лишь от группы $\mathscr{N}_b$. Очевидна равномерная ограниченность $\operatorname{diam}_E\bigl(\pi_{\tilde{b}}^{-1} \circ f\bigr)(B(0,1)) \le \operatorname{diam}_E \pi_{\tilde{b}}^{-1}(B(0,1))$. Пусть $f(x) = (f'(x), f''(x))$ с $f'(x) \in \mathbf{C}^{\tilde{n}}$, $f''(x) \in \mathbf{R}^{\tilde{p}}$. Используя (3.18) и обозначения для $\mathscr{N}_{\tilde{b}}$, найдем константы $C, C' > 0$ такие, что

$$\begin{aligned} d_b(f(x), f(y))^4 &\le C\bigl(|f'(x) - f'(y)|_1^4 + |f''(x) - f''(y)|_2^2 + |f'(x) - f'(y)|_1^2\bigr) \\ &\le C'\bigl(|f'(x) - f'(y)|_1^2 + |f''(x) - f''(y)|_2^2\bigr) \end{aligned} \tag{3.31}$$

для $f(x), f(y) \in B(0,1) \subset \mathscr{N}_{\tilde{b}}$. Применив теорему вложения Соболева, сформулированную ниже в предложении 3.5, к каждой компоненте отображения $\tilde{f}$, получим оценки для $|f'(x)-f'(x')|_1$ и $|f''(x)-f''(x')|_2$ (отметим, что $f=\pi_{\tilde{b}}\circ\tilde{f}$). Тогда, используя неравенство (3.31), приходим к гёльдеровой оценке (3.28), когда $\operatorname{diam} f(B(0,1))=1$. Теорема доказана.

Следующее утверждение обобщает теорему вложения Соболева (см. теорему 5.15 в [24]). Из него легко вытекает локальный вариант этой теоремы, который мы использовали.

**Предложение 3.5.** *Пусть $u$ — $\mathbf{C}$-значная функция на $S^{1,d}(\mathscr{N}_b)$ и $d>\mathfrak{n}$. Тогда существует константа $\widetilde{C}$, зависящая только от группы $\mathscr{N}_b$ и $d$, такая, что для любых двух точек $x, y \in \mathscr{N}_b$ имеет место неравенство*

$$|u(x)-u(y)| \le \widetilde{C}\|u\|_{S^{1,d}(\mathscr{N}_b)}\|y^{-1}\cdot x\|^{1-\mathfrak{n}/d}. \tag{3.32}$$

**Следствие 3.6.** *Для $f:\Delta\to\widetilde{D}\subset\mathscr{N}_{\tilde{b}}$ из $\mathfrak{D}_d(\varepsilon)$ с $d>\mathfrak{n}$, где $\widetilde{D}$ — ограниченное, а $E$ — компактное подмножества в $\Delta$, существует константа $C$, зависящая только от группы $\mathscr{N}_b$, $E$, $\widetilde{D}$, $d$ и $\varepsilon$, такая, что*

$$d_b(f(x), f(x')) \le C d_b(x,x')^{\frac{1}{2}(1-\mathfrak{n}/d)} \tag{3.33}$$

*для $x, x' \in E\subset\Delta$.*

Доказательство. Покроем компактное множество $E$ конечным набором шаров $\{B(x_l,r_l)\}_{l=1}^M$ таких, что $\bigcup\limits_{l=1}^M \overline{B(x_l,r_l)}\subset\Delta$ и $E\subset\bigcup\limits_{l=1}^M B(x_l,(1-\nu)r_l)$ для малого $0<\nu<\frac{1}{2}$. Пусть

$$f_l(x)=f\circ\tau_{x_l}\circ\delta_{r_l}(x) \tag{3.34}$$

для $x\in B(0,1)$, $l=1,\dots,M$. Тогда $f_l\in\mathfrak{D}_d(\varepsilon)$ по предложению 3.3. Применяя теорему 3.4 к $f_l$, получаем гёльдеровость $f_l$ на $B(0,1-\nu)$. Следовательно, приходим к гёльдеровости $f$ на каждом шаре $B(x_l,(1-\nu)r_l)$. Отсюда вытекает оценка (3.33) для $f$.

## § 4. $\boldsymbol{\xi}$-Устойчивость и доказательство основной теоремы

Функциональный класс, введенный А. П. Копыловым, и полученные им в [2] результаты о $\xi$-устойчивости могут быть легко обобщены на нильпотентные двуступенчатые группы. Мы будем использовать их для доказательства нашей основной теоремы. Под расстоянием в этом параграфе мы понимаем расстояние Карно — Каратеодори, заданное формулой (1.30).

Рассмотрим класс $\mathfrak{G}=\{f:\Delta\subset\mathscr{N}_b\to\mathscr{N}_{\tilde{b}}\}$ отображений, действующих из областей нильпотентной двуступенчатой группы Ли $\mathscr{N}_b$ в другую такую группу $\mathscr{N}_{\tilde{b}}$, которые обладают следующими свойствами.

$\mathfrak{g}_1$. Класс $\mathfrak{G}$ состоит из локально ограниченных отображений.

$\mathfrak{g}_2$. Отображения класса $\mathfrak{G}$ инвариантны относительно сдвигов и растяжений. А именно, для любых $f:\Delta\to\mathscr{N}_{\tilde{b}}$ из $\mathfrak{G}$ для области $\Delta\subset\mathscr{N}_b$, преобразований $T_1:\mathscr{N}_b\to\mathscr{N}_b$ и $T_2:\mathscr{N}_{\tilde{b}}\to\mathscr{N}_{\tilde{b}}$ вида $T_1(x)=\delta_{c_1}\circ\tau_{x'}(x)$, $x\in\mathscr{N}_b$, $T_2(y)=\delta_{c_2}\circ\tau_{y'}(y)$, $y\in\mathscr{N}_{\tilde{b}}$, где $x'\in\mathscr{N}_b$ и $y'\in\mathscr{N}_{\tilde{b}}$ — неподвижные точки, $c_1, c_2$ — положительные константы, имеем $T_2\circ f\circ T_1^0\in\mathfrak{G}$, где $T_1^0=T_1|_{T_1^{-1}(\Delta)}$ означает сужение $T_1$ на прообраз области $\Delta$ при отображении $T_1$.

$\mathfrak{g}_3$. Для области $\Delta \subset \mathscr{N}_b$ любое ограниченное семейство $F = \{f : \Delta \to \mathscr{N}_{\tilde{b}}\}$ отображений области $\mathfrak{G}$ равностепенно непрерывно на компактных подмножествах $\Delta$. А именно, для любого замкнутого подмножества $E$ в $\Delta$ величина

$$\omega_{F,E}(\epsilon) = \sup_{g \in F} \sup_{\substack{x,y \in E, \\ d_C(x,y) \le \epsilon}} d_C(g(x), g(y)), \quad \epsilon \in (0, \infty), \tag{4.1}$$

стремится к нулю при $\epsilon \to 0$.

$\mathfrak{g}_4$. Класс $\mathfrak{G}$ замкнут относительно равномерной сходимости на компактных подмножествах области определения: если $\Delta$ — область в $\mathscr{N}_b$ и $\{f_j : \Delta \to \mathscr{N}_{\tilde{b}}\}_{j \in \mathbb{N}}$ — последовательность отображений из $\mathfrak{G}$, сходящаяся к отображению $f : \Delta \to \mathscr{N}_{\tilde{b}}$ на каждом замкнутом ограниченном подмножестве $E$ в $\Delta$, то $f$ — отображение класса $\mathfrak{G}$.

$\mathfrak{g}_5$. Если $f : \Delta \subset \mathscr{N}_b \to \mathscr{N}_{\tilde{b}}$ — отображение класса $\mathfrak{G}$ и $\Delta_1$ — подобласть в $\Delta$, то $f|_{\Delta_1} \in \mathfrak{G}$.

$\mathfrak{g}_6$. Если $f : \Delta \subset \mathscr{N}_b \to \mathscr{N}_{\tilde{b}}$ локально класса $\mathfrak{G}$, т. е. для любой точки $x \in \Delta$ существует ее окрестность $U(x) \subset \Delta$ такая, что $f|U(x) \in \mathfrak{G}$, то $f \in \mathfrak{G}$.

Отметим, что в определении $\mathfrak{g}_2$ преобразование $\delta_c \circ \tau_{x'}$ может быть заменено на $\tau_{x''} \circ \delta_{c'}$ с некоторыми $c', x''$, ибо $\delta_c \circ \tau_{x'}(x) = \delta_c(x') \cdot \delta_c(x) = \tau_{\delta_c(x')} \circ \delta_c(x)$.

**Предложение 4.1.** *Пусть $\mathfrak{G}_0$ — множество всех CR-отображений из области в строго 2-псевдовогнутую нильпотентную двуступенчатую группу Ли $\mathscr{N}_b$ с несущим многообразием $\mathbf{R}^{2n+p}$ в другую такую группу $\mathscr{N}_{\tilde{b}}$ с несущим многообразием $\mathbf{R}^{2\tilde{n}+\tilde{p}}$. Тогда $\mathfrak{G}_0$ удовлетворяет условиям $\mathfrak{g}_1$–$\mathfrak{g}_6$.*

Доказательство. Отождествляя $\mathscr{N}_{\tilde{b}}$ с подмногообразием $M_{\tilde{b}} \subset \mathbf{C}^{\widetilde{N}}$ ($\widetilde{N} = \tilde{n} + \tilde{p}$), находим, что каждая компонента $\tilde{f} = \pi_b^{-1} \circ f$ является CR-функцией, где проекция $\pi_b : M_{\tilde{b}} \to \mathscr{N}_{\tilde{b}}$, заданная формулой (1.3), есть CR-диффеоморфизм. Пусть $h$ — CR-функция в области $U$. По формуле типа Коши (2.27) имеем $h \in C^\infty(D)$ для любой $D$ с $\overline{D} \subset U$. Тем самым $h \in S^{1,d}(D)$.

Свойство $\mathfrak{g}_1$ для $\mathfrak{G}_0$ очевидно, потому что CR-отображение локально класса $C^\infty$.

Проверим свойство $\mathfrak{g}_2$. Заметим, что $\tau_x$ и $\delta_c$ суть CR-отображения, т. е. $\tau_{x*} Z_j = Z_j$ и $\delta_{c*} Z_j = c Z_j$ для любого $j$. Тогда $T^0_{1*} Z_j = c_1 Z_j$ и, значит,

$$\left(T_2 \circ f \circ T_1^0\right)_* Z_j = T_{2*} \circ f_* \circ T^0_{1*}(Z_j) = c_1 \delta_{c_2 *} \circ \tau_{y'*} \circ f_* Z_j \in C(T_{1,0}(\mathscr{N}_{\tilde{b}})), \tag{4.2}$$

поскольку $f_* Z_j \in C(T_{1,0}(\mathscr{N}_{\tilde{b}}))$. А именно, $T_2 \circ f \circ T_1^0$ является CR-отображением, и тем самым $\mathfrak{g}_2$ выполнено для $\mathfrak{G}_0$.

Свойство $\mathfrak{g}_3$ получается применением следствия 3.6 к $\mathfrak{D}_d(0)$.

Свойство $\mathfrak{g}_4$ следует из применения формулы типа Коши (2.27) к последовательности $\mathbf{C}^{\widetilde{N}}$-значных CR-функций $\pi_b^{-1} \circ f_j$ и использования следствия 2.4 для доказательства того, что предельная функция будет CR-функцией, как в доказательстве теоремы 1.1.

Свойства $\mathfrak{g}_5$, $\mathfrak{g}_6$ для $\mathfrak{G}_0$ вытекают из определения CR-отображения.

Для локально ограниченного отображения $f : \Delta \to \mathscr{N}_{\tilde{b}}$, числа $\rho \in (0,1)$ и шара $B_C(x,r)$ рассмотрим функционал, равный

$$\xi_{\rho, B_C(x,r)}(f, \mathfrak{G}) = \inf_{g \in \mathfrak{G} : B_C(x,r) \to \mathscr{N}_{\tilde{b}}} \left\{ \sup_{y \in B_C(x, \rho r)} \frac{d_C(f(y), g(y))}{\operatorname{diam}_C f(B(x,r))} \right\}, \tag{4.3}$$

если $\operatorname{diam}_C f(B_C(x,r)) \neq 0, \infty$, и 0 в других случаях. Определим *функционал замыкания*, полагая

$$\xi_\rho(f, \mathfrak{G}) = \sup_{B_C(x,r)\subset\Delta} \xi_{\rho,B_C(x,r)}(f, \mathfrak{G}), \tag{4.4}$$

$$\xi_{B_C(x,r)}(f, \mathfrak{G}) = \int_0^1 \xi_{\rho,B_C(x,r)}(f, \mathfrak{G}) d\rho, \tag{4.5}$$

$$\xi(f, \mathfrak{G}) = \sup_{B_C(x,r)\subset\Delta} \xi_{B_C(x,r)}(f, \mathfrak{G}). \tag{4.6}$$

Следующее утверждение является версией теоремы 4 из [2] для нильпотентных групп.

**Теорема 4.2.** *Пусть класс $\mathfrak{G}$ обладает свойствами $\mathfrak{g}_2$, $\mathfrak{g}_3$, $\mathfrak{g}_5$, $\rho \in (0,1)$ и $f : B_C(x,r) \subset \mathscr{N}_b \to \mathscr{N}_{\tilde{b}}$ — ограниченное отображение, удовлетворяющее условию $\xi_\rho(f, \mathfrak{G}) < \frac{1}{2}$. Пусть $\omega_{f,B_C(x,ar)}$ — модуль непрерывности отображения $f$ в шаре $B_C(x, ar)$:*

$$\omega_{f,B_C(x,ar)}(\tau) = \sup_{\substack{y',y''\in B_C(x,ar),\\ d_C(y',y'')<\tau}} d_C(f(y'), f(y'')). \tag{4.7}$$

*Тогда для любых $a \in (0,1)$ и $\tau \in (0, \rho\kappa^{-1}(1-a)r)$ имеет место неравенство*

$$\omega_{f,B_C(x,ar)}(\tau) \le \left\{(1 + \xi_\rho(f, \mathfrak{G}))\omega^1_{B_C(0,1/2)}(\kappa^{-1}) + 2\xi_\rho(f, \mathfrak{G})\right\}^u \operatorname{diam}_C f(B_C(x,r)), \tag{4.8}$$

*где*

$$u = \frac{\ln[1 + 2r\tau^{-1}(1-a)(1-(2\kappa)^{-1}\rho)]}{\ln(2\kappa\rho^{-1})} - 1, \tag{4.9}$$

*$\omega^1_{B_C(0,1/2)}(\varepsilon)$ совпадает с функцией $\omega_{F,E}(\varepsilon)$ в (4.1) из условия $\mathfrak{g}_3$ с $E = \overline{B_C(0,1/2)}$ и $F = \{g \in \mathfrak{G}; g : B_C(0,1) \to \widetilde{B}_C(0,1)\}$, где $B_C(0,1)$ и $\widetilde{B}_C(0,1)$ — единичные шары Карно — Каратеодори в $\mathscr{N}_b$ и $\mathscr{N}_{\tilde{b}}$ соответственно и число $\kappa \ge 2$ удовлетворяет неравенству $(1 + \xi_\rho(f, \mathfrak{G}))\omega^1_{B_C(0,1/2)}(\kappa^{-1}) + 2\xi_\rho(f, \mathfrak{G}) < 1$.*

Доказательство. Пусть $x_1, x_2 \in \overline{B_C(x_0, ar)}$ таковы, что $d_C(x_1, x_2) < \tau$. Из $\tau < \rho\kappa^{-1}(1-a)r$ вытекает, что $B_C(x_1, \kappa\rho^{-1}d_C(x_1,x_2)) \subset B_C(x_0, r)$, так как $d_C(\cdot,\cdot)$ — расстояние. По определению функционала замыкания в (4.4) для любого $\gamma > 0$ существует отображение $g_\gamma : B_C(x_1, \kappa\rho^{-1}\ d_C(x_1,x_2)) \to \mathscr{N}_{\tilde{b}}$ в $\mathfrak{G}$ такое, что

$$d_C(f(y), g_\gamma(y)) \le (\xi_\rho(f, \mathfrak{G}) + \gamma) \operatorname{diam}_C f(B_C(x_1, \kappa\rho^{-1}d_C(x_1,x_2))) \tag{4.10}$$

для всех $y \in B_C(x_1, \kappa d_C(x_1,x_2))$.

Поскольку $\kappa \ge 2$, $x_2 \in B_C(x_1, \kappa\rho^{-1}d_C(x_1,x_2))$, из (4.10) следует, что

$$\begin{aligned} d_C(f(x_1), f(x_2)) \le d_C(g_\gamma(x_1), g_\gamma(x_2)) \\ + 2(\xi_\rho(f, \mathfrak{G}) + \gamma) \operatorname{diam}_C f(B_C(x_1, \kappa\rho^{-1}d_C(x_1,x_2))). \end{aligned} \tag{4.11}$$

Так как $x_2 \in B_C(x_1, 2^{-1}\kappa d_C(x_1,x_2))$, имеем

$$d_C\,(g_\gamma(x_1), g_\gamma(x_2)) \le \omega_{g_\gamma,B_C(x_1,2^{-1}\kappa d_C(x_1,x_2))}(d_C(x_1,x_2)), \tag{4.12}$$

где $\omega_{g_\gamma, B_C(x_1, 2^{-1}\kappa d_C(x_1,x_2))}$ представляет собой модуль непрерывности отображения $g_\gamma$ в шаре $B_C(x_1, 2^{-1}\kappa d_C(x_1,x_2))$.

Для оценки $\omega_{g_\gamma, B_C(x_1, 2^{-1}\kappa d_C(x_1,x_2))}$ рассмотрим отображение

$$g_\gamma^0(x) = g_\gamma^{-1}(x_1)\cdot g_\gamma(x_1\cdot\delta_{\kappa d_C(x_1,x_2)}(x)), \tag{4.13}$$

определенное в $B_C(0,1)$. Заметим, что

$$\begin{aligned} d_C(g_\gamma^0(x), g_\gamma^0(y)) &= d_C(g_\gamma^{-1}(x_1)\cdot g_\gamma(x_1\cdot\delta_{\kappa d_C(x_1,x_2)}(x)), g_\gamma^{-1}(x_1)\cdot g_\gamma(x_1\cdot\delta_{\kappa d_C(x_1,x_2)}(y))) \\ &= d_C(g_\gamma(x_1\cdot\delta_{\kappa d_C(x_1,x_2)}(x)), g_\gamma(x_1\cdot\delta_{\kappa d_C(x_1,x_2)}(y))) \end{aligned} \tag{4.14}$$

ввиду свойства однородности $d_C(\cdot,\cdot)$ в (1.31). Тогда

$$\omega_{g_\gamma, B_C(x_1, 2^{-1}\kappa d_C(x_1,x_2))}(\tau) = \omega_{g_\gamma^0, B_C(0,2^{-1})}(\kappa^{-1}d_C(x_1,x_2)^{-1}\tau). \tag{4.15}$$

Используя свойства $\mathfrak{g}_2$ и $\mathfrak{g}_5$, свойство однородности $d_C(\cdot,\cdot)$ в (1.31), а также тот факт, что $g_\gamma^0 \in \mathfrak{G}$, и (4.10), получаем

$$\begin{aligned} &d_C\big(g_\gamma^0(x), 0\big) = d_C(g_\gamma(x_1\cdot\delta_{\kappa d_C(x_1,x_2)}(x)), g_\gamma(x_1)) \\ &\le d_C(f(x_1\cdot\delta_{\kappa d_C(x_1,x_2)}x), f(x_1)) + 2(\xi_\rho(f,\mathfrak{G})+\gamma)\operatorname{diam}_C f(B_C(x_1, \kappa\rho^{-1}d_C(x_1,x_2))) \\ &\le \{1+2(\xi_\rho(f,\mathfrak{G})+\gamma)\}\operatorname{diam}_C f(B_C(x_1,\kappa\rho^{-1}d_C(x_1,x_2))) \end{aligned} \tag{4.16}$$

для всех $x \in B_C(0,1)$. Таким образом,

$$\tilde g_\gamma^0 = \delta^{-1}_{(1+2(\xi_\rho(f,\mathfrak{G})+\gamma))\operatorname{diam}_C f(B_C(x_1,\kappa\rho^{-1}d_C(x_1,x_2)))} \circ g_\gamma^0 \in \mathfrak{G} \tag{4.17}$$

отображает $B_C(0,1)$ в $B_C(0,1)$ и поэтому $\omega_{\tilde g_\gamma^0, B_C(0,1/2)}(\tau) \le \omega^1_{B_C(0,1/2)}(\tau)$ для $\tau > 0$. Тем самым

$$\begin{aligned} \omega_{g_\gamma^0, B_C(0,1/2)}(\tau) &\le \{1+2(\xi_\rho(f,\mathfrak{G})+\gamma)\}\omega^1_{B_C(0,1/2)}(\tau) \\ &\quad\times \operatorname{diam}_C f(B_C(x_1,\kappa\rho^{-1}d_C(x_1,x_2))), \end{aligned} \tag{4.18}$$

(4.11), (4.12), (4.15) и (4.18) влекут

$$\begin{aligned} d_C(f(x_1), f(x_2)) &\le \big\{(1+2\xi_\rho(f,\mathfrak{G}))\omega^1_{B_C(0,1/2)}(\kappa^{-1}) + 2\xi_\rho(f,\mathfrak{G})\big\} \\ &\quad\times \operatorname{diam}_C f(B_C(x_1,\kappa\rho^{-1}d_C(x_1,x_2))). \end{aligned} \tag{4.19}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} &\operatorname{diam}_C f(B_C(x_1,\kappa\rho^{-1}d_C(x_1,x_2))) \le \{(1+2\xi_\rho(f,\mathfrak{G}))\omega^1_{B_C(0,2^{-1})}(\kappa^{-1}) + 2\xi_\rho(f,\mathfrak{G})\} \\ &\times \sup_{x_1^{(1)}, x_2^{(1)} \in B_C(x_1,\kappa\rho^{-1}d_C(x_1,x_2))} \operatorname{diam}_C f\big(B_C\big(x_1^{(1)}, \kappa\rho^{-1}d_C\big(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}\big)\big)\big) \end{aligned} \tag{4.20}$$

для $d_C(x_1,x_2) \le (1-a)r\rho\kappa^{-1}(1+2\kappa\rho^{-1})^{-1}$. Применяя (4.20) к последовательности пар точек $\big(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}\big)$, $\big(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}\big), \dots, \big(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}\big)$ такой, что

(1) $B_C\big(x_1^{(j)}, \kappa\rho^{-1}d_C\big(x_1^{(j)}, x_2^{(j)}\big)\big) \subset B_C(x_0, r)$, $j = 1,\dots,k$;

(2) $x_\mu^{(j+1)} \in B_C\big(x_1^{(j)}, \kappa\rho^{-1}d_C\big(x_1^{(j)}, x_2^{(j)}\big)\big)$ для $\mu = 1,2$, $j = 1,\dots,k-1$;

(3) для некоторого $\chi$ такого, что $(1+2(\xi_\rho(f,\mathfrak{G}))\omega^1_{B_C(0,2^{-1})}(\kappa^{-1}) + 2\xi_\rho(f,\mathfrak{G}) + \chi < 1$, выполнено неравенство

$$\begin{aligned} &\operatorname{diam}_C f\big(B_C\big(x_1^{(j)}, \kappa\rho^{-1}d_C\big(x_1^{(j)}, x_2^{(j)}\big)\big)\big) \\ &\qquad\le \big\{(1+2\xi_\rho(f,\mathfrak{G}))\omega^1_{B_C(0,2^{-1})}(\kappa^{-1}) + 2\xi_\rho(f,\mathfrak{G}) + \chi\big\} \\ &\qquad\quad\times \operatorname{diam}_C f\big(B_C\big(x_1^{(j+1)}, \kappa\rho^{-1}d_C\big(x_1^{(j+1)}, x_2^{(j+1)}\big)\big)\big), \end{aligned} \tag{4.21}$$

$j = 1, \dots, k-1$, приходим к оценке

$$d_C(f(x_1), f(x_2)) \le \{(1 + 2\xi_\rho(f, \mathfrak{G}))\omega^1_{B_C(0,2^{-1})}(\kappa^{-1}) + 2\xi_\rho(f, \mathfrak{G}) + \chi\}^k \times \operatorname{diam}_C f(B_C(x_0, r)). \quad (4.22)$$

Число $k$ может быть оценено, как в [2, с. 212]. Теорема доказана.

Используя теорему 4.2, можно доказать следующие две теоремы, аналогичные теоремам 3 и $5'$ из [2]. Детали мы опустим.

**Теорема 4.3.** *Пусть класс $\mathfrak{G}$ удовлетворяет условиям $\mathfrak{g}_1$–$\mathfrak{g}_6$. Тогда для $\delta > 0$, $\rho \in (0,1)$ существует положительное число $\tilde\delta = \tilde\delta(\delta, \rho)$ такое, что любое локально ограниченное отображение $f : \Delta \to \mathscr{N}_{\tilde b}$ из области $\Delta \subset \mathscr{N}_b$ удовлетворяет условиям*

*(1) если $\xi(f, \mathfrak{G}) \le \tilde\delta$ то $\xi_\rho(f, \mathfrak{G}) \le \delta$;*

*(2) если $\xi_\rho(f, \mathfrak{G}) \le \tilde\delta$ то $\xi(f, \mathfrak{G}) \le \delta$.*

**Теорема 4.4.** *Пусть класс $\mathfrak{G}$ удовлетворяет условиям $\mathfrak{g}_1$–$\mathfrak{g}_6$. Тогда существует неотрицательная вещественная функция $\alpha : [0, 1/2) \times (0,1) \to (0,1)$, удовлетворяющая следующим условиям.*

*(1) $\alpha(\delta, \rho) \to \alpha(0, \rho) = 0$ при $\delta \to 0$ для $\rho \in (0,1)$.*

*(2) Пусть $f : \Delta \to \mathscr{N}_{\tilde b}$ — локально ограниченное отображение из области $\Delta \subset \mathscr{N}_b$ с $\xi(f, \mathfrak{G}) \le \varepsilon < \frac{1}{2}$. Тогда для любого $\rho \in (0,1)$ и любой области $\Delta' \subset \Delta$ вместе с ее $\rho_{\Delta'}$-окрестностью $U_{\rho_{\Delta'}} = \{x \in \mathscr{N}_b; d_C(x, \Delta') < \rho_{\Delta'}\}$, $\rho_{\Delta'} = \frac{1-\rho}{2\rho} \operatorname{diam} \Delta'$, существует отображение $g \in \mathfrak{G}$ такое, что*

$$d_C(f(x), g(x)) < \alpha(\varepsilon, \rho) \operatorname{diam}_C f(U_{\rho_{\Delta'}}) \quad (4.23)$$

*для всех $x \in \Delta'$.*

Доказательство теоремы 1.1. Утверждение теоремы 1.1 будет следовать из теоремы 4.4, если мы проверим следующие факты о классе $\mathfrak{G}_0$ CR-отображений: $\xi(f, \mathfrak{G}_0) \le \delta < \frac{1}{2}$ для любого $\delta > 0$, если $f \in \mathfrak{D}_d(\varepsilon)$ с достаточно малым $\varepsilon$. А именно, нам достаточно показать, что

$$\alpha(\varepsilon) = \sup_{f \in \mathfrak{D}_d(\varepsilon)} \xi(f, \mathfrak{G}_0) \to 0 \quad (4.24)$$

при $\varepsilon \to 0$.

Если это не верно, существуют последовательность областей $\Delta_j$ и последовательность отображений $f_j : \Delta_j \to \mathscr{N}_{\tilde b}$ в $\mathfrak{D}_d(j^{-1})$ такие, что $\xi(f_j, \mathfrak{G}_0) > \varepsilon_0$ для некоторого $\varepsilon_0 > 0$. По определению функционала $\xi$ существуют шары $B_C(x_j, r_j) \subset \Delta_j$ такие, что $\xi_{B_C(x_j, r_j)}(f_j, \mathfrak{G}_0) \ge \varepsilon_0$. Используя неравенство из [3, с. 214], находим, что

$$\xi_{\rho_0, B_C(x_j, r_j)}(f_j, \mathfrak{G}_0) \ge \varepsilon_0' \quad (4.25)$$

с $\rho_0 = 1 - \varepsilon_0/2$, $\varepsilon_0' = \frac{\varepsilon_0}{1-\varepsilon_0}$. Перенормируем $f_j$, полагая

$$F_j(x) = \delta^{-1}_{\operatorname{diam}_C f(B_C(x_j, r_j))} \circ \tau^{-1}_{f_j(x_j)} \circ f_j \circ \tau_{x_j} \circ \delta_{r_j}(x) \quad (4.26)$$

для $x \in B_C(0,1)$. Отметим, что $\xi_{\rho_0, B_C(x_j, r_j)}(f_j, \mathfrak{G}_0) = \xi_{\rho_0, B_C(0,1)}(F_j, \mathfrak{G}_0)$ ввиду однородности $d_C(\cdot, \cdot)$ в (1.31). Тогда (1) $\operatorname{diam}_C F_j(B(0,1)) = 1$; (2) $F_j \in \mathfrak{D}_d(j^{-1})$; (3) неравенство

$$\sup_{x \in B_C(0, \rho_0)} d_C(F_j(x), g(x)) \ge \varepsilon_0' \quad (4.27)$$

выполнено для любого CR-отображения $g : B_C(0,1) \to \mathscr{N}_{\tilde{b}} \subset \mathbf{C}^N$, $j \in \mathbb{N}$. Здесь (1) очевидно, (2) вытекает из предложения 3.3, (3) следует из (4.25).

Для $0 < \rho < 1$ можно применить следствие 3.6 к $F_j \in \mathfrak{D}_d(j^{-1})$ с $E = \overline{B_C(0,\rho)}$ и получить, что $\{F_j\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ — равномерно ограниченное и равностепенно непрерывное семейство отображений на шаре Карно — Каратеодори $\overline{B_C(0,\rho)}$. Согласно теореме Арцела — Асколи найдется подпоследовательность $\{F_{j_\kappa}\}_{\kappa\in\mathbb{N}}$, сходящаяся равномерно в $\overline{B_C(0,\rho)}$ к непрерывному отображению $g : \overline{B_C(0,\rho)} \to \mathscr{N}_{\tilde{b}} \subset \mathbf{C}^N$. Применяя формулу интегрального представления (2.14) в теореме 2.2 к $F_{j_\kappa}$ на произвольном фиксированном шаре $B(\tilde{x},(1-\nu)r) \subset B(\tilde{x},r) \subset B_C(0,\rho)$, получаем

$$F_{j_\kappa}(x) = \Phi(F_{j_\kappa})(x) + T(\overline{Z}F_{j_\kappa})(x) \tag{4.28}$$

для $x \in B(\tilde{x},(1-\nu)r)$, при этом

$$\begin{aligned} |T(\overline{Z}F_{j_\kappa})(x)| &\le C_b' \int\limits_{B(\tilde{x},(1-\nu)r)} \frac{|\overline{Z}F_{j_\kappa}(y)|}{\|y^{-1}\cdot x\|^{\mathfrak{n}-1}}\, dV(y) \\ &\le C_b' \|\overline{Z}F_{j_\kappa}|B(\tilde{x},(1-\nu)r)\|_d \|.\|y^{-1}\cdot x\|^{-\mathfrak{n}+1}|B(\tilde{x},(1-\nu)r)\|_{\frac{d}{d-1}} \\ &\le C'' C_b \nu^{-\mathfrak{n}} \frac{j_\kappa^{-1}}{1-j_\kappa^{-1}\Lambda_d\nu^{-\mathfrak{n}}}\operatorname{diam}_E F_{j_\kappa}(B(\tilde{x},r)) \end{aligned} \tag{4.29}$$

с некоторыми положительными константами $C_b'$ и $C''$, не зависящими от $\kappa$, но $C''$ зависит от $r$ и $\nu$. Здесь использованы лемма 3.2, оценка в теореме 3.1, включение $F_{j_\kappa} \in \mathfrak{D}\big(j_\kappa^{-1}\big)$ и локальная интегрируемость нормы $\|\cdot\|^{-(\mathfrak{n}-1)\frac{d}{d-1}}$ (заметим, что последняя однородна степени $-(\mathfrak{n}-1)\frac{d}{d-1} > -\mathfrak{n}$, хотя элемент объема $dV$ однороден степени $\mathfrak{n}$). В неравенстве (4.29) мы применили оценки (3.1) к отображению $F_{j_\kappa}\circ\tau_{\tilde{x}}\circ\delta_r$, которое определено на $B(0,1)$ и входит в $\mathfrak{D}\big(j_\kappa^{-1}\big)$ по предложению 3.3. Величина $\operatorname{diam}_E F_{j_\kappa}(B(\tilde{x},r)) \le \operatorname{diam}_E \pi_{\tilde{b}}^{-1}(B_C(0,1))$ равномерно ограничена. Поэтому $T(\overline{Z}F_{j_\kappa})(x) \to 0$ при $\kappa\to\infty$. А именно,

$$g(x) = \int\limits_{\partial B(\tilde{x},(1-\nu)r)} H(y^{-1}\cdot x)\nu_Z(y)g(y)\,dS(y). \tag{4.30}$$

Так как шар $B(\tilde{x},r)$ выбран произвольно в $B_C(0,\rho)$, то $g$ — CR-отображение на $B_C(0,\rho)$ по следствию 2.4.

Повторяя проделанные рассуждения, мы можем выбрать подпоследовательность $F_{j_{\kappa*}}$ которая сходится к CR-отображению в $B_C(0,1)$, а это противоречит неравенству (4.27). Теорема доказана.

## *ЛИТЕРАТУРА*


1. *Решетняк Ю. Г.* Теоремы устойчивости в геометрии и анализе. М.: Наука, 1982.
2. *Копылов А. П.* Об устойчивости классов многомерных голоморфных отображений. Концепция устойчивости. Теорема Лиувилля // Сиб. мат. журн. 1982. Т. 23, № 2. С. 83–111.
3. *Копылов А. П.* Об устойчивости классов многомерных голоморфных отображений. II. Устойчивость классов голоморфных отображений // Сиб. мат. журн. 1982. Т. 23, № 4. С. 65–89.
4. *Копылов А. П.* Об устойчивости классов многомерных голоморфных отображений. III. Свойства отображений, близких к голоморфным // Сиб. мат. журн. 1983. Т. 24, № 3. С. 70–91.
5. *Копылов А. П.* Устойчивость в $C$-норме классов отображений. Новосибирск: Наука, 1990.

**6.** *Даирбеков Н. С., Копылов А. П.* $\xi$-устойчивость классов отображений и системы линейных уравнений с частными производными // Сиб. мат. журн. 1985. Т. 26, № 2. С. 73–90.

**7.** *Копылов А. П.* О регулярности решений систем уравнений с частными производными, локально близких к эллиптическим системам линейных уравнений с постоянными коэффициентами. II // Сиб. мат. журн. 2000. Т. 41, № 1. С. 98–117.

**8.** *Копылов А. П.* Свойства отображений, близких к гармоническим // Сиб. мат. журн. 1998. Т. 39, № 4. С. 886–904.

**9.** *Копылов А. П.* Свойства отображений, близких к гармоническим. II // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, № 4. С. 758–779.

**10.** *Егоров А. А., Коробков М. В.* Устойчивость классов липшицевых отображений, теорема Дарбу и квазивыпуклые множества // Сиб. мат. журн. 2000. Т. 41, № 5. С. 1046–1059.

**11.** *Егоров А. А., Коробков М. В.* К устойчивости классов аффинных отображений // Сиб. мат. журн. 2001. Т. 42, № 6. С. 1259–1277.

**12.** *Коробков М. В.* Устойчивость в $C$-норме и $W^1_\infty$-норме классов липшицевых функций одной переменной // Сиб. мат. журн. 2002. Т. 43, № 5. С. 1026–1045.

**13.** *Korányi A., Reimann H.* Foundations for the theory of квазиconformal отображения on the Heisenberg group // Adv. Math. 1995. V. 111, N 1. P. 1–87.

**14.** *Даирбеков Н. С.* Устойчивость отображений с ограниченным искажением на группе Гейзенберга // Сиб. мат. журн. 2002. Т. 43, № 2. С. 281–294.

**15.** Gromov M. Carnot–Carathéodory spaces seen from within // Sub-Riemannian geometry. Basel: Birkhäuser, 1996. P. 79–323. (Progr. Math.; V. 144).

**16.** *Гуров Л. Г.* Оценки устойчивости лоренцевых отображений // Сиб. мат. журн. 1974. Т. 15, № 3. С. 498–515.

**17.** *Wang W.* Canonical contact forms on spherical CR-manifolds // J. European Math. Soc. 2003. V. 5. P. 245–273.

**18.** *Greiner P., Staubach W., Wang W.* A relative index on the space of 3-dimessional embeddable CR-structures of finite type // Math. Nachr. 2005. Bd 278, N 4. S. 379–400.

**19.** *Wang W.* The Teichmüller distance on the space of spherical CR structures // Sci. China Ser A 49. 2006. N 11. P. 1523–1538.

**20.** *Beals R., Gaveau B., Greiner P.* The Green function of model step two hypoelliptic operators and the analysis of certain tangential Cauchy–Riemann complexes // Adv. Math. 1996. V. 121. P. 288–345.

**21.** *Chern S. S., Moser J.* Real hypersurfaces in complex manifolds // Acta. Math. 1974. V. 133. P. 219–271.

**22.** *Wang W.* Regularity of $\bar\partial_b$ complex on nondegenerate Cauchy–Riemann manifolds // Sci. China Ser. A. 2001. V. 44, N 4. P. 452–466.

**23.** *Fischer B., Leiterer J.* A local Martinelli–Bochner formula on hypersurfaces // Math. Z. 1993. Bd 214, N 4. S. 659–681.

**24.** *Folland G.* Subelliptic estimates and function spaces on nilpotent Lie groups // Ark. Mat. 1975. V. 13, N 2. P. 161–207.


*Статья поступила 26 мая 2005 г.*

*Wei Wang (Ван Вэй)*
*Department of Mathematics,*
*Zhejiang University (Xixi campus),*
*Zhejiang 310028, P. R. China*
`wwang@zju.edu.cn`